Um Modelo Teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de Artigos Científicos

Graça Luzia Dominguez Santos
Universidade Federal da Bahia
gracadom@ufba.br

Jonei Cerqueira Barbosa
Universidade Federal da Bahia
jonei.cerqueira@ufba.br

Resumo
O objetivo do presente estudo é construir um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função. O modelo *re-presenta*, organizando, estruturalmente, textos com o propósito de ensino, produzidos e reproduzidos sobre o conceito de função. Como fonte de dados para construção do modelo, empregamos artigos publicados em periódicos da área de Educação Matemática que investigam o ensino e/ou aprendizagem do conceito de função no Ensino Básico. O modelo foi estruturado nos seguintes panoramas: tabular, máquina de transformação, diagrama, analítico, gráfico, generalização de padrões e formal, os quais são constituídos de textos que apresentam uma sintaxe específica na realização do conceito de função. Espera-se que o modelo desenvolvido forneça subsídios e reflexões sobre as formas de realizar esse conceito no ensino.

Palavras-chave: Função. Conceito. Matemática para o Ensino. Realizações. Regras de Reconhecimento e Realização.

A Theoretical Model of Mathematics for Teaching the Concept of Function from Scientific Articles

Abstract
The present study was aimed at constructing a theoretical model of mathematics for teaching the concept of function. The model *re-presents* and structurally organizes the texts that are produced and reproduced about the concept of function for the purpose of teaching. As data source, we use papers that presented researches about teaching and/or learning the function in elementary and secondary schools. Those selected papers belong to journals of mathematics education. The model was structured in the following landscapes: tabular, processing machine, diagram, algebraic, graphic, generalization of patterns, and formal. The landscapes are constituted of texts that present a specific syntax for realizing the concept of function. It is expected that the developed model provides subsidies and reflections about the realization of the concept of function in teaching.

Keywords: Function. Concept. Mathematics for Teaching. Realizations. Recognition and Realization Rules.

Introdução

A relevância do conceito de função no ensino de Matemática tem se refletido em um substancial corpo de pesquisa na área de Educação Matemática (DOORMAN et al., 2012). Tais estudos apontam para uma diversidade de configurações comunicativas específicas para abordar o conceito de função no ensino.

Compreender e interpretar a comunicação matemática mobilizada, produzida e utilizada no ensino tem sido objeto de pesquisas na área de Educação Matemática (DAVIS; RENERT, 2009, 2014). Como consequência, vem consolidando-se uma frente de pesquisa, sob os rótulos de Matemática para o Ensino (MpE) (*Mathematical for Teaching*, tradução nossa) ou Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) (*Mathematical Knowledge for Teaching*, tradução nossa) (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

No presente estudo, que faz parte de uma pesquisa mais ampla (SANTOS, BARBOSA, 2016, 2017), temos como propósito construir um *modelo teórico*[1] de MpE do Conceito de Função.

Nesse trabalho, conceptualizamos a MpE em termos discursivos, adotando como lentes teóricas conceitos da Teoria dos Códigos de Basil Bernstein (BERNSTEIN, 2000, 2003), que se baseia na diversidade comunicativa de formas específicas de *realizar*[2] o conceito de função no ensino. À vista disso, optamos por utilizar a nomenclatura MpE, ao invés de MKT, porquanto esta última é empregada, majoritariamente, pelas conceituações pautadas em abordagens cognitivistas (RHOADS; WEBER, 2016).

Uma perspectiva de Matemática para o Ensino

MpE ou MKT tem sido investigado a partir de uma variedade de aportes teóricos (ROADS; WEBER, 2016). Independente das epistemologias subjacentes a tais conceptualizações, há como pressuposto o reconhecimento de que a forma como a (comunicação) matemática é ou deve ser utilizada e produzida no ensino tem especificidades (DAVIS; RENERT, 2009). Tal especificidade corrobora o entendimento de Bernstein (2000) de que a comunicação pedagógica é regulada por princípios próprios dessa prática.

Segundo Bernstein (2000, 2003), os princípios de comunicação operam isolando e posicionando os sujeitos, espaços, discursos, práticas, objetos, etc., em relação a outros sujeitos, espaços, discursos, práticas, objetos, etc., agrupando-os em categorias especializadas. É com base nesse isolamento que esses princípios estabelecem formas legítimas de comunicação entre e para diferentes categorias (BERNSTEIN, 2000, 2003).

[1] Na seção seguinte apresentaremos uma breve explanação sobre o entendimento assumido para modelo teórico.
[2] Tomemos o termo realizar ou realização provisoriamente como intuitivos.

Os princípios de comunicação geram um conjunto de regras especializadas, denominadas de regras de reconhecimento e de realização (BERNSTEIN, 2000, 2003). As regras de reconhecimento funcionam como uma chave para distinguir (reconhecer) as características comunicativas de uma categoria, em função da especificidade dos seus textos, fornecendo assim, limites para seu potencial comunicativo (BERNSTEIN, 2000, 2003). Texto, aqui, é compreendido no sentido amplo, como qualquer ato comunicativo expresso por alguém, abrangendo textos verbais, escritos, gestuais ou espaciais (BERNSTEIN, 2000, 2003).

As regras de realização instauram critérios para seleção e produção dos textos legítimos, ou seja, "como" os textos legítimos (de e para cada categoria) podem ser selecionados e tornados públicos (BERNSTEIN, 2000, 2003).

Dessa perspectiva, objetivamos estabelecer critérios para o reconhecimento ("que" textos) e realização da comunicação matemática veiculada e produzida nos contextos de ensino pelos seus participantes sobre um determinado conceito e, dessa forma, apresentar uma perspectiva para MpE de um conceito em termos de suas fronteiras e possibilidades comunicativas.

Um conceito matemático é compreendido como um conjunto constituído de textos, denominados de realizações (*realizations*) (DAVIS; RENERT, 2014, tradução nossa), que podem ser associadas à palavra que o designa. As realizações são textos, assim reconhecemos, que podem se apresentar, como definições formais, metáforas, algoritmos, analogias, símbolos algébricos, aplicações, gestos, desenhos ou objetos manipuláveis (DAVIS; RENERT, 2014). As realizações de um conceito matemático não são meras janelas para esse conceito, mas os seus elementos constituintes (DAVIS; RENERT, 2014). Por conseguinte, entendemos o "conceito de função" como um conjunto das realizações que podem ser associadas à palavra função.

Com base nesses pressupostos, conceptualizamos Matemática *no* Ensino (MnE) do Conceito de Função como um conjunto de textos sobre esse conceito, comunicados com propósito de ensino no contexto escolar, em conformidade com os princípios reguladores desse contexto. Portanto, a MnE de um conceito refere-se ao ensino deste conceito tal como ele ocorre nas relações pedagógicas.

Isto posto, uma Matemática *para* o Ensino do Conceito de Função é conceptualizada como uma *re-presentação* da MnE do Conceito de Função. Utilizamos o vocábulo *re-presentar* (separando com um hífen) para ressaltar que se trata de outra apresentação das formas de realização do conceito de função no ensino. Como exemplo de uma MpE do Conceito de Função, podemos citar um autor de livro didático quando aborda esse conceito em seu texto. Nestes casos, não se tem o ensino sendo realizado, mas sim uma *re-presentação* com vistas ao ensino.

Uma das possíveis *re-presentações* para MpE de um conceito, a qual focalizamos no presente estudo, consiste em estruturar e sistematizar o fenômeno MnE desse conceito. Em outras palavras, trata-se de um conjunto coerente e formalizado de proposições para compreensão desse fenômeno. Desse modo, uma MpE de um conceito (aqui, do conceito de função) pode ser vista como um modelo teórico.

O modelo teórico de MpE do Conceito de Função que construímos nesse estudo está estruturado e sistematizado em termos de categorias, denominadas de panoramas (*landscapes*) (DAVIS; RENERT, 2014, tradução nossa) de realizações, que apresentam similaridades no que tange às regras de reconhecimento e realização, decorrentes dos princípios que regulam a comunicação matemática sobre o conceito de função nos contextos de ensino. Dessa forma, o modelo atende às características de uma estrutura teórica, isto é, um conjunto coerente de proposições usadas para compreensão de uma classe de fenômenos.

Dentre as possíveis fontes dos textos que constituem ou podem constituir a MnE do Conceito de Função, utilizamos realizações do conceito de função identificadas em artigos da área de Educação Matemática que investigam o seu ensino e/ou aprendizagem, independente dos referenciais teóricos adotados nos estudos analisados.

Sendo assim, o objetivo da investigação é construir um modelo teórico de MpE do Conceito de Função a partir de realizações desse conceito identificadas em artigos científicos na área de Educação Matemática.

Um modelo teórico tem dois usos potenciais: uma ferramenta analítica para a pesquisa e uma ferramenta pedagógica para a formação de professores (BARBOSA, 2013). Desse modo, o modelo construído pode contribuir tanto com pesquisas que investigam esse tema, servindo-lhes de fundamentação teórica, quanto com a comunidade de professores e formadores de professores, oferecendo uma sistematização sobre a diversidade e especificidade de formas de realizar esse conceito no ensino.

Aspectos metodológicos

Para identificar as realizações do conceito de função em artigos da área de Educação Matemática, empregamos como estratégia de análise o estudo documental. Destacamos que, apesar de o *corpus* ser constituído de artigos científicos, ou seja, materiais que já receberam tratamento analítico, neste estudo, não analisamos os resultados obtidos nessas investigações. Nosso objetivo é identificar as realizações do conceito de função presente nos artigos. À vista disso, consideremos tais artigos como documentos e não como literatura. Assim, estamos assumindo que a pesquisa documental vale-se de "[...] materiais que podem ser reelaborados de acordo com os objetivos de pesquisa" (GIL, 2002, p.45).

Para o *corpus*, selecionamos os periódicos: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM), Educação Matemática Pesquisa (EMP), *Educational Studies in Mathematics* (*ESM*), *Journal of Mathematics Teacher Education* (*JMTE*) e Zetetiké. Esses periódicos foram selecionados por serem, dentre outros, reconhecidos e responsáveis por trabalhos de pesquisa de relevância na área de Educação Matemática, possuindo todos eles uma das classificações no estrato entre A1 e B2 no Qualis das áreas de Ensino e/ou Educação da CAPES[3]. Circunscrevemos o período da busca dos artigos de 1990 a 2015[4], por considerarmos que tal intervalo de tempo é amplo o suficiente, para formar um *corpus* substancial de pesquisas. Inicialmente, a seleção baseou-se na leitura do título, resumo e palavras-chave. Conforme identificávamos elementos relevantes concatenados com o objetivo norteador da pesquisa, os artigos eram lidos integralmente. Dessa forma, foram selecionados trinta artigos, em conformidade com o Quadro 1.

Quadro 1 - Relação dos artigos selecionados por periódicos

Periódico	Autores
BOLEMA	Birgin (2012), Menegheti e Redling (2012), Asghary, Shahvarani e Medghalchi (2013), Dazzi e Dullius (2013), Strapason e Bisognin (2013), Callejo e Zapatera(2014), Maciel e Cardoso (2014),
EMP	Rossini (2007), Beltrão e Igliori, (2010)
GEPEM	Silva et al. (2001), Frant (2003), Maggio e Nehring (2012)
ESM	Even (1990), Confrey e Smith (1994), Schwarz e Dreyfus (1995), Slavit (1997), Yerushalmy (2000), Sajka (2003), Moschkovich (2004), Falcade, Laborde e Moriotti (2007), White (2009), Ayalon, Watson e Lerman (2015), Hitt, González-Martín (2015), Ronda (2015), Tabach e Nachlieli (2015)
JMTE	Sánchez e Llinares (2003), Steele, Hillen e Smith (2013), Wilkie (2014)
ZETETIKÉ	Zuffi e Pacca (2000), Brito e Almeida (2005)

Fonte: autores.

Para categorizar e analisar as realizações identificadas no *corpus*, além de conceitos de regras de realização e reconhecimento, inspiramo-nos em alguns componentes do arcabouço organizacional do Estudo do Conceito (EC) (tradução livre de *Concept Study*), desenvolvido por Davis e Renert (2009, 2014).

O EC é uma estrutura colaborativa com o propósito de engajar professores na análise de um determinado conceito matemático, sob a perspectiva do seu ensino (DAVIS; RENERT, 2009, 2014).

[3] Disponível em <www.qualis.capes.gov.br>. Acesso em 05 ago. 2015.
[4] Alguns periódicos não disponibilizam online ou iniciaram suas atividades após 1990: JMTE – 1998, BOLEMA – 2006, Zetetiké – 2001 e EMP – 2004.

Os elementos da organização do EC são denominados de ênfases. Como *ferramenta analítica*, para estruturar o modelo teórico, apropriamo-nos das ênfases *realizations*, *landscapes* e *entailments* (DAVIS; RENERT, 2009, 2014), que traduzimos como realizações, panoramas e vinculações, respectivamente.

Norteados pela perspectiva teórica que sustenta esse estudo, nossa forma de utilizar as ênfases panoramas e vinculações difere da originalmente dada por esses autores. Panoramas, aqui, são erigidos com base na convergência das regras de reconhecimento e realização. Por outro lado, as vinculações são compostas considerando-se a geração de potencialidades e limitações comunicativas decorrentes de implicações lógicas instauradas pelas realizações que compõem cada panorama.

Os panoramas e suas vinculações

As realizações que podem ser associadas à palavra função foram organizadas nos seguintes panoramas: tabular, máquina de transformação, diagrama, analítico, gráfico, generalização de padrões e formal.

Tabular

O panorama tabular é constituído das realizações de função como tabela, que são reconhecidas pela disposição em linhas ou colunas, dos dados de entrada e os correspondentes dados de saída, de uma relação funcional. No Quadro 2 solicita-se a realização tabular da relação funcional que, a cada intervalo de tempo transcorrido (dados de entrada), associa a distância percorrida por um carro com velocidade constante de 60 km/h (dados de chegada). Nessa conformidade, o número de quilômetros trilhados pelo veículo depende do tempo decorrido, visto que é obtido utilizando-se o padrão: multiplicar o tempo por 60. Por conseguinte, as realizações tabulares propiciam o reconhecimento e a legitimação das noções de correspondência, dependência e regularidade entre grandezas/quantidades variáveis como integrantes da rede de entendimentos (vinculações) sobre o conceito de função (SILVA et al., 2001; MAGGIO; NEHRING, 2012). Para Steele, Hillen e Smith (2013), a observação do caráter da relação entre dos dados de entrada e saída de uma realização tabular pode facultar o reconhecimento de funções lineares, como a relação funcional apresentada no Quadro 2.

Quadro 2 – Tabular

Um carro está percorrendo uma estrada com velocidade constante de 60 km/h. Complete a tabela associando a cada tempo a distância percorrida.	

hora	Km
0	0
1/2	30
1	60
1	90
2	120
3	180

Fonte: Silva et al. (2001)

Por intermédio de tais realizações, também é possível instaurar o reconhecimento dos dados de entrada e saída, como variáveis independentes e dependentes, respectivamente (MAGGIO; NEHRING, 2012; STRAPASON; BISOGNIN, 2013), e, consequentemente, caracterizar os conjuntos domínio (das variáveis independentes) e imagem (das variáveis dependentes) de uma relação funcional.

O reconhecimento de uma tabela como sendo uma realização tabular de uma relação funcional está fundamentado no caráter univalente de uma relação funcional - "[...] toda fonte tem uma única imagem" (TABACH; NACHLIELI, 2015, p. 172, tradução nossa).

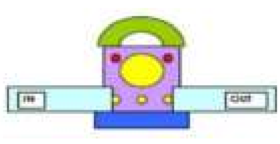
Para Schwarz e Dreyfus (1995), a utilização exclusivamente da realização tabular pode acarretar inferências incorretas acerca da relação funcional, tais como, identificação do tipo de função, injetividade ou valor extremo, pois nessas realizações só é possível ter informações sobre alguns dados da relação funcional.

Máquina de Transformação

As realizações de função como uma máquina de transformação utilizam a metáfora de função como uma máquina que processa/transforma/modifica cada *input* (elemento de entrada) gerando um único *output* (elemento de saída). No Quadro 3, apresentamos um texto icônico de uma realização de função como máquina de transformação.

Quadro 3 – Máquina de transformação

INPUT
1
2
3
4
n



OUTPUT
3
5
7
9
?

Fonte: Wilkie (2014, p. 425)

As realizações desse panorama são indicadas por Asghary, Shahvarani e Medghalchi (2013) e Rossini (2007) para uma aproximação introdutória aos textos que abordam o conceito de função, considerando que a metáfora empregada nessas realizações correlaciona textos do cotidiano com o conceito de função, tornando-os mais facilmente reconhecíveis pelos alunos, mesmo que não apresentem o rigor da Matemática Acadêmica, corroborando o pressuposto de que, no contexto escolar, operam regras específicas de legitimação dos seus textos.

O reconhecimento de mudança, processo, transformação e dependência como noções subjacentes ao conceito de função torna-se patente nas realizações de função como máquina de transformação. Ademais, com o suporte de tais realizações, é possível reconhecer como características de uma relação funcional a natureza das variáveis, identificando-as como variáveis independentes (*inputs*) e dependentes (*outputs*), e, assim, os conjuntos domínio e imagem (ASGHARY; SHAHVARANI; MEDGHALCHI, 2013; WILKIE, 2014).

Para Slavit (1997), as realizações desse panorama podem subordinar o conceito de função a aspectos computacionais, considerando que essas realizações reportam-se a relações funcionais que obedecem a um padrão.

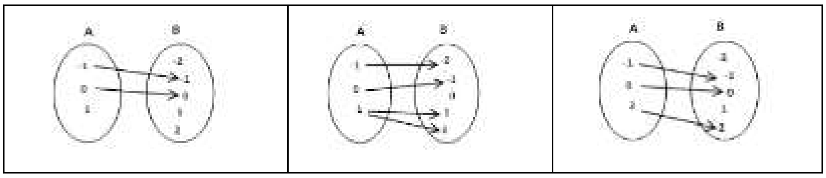
Diagrama

Esse panorama é composto das realizações de função como diagramas de setas, que são caracterizados pela correspondência arbitrária e univalente entre dois conjuntos não vazios quaisquer. As relações funcionais passíveis de serem realizadas por diagramas são aquelas em que todos os elementos dos conjuntos domínio e contradomínio podem ser dispostos em diagramas.

Por intermédio dessas realizações, uma relação funcional é reconhecida "[...] como sendo uma correspondência entre cada elemento do conjunto A com um único elemento do conjunto B" (MENEGHETI; REDLING, 2012, p. 215), com A e B conjuntos não vazios e arbitrários, dispostos em diagramas, e cuja correspondência é identificada por uma seta partindo de cada elemento do conjunto A para um único elemento do conjunto B. Como podemos constatar, os referidos pesquisadores utilizaram a realização por diagrama para definir uma relação funcional como uma correspondência, demarcando a característica univalente do conceito de função.

No Quadro 4, retratamos alguns diagramas que foram utilizados com o propósito de reconhecer, quais eram realizações de uma relação funcional e, em caso afirmativo, identificar os seus conjuntos domínio, imagem e contradomínio.

Quadro 4 – Diagramas



Fonte: Menegheti; Redling (2012, p. 215)

Assim, da esquerda para direita, os dois primeiros exemplos não são realizações de uma relação funcional. O último é uma realização por diagrama de uma relação funcional, tendo como domínio o conjunto A e contradomínio o conjunto B; o conjunto imagem da relação funcional é {-1, 0, 2}. Menegheti e Redling (2012) destacam que as realizações como diagramas tornam visível o reconhecimento do conjunto imagem de uma relação funcional como um subconjunto do seu contradomínio.

Analítico

Compõem o panorama analítico as realizações do conceito de função que explicitam a relação entre as variáveis independente e dependente de uma relação funcional por intermédio de uma lei, regra ou fórmula. Usualmente reconhecidas e realizadas pelo texto $y = f(x)$, sendo x a variável independente e y a variável dependente, para relações funcionais cujo domínio e contradomínio são subconjuntos do conjunto dos números reais (*R*).

Na situação reportada no Quadro 5, a realização analítica opera como um modelo matemático para descrever um fenômeno, explicitando a relação de dependência entre as variáveis, propiciando assim a quantificação do fenômeno sob investigação (FRANT, 2003, SLAVIT, 1997).

Quadro 5 – Expressão Analítica

Inicia-se a criação de certa bactéria em um laboratório. Estudos indicam que o número inicial é de 200 bactérias. A cada duas horas a quantidade dobra. A fórmula que representa esta situação é dada por: $N(t) = N_0 . K^t$, onde: N_0 = número inicial de bactérias, t = tempo e K = constante. Determine o numero de bactérias 12 horas após o início do estudo.

Fonte: Menegheti; Redling (2012, p. 217)

De fato, na situação funcional apresentada, fica notório o reconhecimento de que a variação do número de bactérias na colônia depende da variação do tempo, sendo possível determinar para qualquer tempo *t*, a sua imagem, no caso o número de bactérias (*N*(*t*)).

As realizações analíticas são compactas, tendo em vista que condensam em um texto (uma cadeia de símbolos) um grande número de informações (SCHWARZ; DREYFUS, 1995; RONDA, 2015), possibilitando, por exemplo, o reconhecimento e a caracterização de uma família de relações funcionais (WILKIE, 2014), tais como, funções linear, quadrática, polinomial, racional, exponencial, logarítmica e trigonométricas, as quais constituem um repertório básico (EVEN, 1990) das relações funcionais que são objeto de estudo no Ensino Básico.

As realizações analíticas facultam a realização de operações com relações funcionais (SÁNCHEZ; LLINARES, 2003; RONDA, 2015, YERUSHALMY, 2000) que possuem ou podem ser restritas a um mesmo domínio, tais como, realizar soma, subtração, multiplicação e/ou divisão (neste caso, a função do quociente deve ser não nula) de relações funcionais, gerando, dessa forma, um grande número de "novas" relações funcionais (EVEN, 1990). Além disso, por meio da composição e inversão de relações funcionais também é possível gerar "novas funções" (EVEN, 1990).

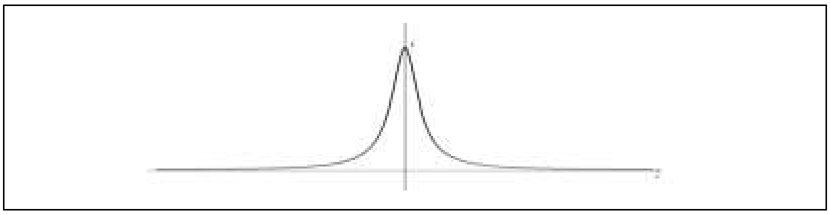
Sajka (2003) destaca que o conceito de função é frequentemente indistinguível das realizações analíticas. Tal preponderância é justificada, em alguns estudos, pelo reconhecimento do papel central que o conceito de função desempenha no ensino e aprendizagem de Álgebra (ASGHARY; SHAHVARANI; MEDGHALCHI, 2013; BIRGIN, 2012; SLAVIT, 1997; WILKIE, 2014; YERUSHALMY, 2000), de forma que as referidas realizações acabam por serem priorizadas no Ensino Básico (STEELE; HILLEN; SMITH, 2013, ZUFFI, PACCA, 2000). No entanto, a predominância de tais realizações no ensino pode acarretar a subordinação de uma relação funcional a uma realização analítica, impossibilitando o reconhecimento de relações que são funcionais apesar de não serem realizáveis analiticamente.

Gráfico

Esse panorama é composto das realizações gráficas de uma relação funcional cujos conjuntos domínio e contradomínio são subconjuntos de *R*, denominadas de gráfico da relação funcional. O gráfico de relação funcional *f* dessa natureza é realizado plotando-se no plano cartesiano ($R \times R$) o conjunto de pontos (x, y), tal que x (variável independe usualmente associada ao eixo horizontal) e $y = f(x)$ (variável dependente usualmente associada ao eixo vertical) (SHWARZ; DREYFUS, 1995).

A partir da realização gráfica da relação funcional apresentada no Quadro 6, cuja realização analítica é $f(x) = 1/(1 + x^2)$, podemos inferir que f tem um máximo em x = 0; é crescente no intervalo $]-\infty,0[$ e decrescente no intervalo $]0,+\infty[$; limitada; simétrica em relação ao eixo oy, estritamente positiva e não injetora. Isso ilustra a potencialidade das realizações gráficas no reconhecimento e especificação de características das relações funcionais (SÁNCHEZ; LLINARES, 2003, STRAPASON; BISOGNIN, 2012), sendo possível fazer estimativas sobre o comportamento global ou local da relação funcional (SÁNCHEZ; LLINARES, 2003).

Quadro 6 – Gráfica



Fonte: Sanchéz; Llinares (2003, p. 12)

Dazzi e Dullius (2013), Moschkovich (2003) e White (2009) utilizaram tecnologias digitais para potencializar o estabelecimento de *pontes* entre os panoramas analítico e gráfico. Nesses estudos, as tecnologias digitais possibilitaram que fossem "deduzidas" informações sobre características do comportamento da relação funcional. O reconhecimento e a legitimação das informações assim obtidas demarcam critérios de validação específicos para o ensino do conceito de função, isto é, da MnE do Conceito de Função, no contexto do Ensino Básico.

Por intermédio dessas realizações, é possível reconhecer se um subconjunto do plano cartesiano é a realização gráfica de uma relação funcional, utilizando-se o "teste da linha vertical", que consiste em visualizar ou traçar linhas verticais, ou seja, paralelas ao eixo O*y*, e verificar que estas intersectam o gráfico da função em, no máximo, um ponto (SLAVIT, 1997; STEELE; HILLEN; SMITH, 2013).

A ênfase nas realizações de função como um gráfico pode dificultar o reconhecimento de relações funcionais que não podem ser realizadas graficamente e/ou aquelas cujos conjuntos domínio e contradomínio não são subconjuntos dos números reais (EVEN, 1990; STEELE; HILLEN; SMITH, 2013, ZUFFI; PACCA, 2000).

Generalização de padrões

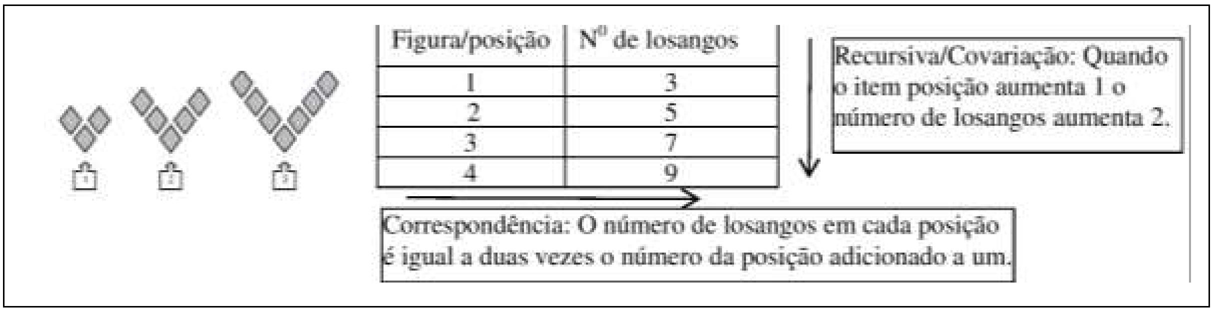
As realizações que constituem o presente panorama comunicam o conceito de função como textos que apresentam afirmações de cunho geral, que são realizados com base no reconhecimento da relação de dependência ou variação entre quantidades e/ou variáveis de descrições ou casos particulares de relações funcionais (WILKIE, 2014).

As relações funcionais realizadas por generalização de padrões são as sequências numéricas, sequências de formas geométricas e fenômenos que obedecem a um padrão (ASGHARY; SHAHVARANI; MEDGHALCHI, 2013; BELTRÃO; IGLIORI, 2010; BRITO; ALMEIDA, 2005; CALLEJO; ZAPATERA; 2014; CONFREY, SMITH, 1994; MACIEL; CARDOSO, 2015; MAGGIO; NEHRING, 2012; ROSSINI, 2007; WILKIE, 2014).

O reconhecimento e a realização da generalização de padrões em sequências numéricas e de figuras geométricas podem ser operacionalizados por intermédio de uma generalização explícita (abordagem relacional) (AYLON; WATSON; LERMAN, 2015; CALLEJO; ZAPATERA; 2014; MACIEL; CARDOSO, 2014; MAGGIO; NEHRING, 2012; ROSSINI, 2007; WILKIE 2014) ou recursiva (abordagem covariacional) (ASGHARY; SHAHVARANI; MEDGHALCHI, 2013; AYLON; WATSON; LERMAN, 2015; CALLEJO; ZAPATERA; 2014; FALCADE; LABORDI; MARIOTTI, 2007; WILKIE 2014; HITT; GONZÁLEZ-MARTIN, 2015). Na generalização explícita analisam-se os padrões, buscando reconhecer a relação entre as variáveis, com o propósito de gerar uma regra geral para determinar o valor de um elemento da sequência em uma posição arbitrária, enquanto na generalização recursiva o âmago consiste em reconhecer e descrever a relação entre os itens sucessivos da sequência (AYLON; WATSON; LERMAN, 2015; CONFREY; SMITH, 1994; WILKIE, 2014).

No Quadro 7, reportamos a generalização de uma sequência de figuras geométricas. Observe que a organização dos dados da relação funcional em uma realização tabular fornece suporte para o reconhecimento e realização da generalização do padrão (ASGHARY; SHAHVARANI; MEDGHALCHI, 2013) nas duas abordagens, ou seja, nesse caso, foram estabelecidas *pontes* entre essas realizações.

Quadro 7 – Generalização de padrões



Fonte: Maggio; Nehring, (2012, p. 102)

Com base nas realizações por generalização em linguagem natural e tabular da relação funcional, podemos realizá-las também por textos simbólicos. Por conseguinte, para a sequência do Quadro 7, temos como generalização explícita o padrão $L(n) = 2n + 1$, com n denotando a figura/posição (n natural maior que 1) e $L(n)$ o número de losangos (trata-se da realização analítica da relação funcional); e na recursiva, $L(1) = 3$ e $L(n+1) = L(n) + 2$, com n natural maior que 1.

As realizações por generalização de padrões podem favorecer a participação inicial na comunicação sobre o conceito de função, até mesmo antes que o texto "função" tenha sido introduzido explicitamente no ensino (ASGHARY; SHAHVARANI; MEDGHALCHI, 2013; CALLEJO; ZAPATERA; 2014; MAGGIO; NEHRING, 2012; ROSSINI, 2007; WILKIE, 2014), considerando que têm o potencial de propiciar o reconhecimento da relação de dependência entre as quantidades/variáveis envolvidas, a qual posteriormente pode ser incorporada como uma das noções que compõem o entendimento do conceito de função (STEELE; HILLEN; SMITH, 2013, WILKIE, 2014).

A abordagem covariacional para generalização de padrões torna exequível a realização de função como taxa de variação (CONFREY; SMITH, 1994). Por exemplo, para os dados do Quadro 7, a taxa de variação da relação funcional é constante e igual a 2, pois $\frac{\Delta L}{\Delta n} = \frac{L_{n+1} - L_n}{(n+1) - n} = 2$.

A realização de função como taxa de variação viabiliza reconhecer à qual família particular a relação funcional pertence, tendo em vista que membros de algumas famílias de relações funcionais compartilham a mesma taxa de mudança. Por exemplo, funções afins são reconhecidas por apresentarem taxa de variação constante (BIRGIN, 2012) - Quadro 7, já as funções exponenciais são reconhecidas por possuírem taxa de mudança proporcional à função (BRITO; ALMEIDA, 2005; CONFREY; SMITH, 1994). Por conseguinte, tais realizações podem funcionar como uma base operacional para modelagem de fenômenos (AYLON; WATSON; LERMAN, 2015; CONFREY; SMITH, 1994; STEELE; HILLEN; SMITH 2013).

Formal

O panorama denominado como formal é composto pelas realizações de função na configuração de definições, que se caracterizam por serem realizadas por textos muito semelhantes aos produzidos no contexto da Matemática Acadêmica, quando definem função.

As realizações de função como definição formal identificadas nos artigos do *corpus*, definem uma relação funcional como uma relação univalente entre os elementos de dois conjuntos não vazios quaisquer (ROSSINI, 2007; SÁNCHEZ; LLINARES, 2003; TABACH; NACHLIELI, 2015, ZUFFI, PACCA, 2000). Por exemplo, Rossini (2007, p. 207-208) reproduz uma definição de função creditada ao grupo Bourbaki:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja $x \in E$, existe um elemento y de F, e somente um, que esteja na relação considerada com x.

Essas realizações explicitam duas características do conceito contemporâneo de função (na perspectiva da Matemática Acadêmica), a saber, univalência e arbitrariedade, as quais devem integrar os textos da matemática do Ensino Básico que abordam esse conceito, segundo Even (1990) e Steele, Hillen e Smith (2013).

A natureza arbitrária diz respeito tanto aos conjuntos que compõem a relação funcional, domínio e contradomínio, que podem ser conjuntos quaisquer, quanto à relação entre os dois conjuntos, que não precisa ser realizada analiticamente ou graficamente (EVEN, 1990; STEELE; HILLEN; SMITH, 2013).

A característica da univalência explicitada em tais realizações possibilita o reconhecimento de relações funcionais realizadas graficamente (teste da linha vertical), por tabelas (Quadro 2) e por diagramas (Quadro 4).

As realizações de função como definição formal apresentam clareza, rigor e precisão, entretanto não abarcam a amplitude de noções e interpretações que subjazem e dão forma ao conceito de função, instituídos no seu desenvolvimento histórico, os quais transcendem a sua estrutura lógica (EVEN, 1990; FALCADE; LABORDI; MARIOTI, 2007). Essa estrutura lógica foi apontada por Tabach e Nachlieli (2015) como um dos entraves no entendimento da realização de função como definição formal, em um estudo empírico conduzido por esses pesquisadores.

Com o propósito de familiarizar os alunos com os textos de tais realizações, Steele, Hillen, Smith (2013), Tabach e Nachlieli (2015) sugerem que as realizações de função como definição formal sejam apresentadas concomitantemente com outras realizações que já tenham sido objeto de ensino. Assim, esses pesquisadores indicam o estabelecimento de *pontes* entre essas realizações e, portanto, entre os seus respectivos panoramas.

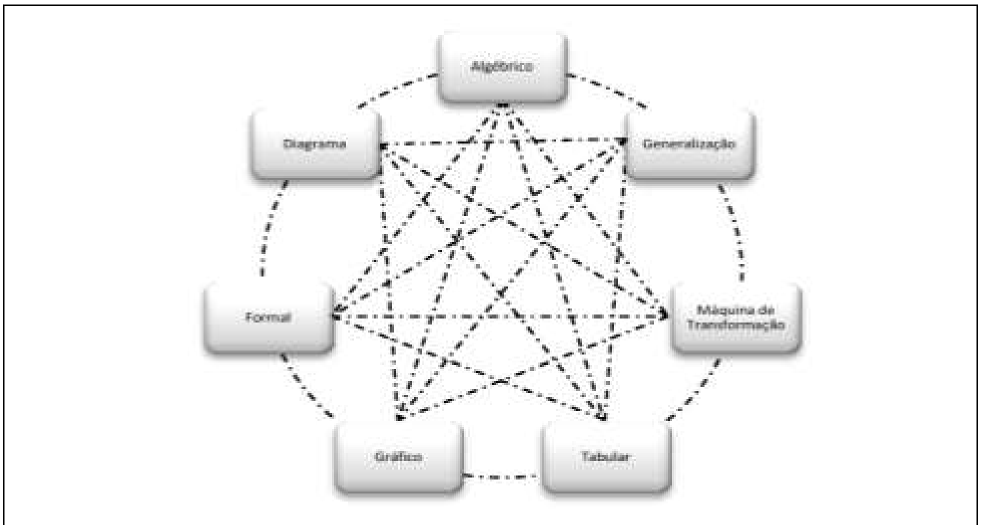
Considerações finais

O presente estudo teve como propósito construir um modelo teórico de MpE do Conceito de Função, tomando como base pesquisas relatadas em alguns periódicos da área de Educação Matemática.

Os panoramas constituintes do modelo possibilitam a identificação de *que* textos integram e comunicam legitimamente o conceito de função e, a partir daí, *como* esses textos podem ser selecionados e realizados de forma legítima, em decorrência das circunstâncias evocadoras no contexto da Educação Básica.

Apresentamos, no Quadro 8, um texto ilustrativo do modelo teórico de MpE do Conceito de Função construído nesse estudo.

Quadro 8 - Um modelo teórico de MpE do Conceito de Função a partir pesquisas relatadas em períodos da área de Educação Matemática



Fonte: autores

Na figura do Quadro 8, retratamos os panoramas em retângulos disjuntos com o objetivo de demarcar a especificidade (fronteiras) de cada um dos panoramas, posto que estes são caracterizados por textos singulares, com parâmetros próprios de reconhecimento e realização. A organização circular desses retângulos pretende comunicar, que *do ponto de vista do modelo*, os panoramas não apresentam relações hierárquicas, considerando que pertencem ao conjunto de realizações do conceito de função. Desse modo, do ponto de vista do modelo, o panorama formal, que em geral tem um caráter de destaque no ensino, está no mesmo patamar dos demais.

Por fim, as linhas tracejadas que conectam, dois a dois, todos os panoramas indicam *a possibilidade do estabelecimento de pontes entre os panoramas*, na realização do conceito de função no ensino.

No decorrer da análise efetivada na seção anterior, apontamos *a possibilidade do estabelecimento de pontes entre os panoramas*, identificadas nos artigos do *corpus*. Segundo Schwarz e Dreyfus (1995) e Steele, Hillen e Smith (2013), estudos já diagnosticaram que, usando nossos termos, um constante isolamento entre os panoramas tabular, gráfico e analítico, ocasiona uma visão compartimentalizada do conceito de função. De fato, com um forte isolamento entre os panoramas, a tendência é identificar o conceito de função somente por intermédio de um dos panoramas, excluindo os textos dos outros (NACHLIELI; TABACH, 2012).

Assim, o modelo teórico de MpE do Conceito Função construído pode fornecer subsídios e reflexões, para autores de livros didáticos do Ensino Básico e para comunidade de professores que atuam na Ensino Básico ou cursos de formação inicial e continuada, sobre as formas de realizar esse conceito no ensino, no que diz respeito, por exemplo, à seleção e ao sequenciamento das realizações do conceito de função, de acordo com os objetivos de ensino e grau de escolaridade, e a estratégias para evidenciar e fazer emergir noções e interpretações específicas que constituem esse conceito. Argumentamos, também, que o percurso metodológico concebido e operacionalizado para a construção desse modelo pode ser utilizado para outros conceitos matemáticos centrais no processo de escolarização.

Referências

ASGHARY, N.; SHAHNARANI, A.; MEDGHALCHI, A. R. Sobre o Processo de Mudança de Professores das Séries Iniciais Relativo ao Desenvolvimento do Pensamento Funcional. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 1007 – 1026, 2013.

AYALON, M.; WATSON, A.; LERMAN, S. Functions represented as linear sequential data: relationships between presentation and student responses. **Educational Studies in Mathematics**, n.90, p. 321 – 329, 2015.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education***, 59*, p. 389-407, 2008.

BARBOSA, J. C. Designing written tasks in the pedagogic recontextualising field: proposing a theoretical model. In: **7th International Mathematics Education and Society Conference**, 2013, Cape Town. Proceedings of the Seventh International mathematics Education and Society Conference. Cape Town:

University of Cape Town, v. 1. p. 213-222, 2013.

BELTRÃO, M. E. P.; IGLIORI, S. B. C. Modelagem Matemática e Aplicações: Abordagens Para o Ensino de Funções**. Educação Matemática Pesquisa**, v.12, n.1, p.17 – 42, 2010.

BERNSTEIN, B. **Pedagogy, symbolic control and identity:** theory, research, critique. New York: Rowman & Littlefield, 2000.

BERNSTEIN, B. **Class, codes and control**: the structuring of pedagogic discourse. New York: Routledge, 2003.

BIRGIN, O. Investigation of Eighth-Grade Students' Understanding of the Slope of the Linear Function. **Bolema***,* v. 26, n. 42A, p. 139 – 162, 2012.

BRITO, D. S.; ALMEIDA, L. M. W. O conceito de função em situações de modelagem matemática. **Zetetiké**, Cempem, Unicamp, v.13, n. 23,p. 63 – 86, 2005.

CALLEJO, M. L.; ZAPATERA, A. Flexibilidad en la Resolución de Problemas de Identificación de Patrones Lineales en Estudiantes de Educación Secundaria. **Bolema**. v.28, n. 48, p. 64 – 88, 2014.

CONFREY, J.; SMITH, E. Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. **Educational Studies in Mathematics**, n. 26, p. 135 – 164, 1994.

DAVIS, B., RENERT, M. Mathematics for teaching as shared, dynamic participation. **For the Learning of Mathematics**, *29*(3), p. 37 – 43, 2009.

DAVIS, B. ; RENERT, M. **The Math Teachers Know**: Profund Understanding of Emergent Matematics. Routledge Taylor & Francis Group, 141 p., 2014.

DAZZI, G. J.; DULLIUS, M. M. Ensino de Funções Polinomiais de Grau Maior que Dois Através da Análise de seus Gráficos, com Auxílio do *Software* Graphmatica. **Bolema**. v. 27, n. 46, p. 381 – 398, 2013.

DOORMAN, M. et al. Tool use and development of the function concept: from repeated the function concept: from repeated caculations to functional thinking**. International Journal of Science and Mathematics Education**. V. 10, I. 6, p. 1243 – 1267, 2012.

EVEN, R. Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. **Educational Studies in Mathematics***,* 21, p. 521 – 544, 1990.

FALCADE, R.; LABORDE, C.; MARIOTTI, M. A. Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation**. Educational Studies in Mathematics**, n. 66, p. 317 – 333, 2007.

FRANT, B. J. As equações e conceito de função. **Boletim GEPEM**, n. 42, p. 71 – 80, 2003.

GIL, A. C. **Como elaborar Projetos de Pesquisa**. Editora Atlas, 4ª edição, 2002.

HITT, F; GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. Covariation between variables in a modelling process:The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. **Educational Studies in Mathematics**. V. 88, I. 3, p. 201 –219.

MACIEL, P. R. C., CARDOSO, T. F. L. A História do Conceito de Função em Vídeo: uma proposta para a aprendizagem. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1348 – 1367, 2014.

MAGGIO, D. P.; NEHRING, C. M. Saberes docentes acerca das representações semióticas do conceito de função: Atuais desafios à educação matemática, **Boletim GEPEM**, n. 61, p. 95 – 108, 2012.

MENEGHETTI, R. C. G.; REDLING, J. P. Tarefas Alternativas para o Ensino e a Aprendizagem de Funções: análise de uma intervenção no Ensino Médio. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 26, n. 42A, p. 193 – 229, 2012.

MOSCHKOVICH, J. Appropriating mathematical practices: a case study of learning to use and explore functions through Interaction with a tutor. **Educational Studies in Mathematics**, n. 55, p. 49 – 80, 2004.

NACHLIELI, T., TABACH, M. Growing mathematical objects in the classroom-the case of function. **International Journal of Educational Research**, 51/52, p. 10-27, 2012.

RHOADS, K.; WEBER, K. Exemplary high school mathematics teacher's reflection on teaching: A situated cognition perspective on content knowledge. **International Journal of Education**, V. 78, p. 1 – 12, 2016.

RONDA, E. Growth points in linking representations of function: a research-based framework. **Educational Studies in Mathematics**, n. 90, p. 303 – 319, 2015.

ROSSINI, R. Evolução das organizações matemáticas e didáticas construídas em torno do conceito de função em uma formação de professores. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 9, n. 2, p. 205 – 247, 2007.

SÁNCHEZ, V. LLINARES, S. Four student teachers' pedagogical reasoning on functions. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 6, I. 1, p. 5 – 25, 2003.

SANTOS, G. L. D.; BARBOSA, J. C. Um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de função a partir de um estudo com professores. **Unión** (San Cristobal de La Laguna), v. 48, p. 143-167, 2016.

SANTOS, G. L. D.; BARBOSA, J. C. Um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de função a partir de realizações em livros didáticos. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 19, p. 315-338, 2017.

SAJKA, M. A secondary school student's understanding of the Concept of function – a case study. **Educational Studies in Mathematics**, n. 53, p. 229 – 254, 2003.

SCHWARZ, B.; DREYFUS, T. New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. **Educational Studies in Mathematics**, 29(3), p. 259 – 291, 1995.

SILVA, A. L. et al. Pesquisando, discutindo, pensando e produzindo material sobre funções. **Boletim GEPEM**, n. 38, p. 55 – 72, 2001.

SLAVIT, D. An alternate route to the reification of function. **Educational Studies in Mathematics**, n.33, p. 259 – 281, 1997.

STEELE, M.; HILLEN, A. F.; SMITH, M. S. Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 16, I. 6, p. 451 – 483, 2013.

STRAPASON, L. P. R.; BISOGNIN, E. Jogos Pedagógicos para o Ensino de Funções no Primeiro Ano do Ensino Médio. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 579 – 595, 2013.

TABACH, M.; NACHLIELI, T. Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. **Educational Studies in Mathematics**, n. 90, p. 163 – 187, 2015.

WHITE, T. Encrypted objects and decryption processes: problem-solving with functions in a learning environment based on cryptography. **Educational Studies in Mathematics**, n. 72, p. 17 – 37, 2009.

WILKIE, K. J. Upper primary school teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. **Journal of Mathematics Teacher Education**, n. 17, p. 397 – 428, 2014.

YERUSHALMY, M. Problem solving strategies and mathematical Resources: a longitudinal view on problem solving in a function based approach to algebra. **Educational Studies in Mathematics**, n. 43, p. 125 – 147, 2000.

Submetido em setembro de 2018
Aprovado em janeiro de 2019