A Assessoria de Publicações do GEPEM explica que dificuldades de natureza gráfica acarretaram o atrazo na distribuição do Boletim 4.

Lamenta o ocorrido e espera contar com a compreensão dos colegas.

GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – (GEPEM)

DIRETORIA

Presidente: Maria Laura Mouzinho Leite Lopes
Vice-Presidente: José Carlos de Mello e Souza
Diretor Cultural: Anna Averbuch
Secretário Geral: Franca Cohen Gottlieb
Primeiro Tesoureiro: Wilson Belmonte dos Santos
Segundo Tesoureiro: Maria Helena Carvalho

ASSESSORES

ESTUDOS E PESQUISAS:

Maria da Conceição Gomes
Maria José Montes

TÉCNICO-PEDAGÓGICO:

Estela Kaufman Fainguelernt
Amélia Maria N. Pessoa de Queiroz

PUBLICAÇÕES:

Moema L. Mariani de Sá Carvalho
Vera Maria Rodrigues

INTERCÂMBIO INTERNACIONAL:

Franca Cohen Gottlieb

ÍNDICE

APRESENTAÇÃO

Contamos neste número com a colaboração dos professores Paulo Fabio Bregalda do Carmo, Raymundo Nonato Tavares e Maria Lucia Martins.

O Professor Paulo Fabio Bregalda do Carmo apresenta resumo de um trabalho sobre aplicação da Álgebra Linear à Pecuária. Esse trabalho foi feito na COPPE/UFRJ (Coordenação dos Programas de Pós-graduação), em cooperação com o Professor Claudio Thomas Bornstein, e foi apresentado à SBPC (Sociedade Brasileira Para o Progesso da Ciência). O resumo é accessível a alunos e professores de nível de segundo grau.

Professor Raymundo Nonato Tavares faz um estudo sistemático das propriedades do máximo divisor comum de dois ou mais números cuja publicação iniciamos.

As palestras pronunciadas no GEPEM pelo Professor Luiz Alberto Brasil foram resumidas pela Professora Maria Lucia Martins. Nessas palestras o Professor Brasil nos põe a par de suas pesquisas educacionais no Ceará, orientando professoras primárias na utilização de módulos por ele elaborados.

Acreditamos corresponder com esses artigos ao interesse dos professores por:

- aplicações da Álgebra Linear em problemas da vida prática.
- pesquisas de metodologias enfocadas em nossa realidade social.
- abordagem de tópicos matemáticos em estudo sistemático que os colegas tenham elaborado.

Apresentamos também o relatório da Secretaria do GEPEM, descrevendo nossas atividades no ano de 1977.

PALESTRAS DO PROFESSOR LUIS ALBERTO DOS SANTOS BRASIL SOBRE SUAS PESQUISAS EM DIDÁTICA DA MATEMÁTICA NA UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Resumo Feito pela Professora Maria Lucia Martins

Em dezembro de 1976, o professor Luis Alberto dos Santos Brasil esteve no GEPEM em apenas duas sessões de trabalho; apesar do exiguo tempo, questões muito interessantes foram levantadas por ele, quanto à Didática fundamentada na teoria de Jean Piaget ou método psico-genético.

Luis Alberto dos Santos Brasil tem uma vida dedicada a Matemática, principalmente, como professor da Universidade Federal do Ceará (Fortaleza).

Em 1976 foi criada por ele, nessa Universidade, no Curso de Pedagogia, a cadeira de Bases Psicológicas do Ensino da Matemática, com caráter facultativo, cuja importância e detalhes de funcionamento nos exigiriam um artigo exclusivo. A Pesquisa sobre o Emprego de Módulos no Ensino da Matemática (relativos a operações aritméticas) é um dos aspectos que está sendo desenvolvido pelos alunos desse curso.

Em 1977, durante o mês de julho, por ocasião da publicação do seu livro "Aplicação da Teoria de Piaget ao Ensino da Matemática", o professor Brasil volta ao GEPEM, agora num curso de dez horas de Didática da Matemática, sob os auspícios do GEPEM e da Editora Forense Universitária.

Principais pontos que esse curso atingiu:

1 — Questões de Matemática pré-numérica, chegando até a interessantes problemas de geometria.
2 — Iniciação à matemática numérica e introdução às operações.
3 — Fundamentação da didática na teoria da "Construção Sequencial" de Piaget.
4 — Seleção de critérios didáticos: critério psicológico (relativo ao desenvolvimento da inteligência), critério construtivo (conceitos matemáticos), critério pragmático (relativo ao dia-a-dia da criança).
5 — Enfoque ligado à realidade brasileira numa experiência original: sugestões didáticas possíveis de serem facilmente compreendidas pelo professor que tenha apenas for-

*Professor Brasil é autor de outros livros: "Estudo Dirigido de Matemática"; "Desenho no Ensino Secundário".

mação primária; meios que dispensam grandes sofisticações de material ou situações que necessitem ambientes especiais.

6 — Objetivos do emprego dos módulos.

Desenvolvendo o último tópico, professor Brasil enumerou esses objetivos:

- Ativar esquemas de assimilação.
- Ativar o uso de esquemas em cadeia.
- Construir um novo esquema.
- Consolidar esquemas recém-construidos.
- Verificar a compreensão de esquema novo.
- Introduzir nomenclatura.
- Introduzir símbolos.
- Exercitar o uso de nomenclatura e símbolos.
- Sugerir dispositivos de cálculo.
- Verificar a compreensão de dispositivo de cálculo.
- Acomodar esquema recém-construido a novas situações.
- Exercitar o uso de novos esquemas.

Reproduzimos a seguir seus "Esclarecimentos sobre os Módulos" e os "Módulos da Divisão" que escolhemos para exemplificar.

Esclarecimento Sobre os Módulos

1 — O módulo é uma tarefa para ser cumprida durante um período de 3 dias a uma semana, a critério do professor.

2 — O aluno deve ler o módulo diariamente até completar sua resolução.

3 — Tudo o que não conseguir resolver em determinado dia deve ser deixado para o dia seguinte pois, no colégio, haverá oportunidade de obter esclarecimentos sobre o que não entendeu.

4 — O aluno deve saber que aquilo que hoje lhe parece difícil, amanhã poderá estar ao seu alcance.

5 — Os objetivos do módulo são frustrados sempre que alguém "ensine" a resolvê-lo.

6 — O aluno deve ser aconselhado a não deixar para resolver o módulo apenas na véspera, ou no dia, marcado para sua entrega.

7 — O módulo deve provocar no aluno a necessidade de pensar nos assuntos tratados, procurar esclarecimentos mas nunca uma ajuda direta na sua resolução.

8 — Em nenhuma hipótese as questões do módulo serão respondidas em classe, antes de sua devolução pelo aluno.

9 — Compete aos professores e familiares:

a) Verificar se o aluno compreendeu, em seus mínimos detalhes, o enunciado do problema, sobretudo, se sabe o que se pede.

b) Convencer o aluno de que o módulo foi feito para ser resolvido apenas com os seus conhecimentos, sem ajuda do Professor ou outra qualquer pessoa, a não ser no esclarecimento da sua redação.

c) Sugerir a determinação de elementos intermediários que possam reduzir o problema a outros de resolução conhecida, quando for o caso.

DIVISÃO-MÓDULO Nº 1

1 — Tirando de um monte de 36 cartas de baralho, uma carta para cada um dos 5 parceiros (companheiros de jogo), quantas cartas ficaram no monte?
R —

2 — Quantas cartas teriam ficado, se tivéssemos dado duas cartas para cada parceiro?
Resposta:

3 — José tinha 15 bilas e deu uma para cada um de seus 4 colegas; depois deu novamente mais uma para cada e, finalmente, fez uma terceira distribuição dando ainda uma bila para cada um dos 4 colegas.

a) Com quantas bilas ficou José depois da primeira distribuição?
Resposta:

b) Com quantas bilas ficou José depois da segunda distribuição?
Resposta:

c) Finalmente, depois da terceira distribuição ainda lhe sobraram bilas? Quantas?
Resposta:

d) Quantas bilas recebeu cada um dos 4 colegas?
Resposta:

4 — A professora tinha 60 cadernos para distribuir com seus 18 alunos. Desejando que todos recebessem o mesmo número de cadernos, começou dando um caderno a cada criança e repetiu a distribuição enquanto foi possível.

a) Depois da 1ª distribuição quantos cadernos restaram?
Resposta:

b) Quantas vezes foi possível dar um caderno a cada menino?
Resposta:

c) Quantos cadernos ganhou cada menino?
Resposta:

d) Quantos cadernos restaram depois da última distribuição?
Resposta:

e) Por que não houve mais uma distribuição?
Resposta:

DIVISÃO-MÓDULO Nº 2

1– Querendo distribuir 50 lapis com 16 alunos, dando quantidades iguais para todos, quantos lapis receberá cada aluno?

Sugestão: Dê um lapis a cada um e calcule quantos restam; dê novamente um a cada um e calcule quantos restam; repita esta operação enquanto for possível.

Resposta:

2– Posso resumir da seguinte maneira a resolução do problema anterior?

Número de lapis a distribuir	50
Lápis distribuidos da 1ª vez	16
Resto depois da 1ª distribuição	34
Segunda distribuição	16
Resto depois da 2ª distribuição	18
3ª distribuição	16
Resto depois da 3ª distribuição	2

Resposta:

3– No problema anterior quantas distribuições foram feitas? R:

Por que não se fez mais uma distribuição? R:

Quantos lapis recebeu cada aluno? R:

Quantos lapis sobraram? R:

4– Divida 20 cruzeiros em 5 partes iguais para distribuir com 5 pessoas. R:

5– Dando 3 cruzeiros a cada uma das pessoas do problema anterior, quantos cruzeiros restariam? R:

6– Dividindo 13 cruzeiros com 5 pessoas haverá resto? R:

7– Dividindo 16 cruzeiros com 5 pessoas, quanto receberá cada pessoa? R:

8– Na divisão anterior haverá resto? R:

9– Tendo 20 cruzeiros para dividir com 6 pessoas, posso dar 4 cruzeiros a cada pessoa? R:

10– No problema anterior, dando 2 cruzeiros a cada pessoa, quantos cruzeiros sobrariam? R:

DIVISÃO – MÓDULO Nº 3

1 – Devendo repartir 214 cruzeiros, em partes iguais, com 65 pessoas, quanto deve receber cada uma delas? R:

2 – No problema anterior, quanto sobra depois de dar um cruzeiro a cada pessoa? R:

3 – Quantos cruzeiros restavam quando se verificou que não era mais possível dar um cruzeiro a cada pessoa? R:

4 — Ainda no problema anterior, se tivessem dado de uma vez 3 cruzeiros a cada pessoa, o que teria acontecido?

5 — Veja se concorda com o seguinte dispositivo de cálculo para dividir 407 cruzeiros com 95 pessoas:

$$
\begin{array}{r|l}
407 & 95 \\ \cline{2-2}
-95 & 1+1+1+1=4 \\
312 & \\
-95 & \\
217 & \\
-95 & \\
112 & \\
-95 & \\
27 &
\end{array}
$$

6 — No problema anterior, quantos cruzeiros teriam restado se você tivesse dado 2 cruzeiros a cada uma das 95 pessoas? R:

7 — O problema anterior poderia ter sido resolvido distribuindo duas vezes 2 cruzeiros para cada pessoa? R:

8 — José querendo distribuir 25 bilas com 6 colegas, começou dando 3 bilas a cada um. Depois desta primeira distribuição, quantas bilas sobraram? R:

9 — Complete a distribuição iniciada por José e veja quantas bilas vai receber cada colega e quantas sobrarão? R:

DIVISÃO — MÓDULO Nº 4

1 — Querendo repartir 38 bilas com 5 colegas, devo DIVIDIR 38 por 5. O número de objetos que vou dividir chama-se DIVIDENDO.
O número de pessoas com quem vou repartir os objetos chama-se DIVISOR.
O número de objetos que cada pessoa vai receber chama-se QUOCIENTE.
Neste problema: o DIVIDENDO é . . .
o DIVISOR é . . .
o QUOCIENTE é . . .

2 — Quando o dividendo é 20 e o divisor 5, qual é o quociente? R:

3 — Quando o dividendo é 34 e o divisor 6, o quociente é . . . e o RESTO é . . .

4 — O símbolo da DIVISÃO é ÷. Assim, 8 dividido por 4, escreve-se:
8 ÷ 4.

Calcule os **quocientes** e os **restos** nas seguintes divisões:

$10 \div 4$; quociente = resto =

$20 \div 5$; quociente = resto =

NOTA: Quando o resto é zero, como em $30 \div 6$, pode-se escrever $30 \div 6 = 5$.

5 — Quero repartir 38 cruzeiros com 7 pessoas. Dividindo 38 por 7, o quociente é 5 e o resto é 3.

a) Quantos cruzeiros preciso ter para dar 5 cruzeiros a cada uma das 7 pessoas? R:

b) Dando 5 cruzeiros a cada pessoa, quantos cruzeiros vão restar? R:

c) Que operação devo fazer envolvendo o quociente 5 e o divisor 7 para verificar se posso mesmo dar 5 cruzeiros a cada pessoa? R:

6 — Quando é que multiplicando o quociente pelo divisor o resultado é igual ao dividendo? R: **Quando o resto é . . .**

7 — O produto do quociente pelo divisor é menor ou igual ao Dividendo. Igual quando o resto é . . .

Menor quando . . .

UMA APLICAÇÃO DA ÁLGEBRA LINEAR À PECUÁRIA

Professores Cláudio Thomas Bornstein
Paulo Fábio Bregalda do Carmo

ROTEIRO

1. APRESENTAÇÃO E RESUMO
   1.1 O QUE É PROGRAMAÇÃO LINEAR
2. CÁLCULO DA RAÇÃO DE CUSTO MÍNIMO
   2.1 DADOS PARA A FORMULAÇÃO DA RAÇÃO
   2.2 EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA
   2.3 SOLUÇÃO ÓTIMA

1. APRESENTAÇÃO E RESUMO

O presente trabalho, em sua versão primitiva, foi o resultado de uma pesquisa, por nós realizada, na COPPE/UFRJ (COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHÁRIA) e posteriormente apresentado na 29ª reunião anual da SOCIEDADE BRASILEIRA PARA O PROGRESSO DA CIÊNCIA (SBPC) na PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO. Em sua segunda versão, para publicação no BOLETIM DO GEPEM, procuramos torná-lo menos acadêmico e apresentá-lo como uma aplicação da Álgebra Linear e de tal forma que um Professor ou aluno de 2º grau pudessem acompanhar o desenvolvimento e interfaces existentes.

O leitor atento poderá observar que a parte principal desse trabalho é o equacionamento do problema.

Dadas uma série de exigências que dizem respeito à alimentação de gado leiteiro e dada uma série de produtos que contém os componentes necessários à alimentação deste gado, deseja-se obter a composição de uma ração de tal modo que o seu custo seja minimizado e os requisitos alimentares sejam atendidos. A ração deve logicamente ser composta dos produtos dados. O problema torna-se mais complexo face a grande variação nos preços e na composição dos produtos, exigências alimentares para várias espécies de gado, o que torna obrigatório a aplicação de Análise de Sensibilidade e Programação Paramétrica. Não tocaremos, no entanto, nessa parte por que fugiria a intenção dessa publicação pois além de tornar-se longo exigiria um conhecimento de técnicas específicas no campo da Engenharia de Produção e Sistemas.

Nossa intenção é apenas a de mostrar que um problema prático, e dentro da nossa realidade Brasileira, pode ser resolvido através de uma matemática sem sofisticação.

O problema foi formulado utilizando-se um modêlo matemático de PROGRAMAÇÃO LINEAR e, devido ao número de variáveis, resolvido utilizando-se o MPS/360 (IBM). Os resultados obtidos foram muito realistas levando a utilização em grande escala de alimentos de baixo custo como: pasto, capineira, cana e $CaCO_3$.

1.1 O QUE É PROGRAMAÇÃO LINEAR

A PROGRAMAÇÃO LINEAR é uma técnica cujo objetivo é a de encontrar a melhor solução de problemas que tenham seus modelos representados por expressões lineares. A sua grande aplicabilidade e simplicidade devem-se à distribuição ótima de recursos limitados por atividades competitivas com finalidade de atingir um determinado objetivo. No seu caso mais geral, maximizar lucros ou minimizar custos. As limitações dos recursos são expressas por meio de equações ou inequações lineares, uma para cada limitação. Ao conjunto dessas limitações, equações ou inequações lineares, dá-se o nome de RESTRIÇÕES do modelo. Essas RESTRIÇÕES do modelo determinam um semi-espaço ao qual dá-se o nome de Conjunto das SOLUÇÕES VIÁVEIS. O objetivo do problema de Programação Linear é expresso por uma função linear, à qual dá-se o nome de FUNÇÃO OBJETIVO. A melhor solução do problema dá-se o nome de SOLUÇÃO ÓTIMA. No caso do nosso problema, a solução ótima, é aquela que atende a todas as restrições do modelo isto é, a todas as exigências alimentares, e é a mais econômica.

2. CÁLCULO DA RAÇÃO DE CUSTO MÍNIMO

Queremos determinar a composição de uma ração para gado de tal forma que atenda as exigências alimentares e cujo custo seja mínimo.

2.1 DADOS PARA A FORMULAÇÃO DA RAÇÃO

Pasto gordura $\leq$ 30 Kg/vaca/dia
Capineira $\leq$ 15 Kg/vaca/dia
Cana $\leq$ 5 Kg/vaca/dia

EXIGÊNCIAS

Matéria seca	:	Máximo de 14 Kg
Proteína (450 Kg)	:	Mínimo de 1,10 Kg
NDT	:	Mínimo de 5,0 Kg
CA	:	Máximo de 0,064 Kg Mínimo de 0,032 Kg
P	:	Mínimo de 0,024 Kg
Fibra*	:	Mínimo de 2,0 Kg

* Ideal colocar como sendo de 14% de Matéria Seca que terá na ração formulada (mínimo).

COMPOSIÇÃO E PREÇO DOS ALIMENTOS

Nutrientes	Pasto	Capineira	Cana	Sil. Milho	FA. Ossos	Fosfato Bicálcio	$Caco_3$
Preço (Cr$/Kg)	0,0	0,02	0,05	0,15	1,80	18,00	0,30
Mat. Seca	0,23	0,26	0,23	0,27	0,90	0,90	0,90
Proteina	0,018	0,016	0,01	0,02	0,0	0,0	0,0
NDT	0,13	0,13	0,14	0,18	0,0	0,0	0,0
Ca	0,0002	0,001	0,013	0,0010	0,30	0,23	0,38
P	0,0005	0,0007	0,0004	0,0006	0,14	0,18	0,0
Fibra	0,076	0.090	0,067	0,065	0,0	0,0	0,0

Nutrientes	MDPS	Milho	Fº Tri-go-Cota	Fº So-ja	Fº Al-godão	Melaço	Purina	Raspa Mand.	FºTrigo Varejo
Preço (Cr$/Kg	0,80	1,50	0,48	2,80	2,20	2,50	2,00	0,80	1,00
Mat. Seca	0,89	0,88	0,89	0,89	0,91	0,90	0,90	0,94	0,89
Proteina	0,078	0,085	0,15	0,40	0,28	0,038	0,22	0,028	0,15
NDT	0,69	0,80	0,63	0,73	0,63	0,826	0,68	0,80	0,63
Ca	0,0001	0,0002	0,0014	0,0032	0,0015	0,0106	0,0014	0,0009	0,0014
P	0,0025	0,0033	0,0124	0,0067	0,0110	0,0010	0,0006	0,0025	0,0124
Fibra	0,105	0,020	0,10	0,060	0,111	0,00	0,12	0,050	0,10

** Colocar nas restrições: consumo máximo de "farelo de trigo-cota": 1,5 Kg/vaca/dia.

2.2 EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA

Seja x_i (i = 1,2,3, . . ., 16) a quantidade, em Kg, do produto i na ração. Onde:

x_1 : pasto
x_2 : capineira
x_3 : cana
x_4 : silhagem de milho
x_5 : farinha de ossos
x_6 : fosfato bicálcio
x_7 : $CACO_3$
x_8 : MDPS
x_9 : milho
x_{10} : farelo de trigo-cota
x_{11} : farelo de soja
x_{12} : farelo de algodão
x_{13} : melaço
x_{14} : purina
x_{15} : raspa de mandioca
x_{16} : farelo de trigo-varejo

x_1 = pasto gordura $\leqslant 30$
x_2 = capineira $\leqslant 15$
x_3 = cana $\leqslant 5$

$$\begin{aligned}\text{Matéria Seca} = {} & 0{,}23x_1 + 0{,}26x_2 + 0{,}23x_3 + 0{,}27x_4 + 0{,}90x_5 \\ & + 0{,}90x_6 + 0{,}90x_7 + 0{,}89x_8 + 0{,}88x_9 + 0{,}89x_{10} + \\ & 0{,}89x_{11} + 0{,}91x_{12} + 0{,}90x_{13} + 0{,}90x_{14} + 094x_{15} \\ & + 0{,}89x_{16} \leqslant 14\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Proteína} = {} & 0{,}018x_1 + 0{,}016x_2 + 0{,}01x_3 + 0{,}02x_4 + 0{,}078x_8 + 0{,}085x_9 \\ & 0{,}15x_{10} + 0{,}40x_{11} + 0{,}28x_{12} + 0{,}038x_{13} + \\ & 0{,}22x_{14} + 0{,}028x_{15} + 0{,}15x_{16} \geqslant 1{,}10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{NDT} = {} & 0{,}13x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}14x_3 + 0{,}18x_4 + o{,}69x_8 + \\ & 0{,}80x_9 + 0{,}63x_{10} + 0{,}73x_{11} + 0{,}63x_{12} + 0{,}826x_{13} \\ & 0{,}68x_{14} + 0{,}80x_{15} + 0{,}63x_{16} \geqslant 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0{,}032 \leqslant \text{Ca} = {} & 0{,}0002x_1 + 0{,}001x_2 + 0{,}0013x_3 + 0{,}0010x_4 + \\ & 0{,}30x_5 + 0{,}23x_6 + 038x_7 + 0{,}0001x_8 + 0{,}0002x_9 \\ & 0{,}0014x_{10} + 0{,}0032x_{11} + 0{,}0015x_{12} + 0{,}0106x_{13} + \\ & 0{,}0014x_{14} + 0{,}0009x_{15} + 0{,}0014x_{16} \leqslant 0{,}064\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{P} = {} & 0{,}0005x_1 + 0{,}0007x_2 + 0{,}0004x_3 + 0{,}0006x_4 + \\ & 0{,}14x_5 + 0{,}18x_6 + 0{,}0025x_8 + 0{,}0033x_9 +\end{aligned}$$

$$0{,}0124x_{10} + 0{,}0067x_{11} + 0{,}011x_{12} + 0{,}0010x_{13}$$
$$0{,}0006x_{14} + 0{,}0025x_{15} + 0{,}0124x_{16} \geqslant 0{,}024$$

$$\text{Fibra} = 0{,}076x_1 + 0{,}090x_2 + 0{,}067x_3 + 0{,}065x_4 + 0{,}105x_8 + 0{,}020x_9 + 0{,}10x_{10} + 0{,}060x_{11} + 0{,}111x_{12} + 0{,}12x_{14} + 0{,}050x_{15} + 0{,}10x_{16} \geqslant 2$$

*Colocando como sendo mínimo de 14% da M.S. para a fibra:
Fibra $\geqslant$ 0,14 M.S.

$$0{,}076x_1 + 0{,}090x_2 + 0{,}067x_3 + 0{,}065x_4 + 0{,}105x_8 + 0{,}020x_9 + 0{,}10x_{10} + 0{,}060x_{11} + 0{,}111x_{12} + 0{,}12x_{14} + 0{,}050x_{15} + 0{,}10x_{16} \geqslant 0{,}14\ (0{,}23x_1 + 0{,}26x_2 + 0{,}23x_3 + 0{,}27x_4 + 0{,}90x_5 + 0{,}90x_6 + 0{,}90x_7 + 0{,}89x_8 + 0{,}88x_9 + 0{,}89x_{10} + 0{,}89x_{11} + 0{,}91x_{12} + 0{,}90x_{13} + 0{,}90x_{14} + 0{,}94x_{15} + 0{,}89x_{16}$$

**Colocando como restrição: consumo máximo de "farelo de trigo-cota": 1,5 Kg/vaca/dia.

$$x_{10} \leqslant 1{,}5$$

FUNÇÃO OBJETIVO:

$$\text{MÍNIMO DE } Z \triangleq 0{,}02x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}15x_4 + 1{,}80x_5 + 18x_6 + 0{,}30x_7 + 0{,}80x_8 + 1{,}50x_9 + 0{,}48x_{10} + 2{,}80x_{11} + 2{,}20x_{12} + 2{,}50x_{13} + 2x_{14} + 0{,}80x_{15} + 1{,}00x_{16}$$

O problema, portanto, compõe-se de 16 variáveis e 12 restri ções. Simplificando-se as restrições, o problema se reduz a:

$$\text{MÍNIMO DE } Z = 0{,}02x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}15x_4 + 1{,}80x_5 + 18x_6 + 0{,}30x_7 + 0{,}80x_8 + 1{,}50x_9 + 0{,}48x_{10} + 2{,}80x_{11} + 2{,}20x_{12} + 2{,}50x_{13} + 2x_{14} + 0{,}80x_{15} + x_{16}$$

SUJEITO A:

$$x_1 \leqslant 30$$
$$x_2 \leqslant 15$$
$$x_3 \leqslant 5$$

$$0{,}23x_1 + 0{,}26x_2 + 0{,}23x_3 + 0{,}27x_4 + 0{,}90x_5 + 0{,}90x_6 + 0{,}90x_7 + 0{,}89x_8 + 0{,}88x_9 + 0{,}89x_{10} + 0{,}89_{11} + 0{,}91x_{12} + 0{,}90x_{13} + 0{,}90x_{14} + 0{,}94x_{15} + 0{,}89x_{16} \leqslant 14$$

$$0{,}018x_1 + 0{,}016x_2 + 0{,}01x_3 + 0{,}02x_4 + 0{,}078x_8 + 0{,}085x_9 + 0{,}15x_{10} + 0{,}40x_{11} + 0{,}28x_{12} + 0{,}038x_{13} + 0{,}22x_{14} + 0{,}028x_{15} + 0{,}15x_{16} \geqslant 1{,}10$$

$$0{,}13x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}14x_3 + 0{,}18x_4 + 0{,}69x_8 + 0{,}80x_9 + 0{,}63x_{10} + 0{,}73x_{11} + 0{,}63x_{12} + 0{,}826x_{13} + 0{,}68x_{14} + 0{,}80x_{15} + 0{,}63x_{16} \geqslant 5$$

$$0{,}032 \leqslant 0{,}0002x_1 + 0{,}001x_2 + 0{,}0013x_3 + 0{,}0010x_4 + 0{,}30x_5 + 0{,}23x_6 + 0{,}38x_7 + 0{,}0001x_8 + 0{,}0002x_9 + 0{,}0014x_{10} + 0{,}0032x_{11} + 0{,}0015x_{12} + 0{,}0106x_{13} + 0{,}0014x_{14} + 0{,}0009x_{15} + 0{,}0014x_{16} \leqslant 0{,}064$$

$$0{,}0005x_1 + 0{,}0007x_2 + 0{,}0004x_3 + 0{,}0006x_4 + 0{,}14x_5 + 0{,}18x_6 + 0{,}0025x_8 + 0{,}0033x_9 + 0{,}0124x_{10} + 0{,}0067x_{11} + 0{,}0110x_{12} + 0{,}0010x_{13} + 0{,}0006x_{14} + 0{,}0025x_{15} + 0{,}0124x_{16} \geqslant 0{,}024$$

$$0{,}076x_1 + 0{,}090x_2 + 0{,}067x_3 + 0{,}065x_4 + 0{,}105x_8 + 0{,}020x_9 + 0{,}10x_{10} + 0{,}060x_{11} + 0{,}111x_{12} + 0{,}12x_{14} + 0{,}050x_{15} + 0{,}10x_{16} \geqslant 2$$

$$0{,}0438x_1 + 0{,}0536x_2 + 0{,}0348x_3 + 0{,}0272x_4 - 0{,}126x_5 - 0{,}126x_6 - 0{,}126x_7 - 0{,}0196x_8 - 0{,}1032x_9 - 0{,}0246x_{10} - 0{,}0646x_{11} - 0{,}0164x_{12} - 0{,}126x_{13} - 0{,}006x_{14} - 0{,}0816x_{15} - 0{,}0246x_{16} \geqslant 0$$

$$x_{10} \leqslant 1{,}5$$

$$x_i \geqslant 0, \ \forall \ i = 1, 2, 3, \ldots, 16$$

2.3 SOLUÇÃO ÓTIMA

Pasto: $x_1 = 30$ kg
Capineira: $x_2 = 15$ kg
Cana: $x_3 = 5$ kg
Silhagem de milho: $x_4 = 0$ kg
Farinha de Ossos: $x_5 = 0$ kg
Fosfato Bicálcio: $x_6 = 0$ kg

$CaCO_3$: $x_7 = 0{,}00521$ kg
MDPS: $x_8 = 0$ kg
Milho: $x_9 = 0$ kg
Farelo de trigo-cota: $x_{10} = 1{,}5$ kg
Farelo de Soja: $x_{11} = 0$ kg
Farelo de Algodão: $x_{12} = 0$ kg
Melaço: $x_{13} = 0$ kg
Purina: $x_{14} = 0$ kg
Raspa de Mandioca: $x_{15} = 0$ kg
Farelo de trigo-varejo: $x_{16} = 0{,}3$ kg

MIN. Z = Cr$ 1,57156 por kg

MÁXIMO DIVISOR COMUM

Professor Raymundo Nonato Tavares

PRÉ-REQUISITOS

Não se pode estudar Matemática e, em particular, a Teoria dos Números, com uma certa desenvoltura, sem dominar a técnica de demonstração por Indução Matemática, por isso, sem nos extendermos mais detalhadamente sobre tal tema, registraremos os principais resultados que utilizaremos neste trabalho.

PRINCÍPIO DA BOA ORDEM (PBO): Cada subconjunto, não vazio, de inteiros positivos possui um elemento mínimo.
Isto é: Se $S \subset Z$ e $S \neq \emptyset$, então existe um inteiro m único tal que:

(i) $m \in S$
(ii) $m \leqslant s$ para cada $s \in S$

CONSEQUÊNCIAS IMEDIATAS DA PBO

Proposição 1: Se $n \in$ e $n \neq o$, então $n \geqslant 1$

Corolário 1: Não existe nenhum inteiro entre dois inteiros concutivos

Corolário 2: Se $[m,n] \in Z$ e $m < n$, então $m + 1 \leqslant n$.

Proposição 2: Cada subconjunto, não vazio, de inteiros não negativos possui um elemento mínimo.

Outros resultados que decorrem do PBO são os dois teoremas seguintes:

PRIMEIRO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA (1º PIM)

Teorema 1: Seja P(n) uma proposição para cada inteiro não negativo n (que pode ser verdadeira ou falsa) e seja n_o um inteiro não negativo fíxo:
Se as seguintes condições sobre P(n) forem satisfeitas
(h1) A proposição $P(n_o)$ é verdadeira
(h2) Para cada inteiro $k \geqslant n_o$, $P(k + 1)$ é verdadeira se P(k) for verdadeira,
então P(n) é verdadeira para todo $n \geqslant n_o$

SEGUNDO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA (2º PIM)

Teorema 2: Seja P(n) uma proposição para cada inteiro não negativo n (que pode ser verdadeira ou falsa) e seja n_o um inteiro não negativo fixo: Se as seguintes condições sobre P(n) forem satisfeitas
(h1) A proposição $P(n_o)$ é verdadeira
(h2) Para cada inteiro $k \geqslant n_o$, P (k) é verdadeira se

$P(j)$ é verdadeira para todo j tal que $n_o \leqslant j \angle k$, então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geqslant n_o$

Observação: Note que, nos teoremas precedentes, n_o pode ser 0 ou 1 ou um inteiro qualquer maior que 1.

Recordemos agora a seguinte definição,

Definição: Dados dois números inteiros a, b, com $b \neq o$, diz-se que b divide a (e indica-se isto por $b|a$) se, e somente se, existe $c \in Z$ tal que $bc = a$.
Simbolicamente: $b|a \Longleftrightarrow (bc = a \text{ para algum } c \in Z)$

Exemplos:

$2|8$	pois	$2 \times 4 = 8$
$3|(-12)$	"	$3\,(-4) = -12$
$-5|35$	"	$-5(-7) = 35$

Se $b|a$, então o inteiro c tal que $bc = a$ chama-se o quociente de a por b.
O quociente exato c da divisão de a por b é freqüentemente, indicado por $\frac{a}{b}$ I isto é:

$$\boxed{bc = a \qquad c = \frac{a}{b}}$$

Escreve-se bta se b não divide a. Isto é, se para todo $n \in Z$, $bn \neq a$.
No que se segue, faremos apelo com freqüência, ao Corolário do seguinte teorema

Teorema: Se $b|a$ e $a \neq o$, então $|b| \leqslant |a|$

Prova: $b|a$ e $a \neq o \Longrightarrow |bc| = a$ para algum $c \in Z^*$
$\Longrightarrow |bc| = |a|$
$\Longrightarrow |b|\ |c| = |a|$
$\Longrightarrow |b| \leqslant |a|$ (pois$|1 \leqslant |c|$)

Corolário: Se a e b são inteiro positivos e $a|b$ e $b|a$, então $a = b$.

Prova: Pelo Teorema anterior temos; $|a| \leqslant |b\backslash$ e $|b| \leqslant |a\backslash$
Visto que a e b são positivos, temos $|a| = a$ e $|b| = b$. Dai $a \leqslant b \leqslant a$ e assim $a = b$.

MÁXIMO DIVISOR COMUM (MDC)

A) O MDC DE DOIS INTEIROS

Definição 1: Um inteiro c é divisor comum dos inteiros $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ se, e somente se $c|a_1, c|a_2, \ldots c|a_n$.

Definição 2: Dados dois inteiros a e b não simultaneamente nulos, diz-se que o máximo divisor comum de a e b é o inteiro positivo d tal que

(i) $d|a$ e $d|b$

(ii) Se $c|a$ e $c|b$, então $c|d$.

Teorema: m. d. c. (a,b) é o menor número inteiro positivo que pode ser escrito como uma combinação linear, com coeficiente em **Z**, dos inteiros a e b

Prova: Seja $S = \{s \in \mathbf{Z} | s = ax + by; \quad \in \mathbf{Z} \text{ e } y \in \mathbf{Z}\}$

I) Mostremos que $S \neq \emptyset$

De fato, $a = a.\,1 + b.o$ e b e $b = a.\,o + b.\,1$

Logo $S \neq \emptyset$ porque $a \in S$ e $b \in S$

II) Mostremos que S possui pelo menos um elemento positivo

De fato, $-a = a(-1) + b.o \Rightarrow -a \in S$

$-b = a.o + b(-1) \Rightarrow -b \in S$

Assim possui pelo menos um elemento positivo, já que a e b não sendo simultaneamente nulos, um dos números a, $-a$, b, $-b$ é positivo.

III) Seja $S^*_* = \{s \in S \mid s > o\}$. Então o PBO assegura-nos que S^*_* possui um elemento mínimo positivo. Isto é, existe $d \in S^*_*$ tal que $d \leqslant S$ para todo $s \in S^*_*$ Por conseguinte existem α, β, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{Z}$ tais que $d = a\alpha + b\beta$.

(Observe que sendo $S^*_* \subset s$, cada elemento de S^*_* é da forma $ax + by$)

IV) Provemos que d é o m.d.c (a,b). Para isto é suficiente mostrar que as condições (i) e (ii) da definição de m.d.c., se verificam. A condição (ii) é trivial.

De fato, $(c|a \text{ e } c|b) \Rightarrow c \mid (a\alpha + b\beta)$

$\Rightarrow c \mid d \; (d = a\alpha + b\beta)$

Resta mostrar que a condição (i) também se verifica Isto é, devemos mostrar que $d|a$ e $d|b$.

Se provamos que d divide qualquer elemento de S teremos provado (i) pois $a \in S$ e $b \in S$.

Seja $s \in S$. Então existem inteiros , j tais que $s = a\,x + by$.

Dividindo-se s por d obtemos

$s = dq + r$ com $o \leqslant r$ e d

De $s = dq + r$, vem:

$r = s - dq$

$= a(x - \alpha q) + b(y - \beta q)$; $x - \alpha q$, $y - \beta y \in \mathbf{Z}$,

e assim $r \in s$. Como $o \leqslant r \angle d$ e d é o menor elemento positivo de S (pois $d \in S^*_* \subset S$), r não pode ser positivo. Logo $r = o$ e dai $d|s$. Isto é d divide qualquer elemento de S

Por conseguinte $d|a$ e $d|b$ pois a e b pertencem a S.

O máximo divisor comum de dois inteiros a e b é indicado por uma das notações seguintes: m.d.c(a,b), D(a,b), (a,b)

Observação: Resultam da definição de máximo divisor comum e do Teorema precedente as seguintes consequências imediatas.

1ª) O m.d.c. (a,b) = m.d.c. (b,a)

2ª) Se $d=$ m.d.c (a,b), entao existem **inteiros** α e β tais que $d = a\alpha + b\beta$

3ª) Se $a|b$, então o m.d.c. $(a,b) = |a|$. Em particular o m.d.c. $(a,o) = |a|$

4ª) Se $d =$ m.d.c. (a,b) então m.d.c $(-a,b)$ = m.d.c $(a,-b)$ = m.d.c $(-a,-b) = d$

B) ALGORITMO DE EUCLIDES

Antes de apresentarmos um processo de obtenção sistemática do máximo divisor comum de dois inteiros, mostremos o seguinte lema.

LEMA: Sejam a e b dois inteiros, $b \neq o$. Se r é o resto da divisão de a por b, emtão m.d.c (a,b) = m.d.c (b,r)

PROVA: Seja d = m.d.c (a,b) e d = m.d.c (b,r). Devemos mostrar que $d = d'$

De fato, dividindo-se a por b obtermos
$a = bq + r$ com $o \leqslant r < |b|$

Agora, d = m.d.c (a,b) $\Rightarrow (d|a \text{ e } d|b)$
$\Rightarrow (d|a \text{ e } d|bq)$
$\Rightarrow d|r \ \ (r = a - bq)$

Mas $(d|b$ e $d|r)$ $\Rightarrow d|\text{m.d.c } (b,r)$
$\Rightarrow d|d' \ \ (d' = \text{m.d.c } (b,r)$

Também d' = m.d.c (b,r) $\Rightarrow (d'|b \text{ e } d|r)$
$\Rightarrow (d'|bq \text{ e } d'|r)$
$\Rightarrow (d'|a \ \ (a = bq + r)$

Mas $(d'|a$ e $d'|b)$ $\Rightarrow d'|\text{m.d.c } (a,b)$
$\Rightarrow d'|d \ \ (d = \text{m.d.c } (a,b))$

Visto que d e d' são positivos, segue-se que $(d|d' \text{ e } d'|d) \Rightarrow d = d'$

Isto é o m.d.c (a,b) = m.d.c (b,r)

Para calcularmos m.d,c (a,b) procedemos como se segue. Efetuamos a sequência de divisões indicadas abaixo

$$a = bq + r_1 \quad ; \quad o < r_1 < b$$
$$b = r_1 q, + r_2 \quad ; \quad o < r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3 \quad ; \quad o < r_3 < r_2$$

— — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — —

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n \qquad ; \; o \; r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_n q_n \qquad ; \; o = r_{n+1}$$

Como $r_1 > r_2 > \cdot \cdot \cdot > r_n > o$ é claro que depois de aplicarmos o algorítmo da divisão um número finito de vezes obteremos um resto nulo. O último resto não nulo r_n é o m.d.c (a,b).

De fato, pelo lema anterior temos:

m.d.c(a,b) = m.d.c(r_1 r_2) $\triangleq \cdot \cdot \cdot$ = m.d.c($r_n - 1$), r_n)
Mas sendo $r_n > o$ e r_n dividindo r_{n-1} (pois $r_n - 1 \triangleq r_n q_n$)
Segue-se que r_n = m.d.c($r_n - 1$), r_n)
Como m.d.c($r_n - 1$, r_n) = m.d.c(a,b) vem finalmente, que
r_n = m.d.c(a,b)

Na prática dispomos os cálculos como se segue

	q	q_1	q_2		q_{n-2}	q_{n-1}	q_n
a	b	r_1	r_2	$\cdot \cdot \cdot \cdot r_{n-3}$	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n = m.d.c(a,b)
r_1	r_2	r_3		rn– 1	r_n	o	

Tal disposição de cálculos é algorítmo de Euclides

C) PROPRIEDADES DO MDC DE DOIS NÚMEROS INTEIROS

Definição 1: Os números inteiros, não nulos, a e b denominam-se primos entre si (ou primos relativos) se, e somente se m.d.c (a,b) = 1

Definição 2: Um inteiro $p > 1$ ou $p < 1$, denomina-se **primo** se, e somente se, os únicos divisores de p são os inteiros ± 1 e $\pm p$

Proposição 1: Sejam a e b inteiros, não nulos então m.d.c(a,b) = 1 se, e somente se, existem inteiros α e β tais que $a\alpha + b\beta = 1$

Prova

m.d.c(a,b) = 1 $\implies a\alpha + b\beta = 1$
Se o m.d.c(a,b) = 1, então pelo teorema 1, precedente, existem inteiros α e β tais que $a\alpha + b\beta = 1$
$a\alpha + b\beta = 1 \implies$ m.d.c(a,b) = 1

Suponhamos que existam inteiros α e β tais que $a + b\beta = 1$ e seja $d = m.d.c(a,b)$. Devemos mostrar que $d = 1$

Temos que

$$
\begin{aligned}
d = m.d.c(a,b) &\Longrightarrow (d|a \text{ e } d|b) \\
&\Longrightarrow d|(a\alpha + b\beta);\ \alpha, \beta \in \mathbf{Z} \\
&\Longrightarrow d|1 \quad (\text{pois } a \ + b\beta = 1) \\
&\Longrightarrow d = 1 \quad (\text{pois } d \text{ é positivo e o número divisor positivo de 1 é 1})
\end{aligned}
$$

Corolário 1: Sejam a e b inteiros Se $m.d.c(a,b) = 1$ e se $á|a$, então o $m.d.c(á,b) = 1$

Em palavras: se dois números são primos entre si, todo divisor de um deles é primo com o outro.

Prova:

$$
\begin{aligned}
m.d.c(a,b) = 1 &\Longrightarrow a\alpha + b\beta = 1, \quad \alpha,\beta \in \mathbf{Z} \ (1) \\
a'|a &\Longrightarrow a = a'q\ ;\ q \in \mathbf{Z} \ (2)
\end{aligned}
$$

De (1) e (2) vem:

$$a'(q\alpha) + b\beta = 1, \quad q\alpha, \beta \ c\mathbf{Z} \Longrightarrow m.d.c(a,b) = 1$$

Corolário 2: Sejam a e b inteiros. Se o $m.d.c(a,b) = 1$ e se $a'|a$ e $b'|b$, então e $m.d.c(a',b') = 1$

Em palavras: Se dois números são primos entre si, cada divisor de um deles é primo com qualquer divisor de outro.

Prova:

$$
\begin{aligned}
a'|a &\Longleftrightarrow a = a'r \ (1) \ r \in \mathbf{Z} \\
b'|b &\Longleftrightarrow b = b's \ (2) \ s \in \mathbf{Z}
\end{aligned}
$$

$$m.d.c(a,b) = 1 \Longleftrightarrow a\alpha + b\beta = 1; \quad \alpha,\beta \in \mathbf{Z} \ (3)$$

De (1), (2) e (3) vem

$$
\begin{aligned}
a\alpha + b\beta = 1 &\Longrightarrow a'(r\alpha) + b'(s\beta) = 1;\ r\alpha, s\beta \in \mathbf{Z} \\
&\Longrightarrow m.d.c(a', b') = 1
\end{aligned}
$$

Proposição 2: Um número inteiro $d > o$ é o $m.d.c(a,b)$ se, e somente se, os quocientes respectivos de a e b por d são primos entre si.

Prova:

Sejam a' e b' definidos pelas igualdades $a = d\,a'$, $b = d\,b'$ e seja $m.d.c(a',b') = s$. Devemos provar que $d = m.d.c(a,b)$.

Visto que m.d.c $(a',b') = 1$, existem inteiros α e β tais que $1 = a'\alpha + b'\beta$

Mas $1 = a'\alpha + b'\beta \Longrightarrow d = da'\alpha + db'\beta$

$\Longrightarrow d = a\alpha + b\beta$

Para provar que $d = a\alpha + b\beta$ é o m.d.c (a,b) devemos mostrar que as condições (i) e (ii) da definição de m.d.c, se verificam.

De fato, $a = da' \Longleftrightarrow d|a$

$b = db' \Longleftrightarrow d|b$

Por conseguinte a condição (i) é satisfeita.

Seja c tal que $c|a$ e $c|b$. Temos que

$(c|a$ e $c|b \Longrightarrow c|\ (a\alpha + b\beta)$

$\Longrightarrow c|d\ (d = a\alpha + b\beta)$

Por tanto a condição (ii) também se verifica.

Logo d = m.d.c (a,b)

Seja d = m.d.c (a b). Se $a' = \frac{a}{d}$ e $b' = \frac{b}{d}$,então o m.d.c $(a', b') = 1$, e a' e b' pertencem a Z

Visto que d = m.d.c (a,b), então existem inteiros α e β tais que $d = a\alpha + b\beta$

Mas $d = a\alpha + b\beta \Rightarrow 1 = \frac{a}{b} + \frac{b}{d}\beta$

$\Rightarrow 1 = a'\alpha + b'\beta$

$\Rightarrow 1 =$ m.d.c (a', b') (pela prop 1)

Proposição 3: Multiplicando-se dois números inteiros, não nulos; por um número inteiro positivo, seu m.d.c fica multiplicado por esse número.

Prova: Sejam a,b elementos de Z^* b $\in Z^*_+$ e d = m.d.c (a,b). Então m.d.c (ra, rb) = b.d,

É claro que $rd|ra$ e $rd|rb$. Isto é a condição (i) da definição de m.d.c, se verifica.

Resta mostrar que a condição (ii) também se verifica. Isto é, todo divisor dos números ra e rb também é divisor de rd.

Mas $c|ra \Rightarrow ra = ca'; a' \in Z$

$c|rb \Rightarrow rb = cb'; b' \in Z$

Por outro lado, visto que d = m.d.c (a,b), existem inteiros α e β tais que $d = a\alpha + b\beta$

Mas: $d = a\alpha + b\beta \Longrightarrow rd = ra\alpha + rb\beta$

$rd = ca'\alpha + cb'\beta$

$rd = c(a'\alpha + b'\beta)$

$c|rd$

Por conseguinte a condição (ii) também se verifica

Logo o m.d.c (ra, rb) = rd = r. m.d.c (a,b)

Proposição 4: Se dois inteiros não nulos a e b admitem um divisor comum $r > 1$, então dividindo-se a e b por r m.d.c (a,b) fica dividido por r.

Prova: Seja d = m.d.c (a,b)

d = m.d.c (a,b) $\Longrightarrow d = a\alpha + b\beta\,;\ \{\alpha,\beta\} \subset \mathbf{Z}$

$\Longrightarrow \frac{d}{r} = \frac{a}{r}\alpha + \frac{b}{r}\beta\,;\{\alpha,\beta\} \subset \mathbf{Z}$

Para provar que $\frac{d}{r}$ é o m.d.c$(\frac{a}{r},\frac{b}{r})$ devemos mostrar que as condições (i) e (ii) da definição de m.d.c se verificam. (i) De fato, ponhamos $a = ra'$, $b = rb'$ e $d = rd'$

$d|a \Longrightarrow rd'|ra'$

$\Longrightarrow d'|a'$

$\Longrightarrow \frac{d}{r}\Big|\frac{a}{r}$

Analogamente

$d|b \Longrightarrow \frac{d}{r}\Big|\frac{b}{r}$

(ii) Se $c|\frac{a}{r}$ e $c|\frac{b}{r}$, então $c|\ (\frac{a}{r}\alpha + \frac{b}{r}\beta)$ e isto acarreta que $c|\frac{d}{r}$ (pois $d = \frac{a}{r}\alpha + \frac{b}{r}\beta$)

Logo m.d.c $(\frac{a}{r},\frac{b}{r}) = \frac{d}{r}$

RELATÓRIO DA SECRETARIA DO GEPEM RELATIVO AO ANO DE 1977

Cumprindo as determinações estatutárias vimos apresentar o relatório do GEPEM relativo ao ano de 1977.

1. **Assuntos gerais:**

   1.1 **Mudança da Diretoria:** em 2 de março, continuando em 8 de março, houve uma Assembléia Geral extraordinária para substituição de elementos da Diretoria. Foram substituidos:
   Secretário Geral: José Guilherme Barbosa por Franca Cohen Gottlieb.
   Secretária: Sonia Kritz por Celena Maria Ferreira Cesar.
   1º Tesoureiro: Eduardo Ouadra por Judy Galper.
   Em 30 de maio houve uma reunião de Diretoria na qual a 1ª Tesoureira Judy Galper comunicou que, por motivos pessoais, via-se obrigada a deixar o cargo. Em virtude do § 1 do Art. 15 do Estatuto do Gepem, a renúncia da Prof. Judy foi aceita e eleito como 1º tesoureiro o Prof. Wilson Belmonte dos Santos.

   1.2 **Isenção do Imposto de Renda e Alvará.**
   Na reunião de Diretoria de 22 de março foi comunicado por Maria Laura que foi obtida a isenção do pagamento do imposto de renda pelo GEPEM.
   Ao mesmo tempo foi comunicado o pagamento do Alvará para 1977.

   1.3 **Aumento do Aluguel da sala.**
   Na reunião da Diretoria de 16 de agosto tomou-se conhecimento da proposta pelas irmãs do Colégio S. Rosa de Lima de aumento do aluguel na base de 3 salários mínimos. Os Profs. Mello e Souza e Wilson Belmonte foram encarregados de parlamentar com as irmãs a fim de reduzir o aumento, o que foi conseguido, ficando assim o aluguel em Cr$ 1.500,00.

   1.4 **Tipos de cursos do GEPEM.**
   Na reunião de Diretoria de 22 de março ficou resolvido que haverá três tipos de cursos:
   a) **Curso promovido pelo GEPEM:** paga-se uma quantia pré-estabelecida ao professor convidado e o GEPEM arca com o lucro, ou prejuízo e paga o material.
   b) **Curso patrocinado pelo GEPEM:** uma entidade procura o GEPEM e este designa o professor que dará o curso para a entidade. O professor é pago pela entidade e dá ao GEPEM 30% do recebido após os devidos descontos. As despesas ficam por conta da entidade.
   c) **Outros tipos:** serão examinados quando aparecerem.

2. **Atividades do GEPEM em 1977.**

2.1 **Cursos e Conferências:**

2.1.1 **De visitantes para sócios e convidados do GEPEM.**

Em 24 de maio às 20 h. na sede do GEPEM. Conferência do Prof. George Springer da Universidade de Indiana (Bloomington U.S.A.) sob o título: "Resolução de Problemas para crianças de 11 a 12 anos".

– de 4 a 8 de julho ás 20 h. na sede do GEPEM, Curso do Prof. Luiz Alberto Brasil (da Universidade Federal do Ceará – Fortaleza – Ce) sob os auspícios do GEPEM e da Editora Forense Universitária – Título do Curso: "Aplicações da Teoria de Piaget ao Ensino da Matemática".

– 28, 29 e 30 de setembro, na sede do GEPEM, série de 4 conferências pelo Prof. Leônidas Hegenberg do Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA. S. José dos Campos S.P.) sobre os assuntos:

"Ensino da Lógica"
"Linguagem"
"Formalização do Estudo da Neurose"
"Método Científico"

2.1.2 **De sócios para entidades.**

– 2 Cursos patrocinados pelo GEPEM para a PETROBRÁS:

a) Nivelamento em Matemática para o TETRAMA (Técnicos em Transportes marítimos) – 120 horas-aula.
5 segmentos ministrados por:
Anna Averbuch e Franca Cohen Gottlieb
José Carlos Mello e Souza
Wilson Belmonte dos Santos
Estela Kaufman Fainguelernt
Maria Laura Mousinho Leite Lopes.
Os professores prepararam 13 módulos que foram usados no curso.

b) "Lógica" para CANAL (Analistas de Processamento de Dados). 48 horas-aula, ministrado por Noelir de Carvalho Bordinhão que preparou 7 módulos que foram usados no curso.

– Curso da Prof. Leila Alcure para professores do 1º grau no Colégio S. Antônio Maria Zaccarias.

– Curso do professor José Guilherme Barbosa para professores do 1º grau, iniciado no GEPEM e transferido para o Colégio Eden.

– Curso das professoras Anna Averbuch e Maria Laura Mouzinho Leite Lopes para pais no Colégio Santa Úrsula.

2.2 Publicações.

2.2.1 **Boletins** – Já foram publicados e distribuídos os Boletins nº 1 (dezembro 1976)
nº 2 (abril 1977).
Está no prelo o Boletim nº 3 (agosto 1977).
Está em preparação o Boletim nº 4 (dezembro de 1977.

2.2.2 **Livros para o Município do Rio de Janeiro.**
A Secretaria de Educação do município do Pio de Janeiro assinou um contrato com o Prof. José Carlos Mello e Souza para escrever 5 volumes de "Guias para Professores de Matemática de 5ª a 8ª séries do 1º grau".
O trabalho ficou dividido entre as professoras Moema de Sá Carvalho, José Carlos de Mello e Souza, Maria Laura Moüzinho Leite Lopes, e conta com a consultoria das Professoras Anna Averbuch e Franca Cohen Gottlieb. Os dois primeiros volumes já foram entregues e os 3 restantes estão em fase final de redação.

2.3 Seminários.
O GEPEM foi contactado pela Bloch Educação para organizar, sob os auspícios do Conselho Estadual de Educação, um Seminário Nacional em Educação Matemática. A data prevista é de 17 a 21 de julho de 1978 e os trabalhos de organização, a cargo do GEPEM e Bloch, estão em andamento.

2.4 Imprensa.
O Jornal do Brasil procurou o GEPEM para dar duas notícias a serem publicadas no Jornal do Professor.

a) Entrevista sobre o livro didático com o repórter João Baptista e os professores Anna Averbuch, Moema de Sá Carvalho, José Guilherme Barbosa, Leila Alcure, Franca Cohen Gottlieb.
b) Artigo da Prof. Maria Laura Mouzinho Leite Lopes sobre "As idéias de Aproximação, Linearidade e Probabilidade e o Ensino da Matemática".