Uma proposta didática sobre a Fórmula de Binet e os Números Complexos de Fibonacci: sua extensão para índices inteiros.

Rannyelly Rodrigues de Oliveira
Rede Estadual de Ensino Básico do Ceará, SEDUC
ranny.math.06@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE
fregis@ifce.edu.br

Resumo
Nesta proposta de aula, uma sequência de questões é sugerida com a finalidade de oportunizar uma investigação das relações oriundas do modelo de Fibonacci, em uma temática algébrica, com enfoque na Teoria das Situações Didáticas (TSD), que enfatiza a compreensão do processo evolutivo de um modelo matemático em abordagem complexa com perspectiva de aumento dimensional e sua extensão para índices inteiros.

Palavras-chave: Fórmula de Binet. Número Complexo de Fibonacci. Teoria das Situações Didáticas. Atividades.

A didactic proposal on the Binet's Formula and Complex Fibonacci Numbers: its extension for integers.

Abstract
In this lesson proposal, a sequence of questions is suggested with the purpose of facilitating an investigation of the relationships derived from the Fibonacci model, in an algebraic theme, focusing on Theory of Educational Situations (TSD) that emphasizes the understanding of the evolutionary process of a model mathematical model in a complex approach with a perspective of dimensional increase and its extension to integer indices.

Keywords: Binet's Formula. Complex Fibonacci Number. Theory of Educational Situations. Activities.

Introdução

Neste trabalho, propõe-se uma sequência de questões com enfoque na TSD para se explorar o Modelo de Fibonacci (MF), de modo que se pretenda oportunizar a compreensão de um processo evolutivo, mediante o estudo de definições e representações generalizadas da Sequência de Fibonacci (SF). Nesse sentido, será dada ênfase à Fórmula de Binet para os números reais de Fibonacci; em seguida, para os números complexos de Fibonacci e, consequentemente, a sua extensão para índices inteiros.

A TSD foi desenvolvida por Brousseau (1976) e é adotada como fundamentação para elaboração de questões que tenham como objetivo discutir em sala de aula as definições e relações matemáticas. Assim, a TSD é organizada em ação, formulação, validação e institucionalização, se equiparando às fases do processo de demonstração matemática. A situação de ação é caracterizada pelo pensamento imediato do aluno ao se empenhar a resolver a questão, fazendo uso, *a priori*, de seus conhecimentos prévios, ou seja, "de um conhecimento de natureza mais experimental e intuitiva do que teórica" (PAIS, 2002, p. 72). Por conseguinte, na fase de formulação, ocorre a passagem do pensamento intuitivo para o raciocínio inferencial. Assim, o estudante passa a expor argumentos mais elaborados.

Na etapa de validação, busca-se convencer o interlocutor de que os argumentos supostos para a resolução da questão são válidos. Para isso, o aluno apropria-se de definições e métodos de demonstração matemática. Desse modo, "[...] a teoria funciona, nos debates científicos e nas discussões entre alunos, como *milieu* de estabelecer provas ou refutá-las" (ALMOULOUD, 2007, P. 39). E, finalmente, na institucionalização o docente corrige as produções do aluno, a fim de formalizar o que foi discutido.

Por outro lado, o modelo de Fibonacci teve sua gênese a partir da situação-problema da reprodução de pares de coelhos "imortais", proposta por Leonardo Pisano em 1202 na obra *Liber Abbaci*. A quantidade de coelhos reproduzidos deu origem à SF $\{1, 1, 2, 3, 5, ...\}$, cujos termos são determinados por uma relação recorrente unidimensional (definição 1). Além do mais, esse modelo surgiu no contexto da Idade Média, na Itália, que compreende um período marcado pelo crescimento da atividade comercial, na qual Pisano atuava e teve contato com os números indo-arábicos (KING, 1963).

Atualmente, essa sequência instiga o interesse de pesquisadores do âmbito da Matemática Pura, que buscam ampliar o repertório de definições e relações recorrentes oriundas do modelo. Assim, esse modelo permite representações em uma abordagem complexa com uma perspectiva de aumento dimensional. E, por outro lado, esse modelo também é interesse de pesquisadores em Didática da Matemática que buscam explorá-lo em situações de ensino.

Isso caracteriza um processo de evolução desse modelo matemático. Nesse contexto, têm-se os números complexos Fibonaccianos $G(n,m)$ explorados por Harman (1981), Oliveira, Alves e Paiva (2017). Os trabalhos de Brother (1965) e Koshy (2001) apresentam uma discussão do modelo para índices inteiros. À vista disso, apresentam-se as seguintes definições e relações:

Definição1. Os números reais de Fibonacci são descritos pela seguinte recursividade unidimensional: $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \in \mathbb{N}$, para $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$ (ALVES E CATARINO, 2016).

Definição 2. Os números complexos de Fibonacci são descritos por: $C_n = f_n + i.f_{n+1}$. (HALICE, 2013).

Teorema 1. Seja f_n um número de Fibonacci, tem-se que os números complexos $G(n,m)$ são descritos por $G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m \cdot i$ (OLIVEIRA, ALVES E PAIVA, 2017).

Fórmula de Binet. $f_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \left(\dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)$ para $n \geq 1$ (ALVES, 2017).

A seguir, a proposta didática está organizada em uma investigação que tem como ponto de partida a definição 1; em seguida, a avaliação da fórmula de Binet, tendo em vista que esta é uma fórmula fechada para a determinação dos termos da SF, prosseguindo pela representação dos números complexos C_n e $G(n,m)$ em função dessa fórmula e suas respectivas extensões para índices inteiros.

Proposta de atividades

As atividades propostas aqui são sugestões com enfoque na TSD para aulas de Álgebra Linear, destacando que se pretende priorizar a avaliação da evolução matemática das representações atinentes ao MF. Nesse sentido, esta proposta didática sugere que as discussões das questões aconteçam em grupo pelos estudantes, como troca de argumentos matemáticos, de modo que as três fases da TSD sejam evidenciadas durante a resolução de cada questão. Assim, o professor deve propor as questões e acompanhar a estratégias de soluções.

E, por fim, caracterizando a etapa de institucionalização da TSD, o docente irá avaliar as resoluções e categorizar cada resolução em ação, formulação e validação. Isso oportuniza a generalização e formalização de relações matemáticas, partindo das discussões feitas pelos alunos, em que os mesmos fazem uso, inicialmente, de um conhecimento prévio de natureza teórica ou intuitiva, mas que, na etapa de validação, recorrem a argumentos matemáticos formais que atendem ao rigor matemático. Assim sendo, torna-se possível observar a mobilização cognitiva do estudante se direcionando à formação de um raciocínio inferencial.

Ademais, a categorização conforme a TSD exige que o docente conheça essa teoria de ensino, para que a concepção e o planejamento das questões considerem e permitam a predição de possíveis pensamentos e argumentos manifestados por parte dos alunos durante a vivência didática. Dessa forma, a partir do modelo recursivo unidimensional apresentado e das definições e relações expostas, propõe-se a seguinte sequência de questões:

(I) A partir do modelo recursivo unidimensional (definição 1), avalie a sequência de Fibonacci para índices inteiros.

(II) Verifique a validade da Fórmula de Binet para a determinação dos termos da sequência de Fibonacci e escreva sua representação para índices inteiros.

(III) Determine uma fórmula variante de Binet para os números complexos de Fibonacci C_n e faça a sua determinação para índices inteiros.

(IV) Determine uma fórmula variante de Binet para os números complexos de Fibonacci na forma $G(n, m)$ e faça a sua determinação para índices inteiros.

Atividades previstas e discussão

Nesta seção, as questões serão discutidas a fim de realizar uma situação didática focada na validade matemática das relações abordadas. Assim, as soluções serão categorizadas de acordo com as fases da TSD: ação, formulação e validação. De início, a primeira questão consiste em avaliar a identidade $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$ (KOSHY, 2001). Assim, na fase de ação e formulação, espera-se que os alunos sugiram a descrição da recursividade unidimensional $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \in \mathbb{N}$ (ALVES E CATARINO, 2016), de modo que apareçam os índices negativos. Na fase de validação, deve-se perceber que a sequência escrita a seguir permite a generalização da identidade $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$.

$$\begin{cases} f_{-1} = f_1 - f_0 = 1 - 0 = 1 \\ f_{-2} = -1 = -f_2 \\ f_{-3} = 2 = f_3 \\ f_{-4} = -3 = -f_4 \\ f_{-5} = 5 = f_5 \\ f_{-6} = -8 = -f_6 \\ f_{-7} = 13 = f_7 \\ \quad \vdots \quad\quad \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{-1} = 1 = (-1)^{1+1} \cdot f_1 \\ f_{-2} = -1 = (-1)^{2+1} \cdot f_2 \\ f_{-3} = 2 = (-1)^{3+1} \cdot f_3 \\ f_{-4} = -3 = (-1)^{4+1} \cdot f_4 \\ f_{-5} = 5 = (-1)^{5+1} \cdot f_5 \\ f_{-6} = -8 = (-1)^{6+1} \cdot f_6 \\ f_{-7} = 13 = (-1)^{7+1} \cdot f_7 \\ \quad \vdots \quad\quad \vdots \end{cases}$$

À vista disso, pode-se compreender a extensão da sequência de Fibonacci para índices inteiros, obtidos por meio de $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$. Na segunda questão, como ação, espera-se que os alunos sugiram a verificação da validade da Fórmula de Binet, para a determinação dos termos da sequência de Fibonacci, usando a indução matemática. Desse modo, pode-se ver que a fórmula fechada vale para a base: $f_1 = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1$ e $f_2 = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{(1+2\sqrt{5}+5)-(1-2\sqrt{5}+5)}{4}}{\sqrt{5}} = 1.$

No passo indutivo, ou seja, na formulação, os alunos devem assumir a hipótese de que vale $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ e $f_{n+1} = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$, em seguida, na validação, deve-se verificar a recorrência unidimensional tal que: $f_n + f_{n+1} = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} =$

$= \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}} = f_{n+2}$. Além do mais, vale comentar que $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ são as raízes da equação $t^2 - t - 1 = 0$; logo, prova-se que $f_n = \left(\dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)$ é válida. Portanto, a partir do resultado da questão anterior, pode-se escrever a fórmula de Binet para índices inteiros: $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n = (-1)^{n+1}.\left(\dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)$.

O terceiro problema discute o número complexo de Fibonacci em função da fórmula de Binet; assim, na fase de ação, deve-se escrever: $C_n = f_n + i.f_{n+1} = \left(\dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) + \left(\dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right)i = \left(\dfrac{\alpha^n + i\alpha^{n+1} - \beta^n - i\beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right) =$ $= \left(\dfrac{\alpha^n(1+i\alpha) - \beta^n(1+i\beta)}{\alpha - \beta}\right)$. Ainda nessa questão, na formulação, vale a sugestão de recorrer à identidade $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$ para escrever os números complexos de Fibonacci para índices inteiros. Em seguida, na validação, aplica-se a fórmula de Binet, de modo que $C_{-n} = f_{-n} + i.f_{-n+1} = (-1)^{n+1}.f_n + i.(-1)^n.f_{n-1} = (-1)^n.(-f_n + i.f_{n-1}) = (-1)^n.(-f_n + i.f_{n+1} - if_n) = (-1)^n.[-f_n(1+i) + i.f_{n+1}] =$

$$= (-1)^n.\left[-\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)(1+i) + i.\left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right)\right] = (-1)^n.\left[\frac{-\alpha^n - i\alpha^n + \beta^n + i\beta^n + i\alpha^{n+1} - i\beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right] = (-1)^{n+1}.\left[\frac{\alpha^n(1+i-i\alpha) - \beta^n(1+i-i\beta)}{\alpha - \beta}\right].$$

Finalmente, prosseguindo na abordagem complexa, tem-se a quarta questão que sugere uma discussão do modelo de Fibonacci; todavia, em duas dimensões por meio dos números $G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m \cdot i$ (OLIVEIRA, ALVES, PAIVA, 2017). Nesse sentido, intuitivamente, como estado de ação, os estudantes podem escrever esse número bidimensional em função da fórmula de Binet, tal como $G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m \cdot i = \left(\dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right).\left(\dfrac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta}\right) + \left(\dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right).\left(\dfrac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}\right).i =$ $= \dfrac{(\alpha^{n+m+1} - \alpha^n\beta^{m+1} - \alpha^{m+1}\beta^n + \beta^{n+m+1}) + (i\alpha^{n+m+1} - i\alpha^{n+1}\beta^m - i\alpha^m\beta^{n+1} + i\beta^{n+m+1})}{(\alpha - \beta)^2}$. Assim, na formulação, após algumas simplificações, é possível obter $G(n,m)=\dfrac{(\alpha^{n+m+1}+\beta^{n+m+1})(1+i)-\alpha^n\beta^m(\beta+\alpha i)-\alpha^m\beta^n(\alpha+\beta i)}{(\alpha-\beta)^2}$.

Além disso, ainda nessa fase, deve-se pensar em aplicar a identidade $f_{-n}=(-1)^{n+1}.f_n$.

Por fim, de modo análogo à resolução da terceira questão, na validação, deve-se avaliar o número bidimensional considerando o índice inteiro, ou seja, $G(-n,-m)=f_{-n}f_{-m+1}+f_{-n+1}f_{-m}\cdot i$. Dessa forma, pode-se escrever: $G(-n,-m)=f_{-n}f_{-m+1}+f_{-n+1}f_{-m}\cdot i=[(-1)^{n+1}.f_n.(-1)^m.f_{m-1}]+[(-1)^n.f_{n-1}.(-1)^{m+1}.f_m]i=$

$$=(-1)^{n+m+1}.[f_n.f_{m-1}+i.f_{n-1}.f_m]=(-1)^{n+m+1}.[f_n.f_{m+1}-f_n.f_m+i.f_{n+1}.f_m-if_n.f_m]=(-1)^{n+m+1}.[G(n,m)-(1+i)f_n.f_m]=$$

$$=(-1)^{n+m+1}.\left[\frac{(\alpha^{n+m+1}+\beta^{n+m+1})(1+i)-\alpha^n\beta^m(\beta+\alpha i)-\alpha^m\beta^n(\alpha+\beta i)}{(\alpha-\beta)^2}-\frac{(1+i).(\alpha^n-\beta^n)(\alpha^m-\beta^m)}{(\alpha-\beta)^2}\right]=$$

$$=(-1)^{n+m+1}.\frac{[(\alpha^{n+m+1}+\beta^{n+m+1})-(\alpha^n-\beta^n)(\alpha^m-\beta^m)](1+i)-\alpha^n\beta^m(\beta+\alpha i)-\alpha^m\beta^n(\alpha+\beta i)}{(\alpha-\beta)^2}.$$

Considerações finais

Neste trabalho, foram abordadas questões referentes ao processo evolutivo do MF, por intermédio da TSD, que permite a predição de possíveis comportamentos dos alunos, com a finalidade de proporcionar o entendimento de representações complexas como os números C_n e $G(n,m)$, acompanhada de sua extensão para índices inteiros aplicando a identidade $f_{-n}=(-1)^{n+1}.f_n$ e em função da fórmula de Binet. Por fim, espera-se que esta proposição de aula sirva de direcionamento para pesquisas, cujo campo epistêmico é composto por relações matemáticas abordadas em um contexto didático-cognitivo com enfoque na TSD, que apresentam uma perspectiva de aumento dimensional e complexo das relações recorrentes Fibonaccianas, de modo que venha ampliar o repertório de relações oriundas do MF.

Referências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática. Curitiba:** UFPR, 2007.

ALVES, F.R.V. Fórmula de moivre, ou de binet ou de lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de fibonacci - sgf. **Revista Brasileira de História da Matemática**. v. 17, n. 33, p. 1 – 16, 2017.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A classe dos polinômios bivariados de Fibonacci (PBF): elementos recentes sobre a evolução de um modelo. **Revista THEMA,** v. 14, n. 2, p. 112-136, 2016.

BROTHER, U. A. **Introduction fo Fibonacci Discovery.** California: Santa Clara University, 1965.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes em mathématiques. In J. Vanhamme & W. Vanhamme (Eds.), La problématique et l'enseignement de la mathématiques. **Comptes rendus de la XXVIIIe reencontre organisée par la Commission Internationale pour**

l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques. Louvain-la-Neuve, p. 101-117, 1976.

HALICI, S. On Complex Fibonacci Quaternions. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, 23, 105-112, 2013.

HARMAN, C. J. Complex Fibonacci Numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 19, n. 1, p. 82 – 87, 1981.

KING, C. Leonardo Fibonacci. **The Fibonacci Quarterly,** v. 1, n. 4, p. 15–19, 1963.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications.** A Wiley-Interscience publication, U.S.A., 2001.

OLIVEIRA, R. R.; ALVES, F. R. V.; PAIVA, R. E. B. Identidades bi e tridimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa. **REVISTA ELETRÔNICA PAULISTA DE MATEMÁTICA**, v. 11ic, p. 91-106, 2017.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

Submetido em novembro de 2018
Aprovado em dezembro de 2018