

---

## Tarefas de geometria dinâmica com objetos de aprendizagem para a exploração e a investigação de conceitos geométricos

---

**Rafael Enrique Gutiérrez Araujo**

Mestrando, UFABC

rafael.gutierrez0593@gmail.com

**Vinícius Pazuch**

Professor, UFABC

vinicius.pazuch@ufabc.edu.br

### Resumo

Tarefas de geometria dinâmica têm um papel fundamental no ensino e aprendizagem de matemática, pois podem ampliar as possibilidades de abordagem dos conceitos geométricos estudados na Educação Básica. Assim, o objetivo deste artigo foi o de apresentar e caracterizar tarefas de geometria dinâmica que envolvem o uso de Objetos de Aprendizagem (OA) para a exploração e a investigação de conceitos geométricos. As tarefas foram elaboradas considerando os princípios metodológicos teorizados por Powell e Alqahtani (2015) e Powell e Pazuch (2016) para um trabalho investigativo usando *Softwares* de Geometria Dinâmica (SGD). A primeira tarefa foi desenvolvida para abordar as propriedades geométricas dos quadriláteros, enquanto a segunda permite o trabalho com as transformações geométricas presentes na animação do OA, o qual foi elaborado com o *software* GeoGebra. Os resultados mostram que essas tarefas podem contribuir para a prática do professor que ensina geometria e deseja integrar tecnologias digitais a seu trabalho em sala de aula.

**Palavras-chave:** Ensino de geometria. Anos Finais do Ensino Fundamental. *Software* GeoGebra.

---

## Dynamic Geometry Tasks with Learning Objects for the Exploration and Investigation of Geometric Concepts

---

### Abstract

Dynamic geometry tasks play a fundamental role in the teaching and learning of mathematics, since they can increase the range of possibilities for approaching geometric concepts studied in Middle School and High School. This article introduces and characterizes dynamic geometry tasks about the use of Learning Objects (LO) for the exploration and investigation of geometric concepts. Tasks were developed considering the methodological principles theorized by Powell and Alqahtani (2015) and Powell and Pazuch (2016) for investigative work using Dynamic Geometry Software (DGS). The first task was designed to address the geometric properties of quadrilaterals, while the second one addressed geometric transformations present in the LO animation, developed using the

GeoGebra software. The results show that these tasks can contribute to the teacher's geometry practice who wishes to use digital technologies in the classroom.

**Keywords:** Geometry Teaching. Middle School. GeoGebra Software.

## **Introdução e justificativas**

Tarefas de geometria dinâmica são fundamentais para o ensino e a aprendizagem de conceitos geométricos na Educação Básica. Gutiérrez e Pazuch (2018) argumentam que as construções geométricas com *Softwares* de Geometria Dinâmica (SGD) têm papel essencial na exploração e na validação de propriedades.

Nesse contexto, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) salienta a importância da integração de tarefas baseada no uso de tecnologias digitais (BRASIL, 2017). Mais especificamente, a BNCC descreve que “[...] devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas [...]” (BRASIL, 2017, p. 270). Portanto, pontua-se que tais tarefas têm um papel norteador na construção de conceitos geométricos a serem ensinados na Educação Básica.

Entende-se que os SGD podem ampliar as possibilidades de ensino e de aprendizagem de conceitos geométricos por conta das características inerentes à movimentação, à visualização e à construção desses *softwares*. De acordo com a BNCC “[...] esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos” (BRASIL, 2017, p. 296).

Este artigo analisa a hipótese de que as tarefas de geometria dinâmica podem ampliar a abordagem dada a conceitos geométricos estudados na Educação Básica. O objetivo principal foi *apresentar e caracterizar tarefas de geometria dinâmica que envolvem o uso de objetos de aprendizagem (OA) para a exploração e a investigação de conceitos geométricos*.

Para atingir esse objetivo, foram elaboradas tarefas exploratórias e investigativas (YEO, 2007) de geometria dinâmica com base em princípios metodológicos particulares (POWELL; ALQAHTANI, 2015; POWELL; PAZUCH, 2016; TROCKI; HOLLEBRANDS, 2018). A seguir são apresentadas as noções teóricas utilizadas. Após são detalhadas a construção e a apresentação das tarefas de geometria dinâmica. Por fim, nas considerações finais, discutem-se possíveis reflexões para a prática do professor que deseja integrar tarefas de geometria dinâmica a sua prática pedagógica.

## Tarefas de geometria dinâmica: literatura relacionada

Tomando como referência o contexto de sala de aula, entende-se *tarefa* como um produto elaborado pelo professor com a intenção de mobilizar conhecimentos dos estudantes. Em particular, Ponte (2014) define tarefa como exercício, problema, exploração e investigação.

No contexto de tarefas matemáticas, busca-se estabelecer relações entre exercício, problema e investigação. Para Yeo (2007), um indivíduo considera uma tarefa um problema com base em sua experiência pessoal e profissional. Yeo (2007) discute os conceitos de exercício e de problema. As tarefas na perspectiva do exercício sugerem tarefas processuais, pois envolvem a prática de procedimentos conhecidos dos estudantes. Tarefas com problemas englobam *tarefas de solução de problemas*, uma vez que requerem a utilização de estratégias de solução de problemas pelos estudantes. O autor esclarece que um problema refere-se a uma situação que é problemática para uma pessoa. Em sala de aula, essa situação geralmente envolve determinada tarefa, enquanto a resolução de problemas refere-se ao processo de busca racional por uma resposta ao problema proposto (YEO, 2007).

Segundo Yeo (2007) há pelo menos três diferenças entre as investigações e as tarefas de resolução de problemas:

1. Tarefas investigativas têm objetivos mais abertos do que as tarefas de resolução de problemas;
2. Tarefas investigativas conduzem a uma investigação que se apresenta como atividade divergente, na qual os estudantes podem definir metas diferentes a serem seguidas, ao passo que as tarefas de resolução de problemas levam a uma resolução que se apresenta como atividade convergente;
3. Tarefas investigativas envolvem a proposição de problemas por parte dos estudantes e a resolução de problemas, enquanto as tarefas de resolução de problemas envolvem principalmente a busca racional por uma resposta para o problema proposto.

A partir disso, tarefas de natureza investigativa e exploratória consideram algumas ideias fundamentais: (1) *a formulação de questões e a exploração* – ênfase na formulação de questões referentes a uma situação problemática e na exploração desta; (2) *conjecturas* – produção de conjecturas; (3) *testes e reformulação* – refinamento das conjecturas; e (4) *justificação e avaliação* – processos de argumentação e validação dos raciocínios matemáticos constituídos pelos professores e estudantes (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2013).

Considerando o viés da exploração e da investigação, neste artigo são avaliadas tarefas de geometria dinâmica. Powell e Alqahtani (2015) e Powell e Pazuch (2016) teorizam princípios metodológicos que as tarefas de geometria dinâmica precisam contemplar:

1. *Construção*: fornecer a construção de uma figura, instruções para a sua construção ou convite para a construção de uma figura com características específicas.
2. *Interação*: convidar os usuários a arrastar os pontos bases da figura e discutir o que percebem sobre o comportamento, as relações entre objetos e as relações entre relações da figura.
3. *Significado matemático*: convidar os usuários a discutir os significados matemáticos de suas próprias percepções sobre o comportamento da figura.
4. *Questionamento*: convidar os usuários a propor questões sobre o que percebem, os sentidos que geram matematicamente e as consequências desses processos.
5. *Engajamento*: fornecer pistas que sugerem aspectos relacionados à tarefa para manter o envolvimento dos usuários no sentido de discutirem ou explicitarem afirmações para revelar o que percebem, entendem ou questionam matematicamente acerca do comportamento da figura, apontando os desafios que aprofundam os conhecimentos matemáticos envolvidos na tarefa.
6. *Linguagem matemática*: fornecer a linguagem matemática formal.
7. *Feedback*: convidar os usuários a revisar algum conteúdo, generalizar uma relação, justificar uma conjectura, propor novos desafios ou formular uma pergunta no formato *O que acontece se?*

Ao desenvolverem tarefas com *softwares* de geometria dinâmica, Trocki e Hollebrands (2018) adotam a noção de *prompt*. Um *prompt* é definido como questões norteadoras relacionadas a uma construção prévia. Essas questões requerem uma resposta de natureza verbal ou escrita. Por exemplo, as questões norteadoras podem exigir uma ação tecnológica na forma de um desenho, construção, medição ou manipulação de uma construção prévia (TROCKI; HOLLEBRANDS, 2018). A próxima seção apresenta aspectos teóricos dos OA constitutivos das tarefas de geometria dinâmica discutidas neste artigo.

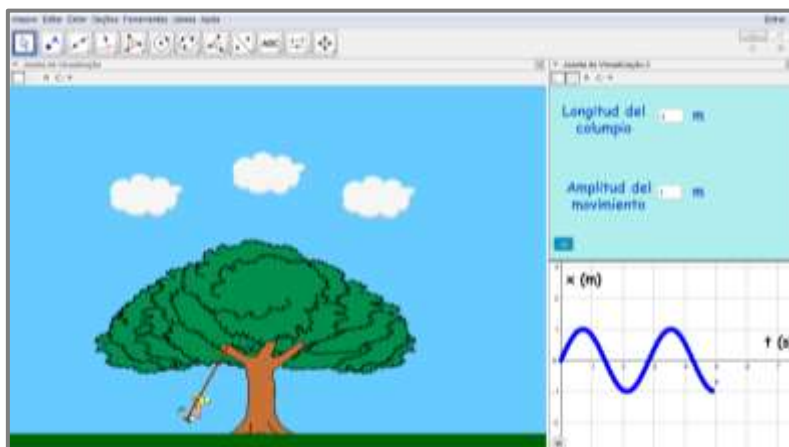
## **Objetos de aprendizagem: aspectos teóricos**

A literatura especializada traz diferentes definições de OA. Uma dessas definições descreve OA como recursos virtuais disponíveis ao professor com o intuito de contribuir com a aprendizagem de seus alunos (KOPER, 2003). Outra definição, mais específica, considera OA como qualquer material digital que ofereça informações para a construção de conhecimento, estejam essas informações em forma de uma imagem, página HTML, animação ou simulação (SANTOS, 2007).

Neste artigo, assume-se que o OA utilizado é um recurso virtual possível de ser usado e reutilizado em apoio à aprendizagem por meio de atividade interativa na forma de simulações ou animações (KALINKE et al., 2015).

Por um lado, uma *simulação* pode ser entendida como a ação de utilizar um simulador, isto é, um modelo computacional, seja de uma situação real ou hipotética, seja de um fenômeno natural. Portanto, uma simulação permite ao usuário explorar as implicações de manipular os parâmetros dentro desse modelo computacional (CLARK et al., 2009). A Figura 1 ilustra um simulador elaborado com o *software* GeoGebra para estudar o movimento harmônico simples da Física. O *software* permite manipular e modificar alguns parâmetros relacionados a esse fenômeno natural.

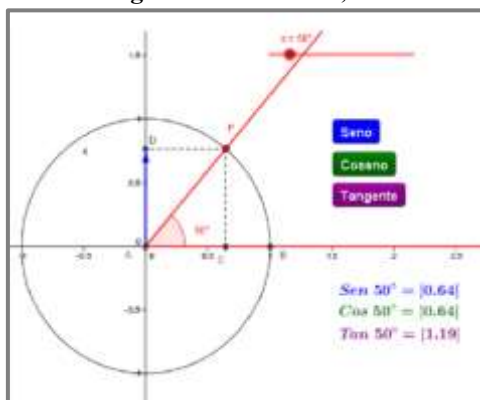
**Figura 1 – Simulador do movimento harmônico simples elaborado com o GeoGebra**



Fonte: Gutiérrez e Hernández (2016, p.227).

Por outro lado, uma *animação* é um tipo de visualização dinâmica que se desenvolve em velocidade constante. É essa velocidade que diferencia uma animação de uma simulação, pois não permite ao usuário realizar uma interação em termos de manipulação ou modificação de parâmetros (PLASS; HOMER; HAYWARD, 2009). A Figura 2 ilustra uma animação elaborada com o *software* GeoGebra para estudar os sinais das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

**Figura 2 – Animação das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente com o GeoGebra**



Fonte: Adaptada de Urdaneta, González e Castillo<sup>1</sup> (2017, p.84).

<sup>1</sup> Recurso construído em Língua Espanhola.

Independentemente de serem animação ou simulação, os OA são caracterizados em função da possibilidade de gerar determinada expectativa de aprendizagem dos estudantes no tempo de duração de uma ou duas aulas (KALINKE et al., 2015). Além disso, os OA permitem aos estudantes explorarem e investigarem os conteúdos, estabelecendo as conexões entre as diferentes formas de representação do mesmo objeto matemático (GALLO; PINTO, 2010; KALINKE et al., 2015). A próxima seção apresenta o OA na forma de uma *animação* utilizada para a elaboração de tarefas de geometria dinâmica.

## O Objeto de Aprendizagem

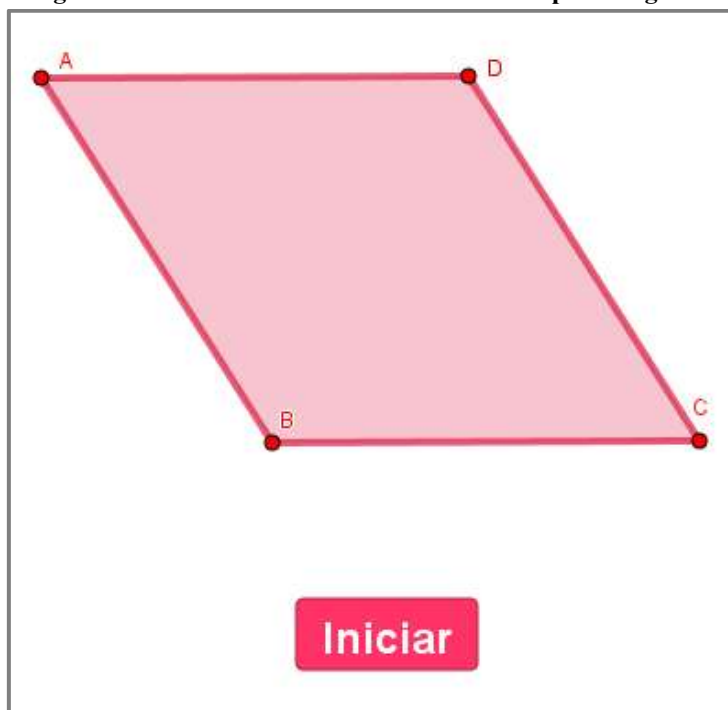
As tarefas apresentadas neste artigo inserem-se em um contexto de formação de professores sobre o uso de tecnologias digitais para o ensino da geometria, em particular sobre a utilização de OA como recursos que possibilitam o início do trabalho com tarefas de natureza exploratória e investigativa em ambientes de geometria dinâmica. As tarefas envolvem o uso de OA; logo, é necessário que os professores se familiarizem com esses recursos tecnológicos antes de realizarem a resolução e a discussão dessas tarefas.

Esse momento de familiarização representa uma oportunidade para apresentar aos professores os OA elaborados com o *software* GeoGebra, os quais foram criados para trabalhar com as diferentes classes de quadriláteros e suas propriedades básicas. Com essa apresentação, os professores têm a oportunidade de conhecer esses recursos e as características de sua animação, as propriedades dos quadriláteros que podem ser abordadas por meio dessas animações e as transformações geométricas vinculadas a cada OA. No total são usados três OA para trabalhar com as três classes de quadriláteros determinadas ao considerar o paralelismo dos seus lados opostos. Neste trabalho optou-se por apresentar e caracterizar as tarefas de geometria dinâmica vinculadas ao OA do paralelogramo, o qual está disponível em < <https://ggbm.at/t9tzc59h> >. Esse recurso apresenta um paralelogramo que se divide em dois triângulos congruentes, por uma das suas diagonais, ao clicar no botão “Iniciar” (Figura 3).

Nesse processo de familiarização, espera-se que o usuário reconheça os três momentos nos quais se desenvolve a animação, isto é, os momentos de *início* (no qual o paralelogramo divide-se em dois triângulos congruentes mediante uma translação e uma reflexão em torno de um ponto), de *continuação* (um dos triângulos é rotacionado e transladado até o outro, o que faz com que os dois triângulos fiquem sobrepostos) e de *finalização* (as transformações aplicadas são revertidas, voltando ao início da animação). Após reconhecerem os três momentos anteriores, os usuários devem identificar as possíveis propriedades geométricas do paralelogramo suscetíveis à demonstração, segundo a animação oferecida pelo OA. Espera-se que seja utilizada a congruência

entre os triângulos que dividem o paralelogramo (fato este que se observa quando essas figuras se sobrepõem no desenvolvimento da animação) para identificar tais propriedades. Uma das propriedades a ser identificada pelos usuários é aquela que estabelece que os ângulos consecutivos de todo paralelogramo são suplementares, o que é verificado visualmente no OA.

**Figura 3 – OA relacionado ao trabalho com o paralelogramo**



Fonte: Elaborada pelos autores.

O momento da familiarização com o OA finaliza com uma exploração do recurso para identificar e caracterizar as diferentes transformações geométricas presentes na animação. Espera-se que os usuários identifiquem as três transformações nas quais se baseia essa animação, as quais são a rotação, a translação e a reflexão em relação a um ponto. Além disso, os usuários identificam os elementos de cada transformação por meio de processos de visualização e de construções auxiliares.

### **As tarefas propostas**

Nesse segundo momento da formação docente, os professores são convidados a resolverem um conjunto de tarefas derivadas do momento de familiarização com os OA. Com base nas características dos OA apresentados, essas tarefas são de dois tipos, isto é, as tarefas relacionadas à abordagem das propriedades geométricas dos quadriláteros e aquelas vinculadas às transformações geométricas utilizadas para criar as animações dos recursos com o *software*.

### **Tarefa 1. Sobre os ângulos consecutivos do paralelogramo**

*Os princípios metodológicos para a elaboração da tarefa*

Tal como apresentadas na seção 2, as tarefas de geometria dinâmica são de natureza diferente em relação às tarefas usadas em contextos tradicionais baseadas em lápis e papel. Por conta desse fato, acredita-se que as tarefas de geometria dinâmica devam ter caráter ainda mais particular ao envolver um OA, o qual é concebido e desenvolvido como ferramenta de apoio ao ensino de demonstrações de propriedades geométricas. Nesse sentido, decidiu-se usar e adaptar os princípios metodológicos para a elaboração de tarefas de geometria dinâmica estabelecidos por Powell e Alqahtani (2015) e Powell e Pazuch (2016) e usar a noção de *prompt* trabalhada por Trocki e Hollebrands (2018) em cada item das tarefas a serem resolvidas. Para elaborar tarefas que envolvam o OA com as características citadas, apresentam-se os seguintes princípios metodológicos:

1. *Identificação*: identificar, na animação do OA, as propriedades ou relações geométricas possíveis entre os elementos da figura susceptíveis a demonstração.
2. *Justificação*: descrever a maneira na qual foi feita a identificação anterior na animação do OA.
3. *Construção*: realizar uma construção geral da figura geométrica do OA em uma nova janela do *software*.
4. *Ampliação*: descrever formas nas quais pode-se observar a veracidade da questão inicial identificada para mais de um caso.
5. *Significado matemático*: pensar em formas de explicar a propriedade ou relação geométrica identificada a partir de construções auxiliares.
6. *Generalização*: elaborar um discurso que permita explicar em termos particulares e gerais a propriedade ou relação geométrica identificada.

#### A tarefa: ângulos consecutivos do paralelogramo

Após visualizar e interagir com o OA do paralelogramo, os professores são convidados a resolverem uma tarefa. O objetivo dessa resolução é fazer com que os professores desenvolvam um trabalho vinculado às relações entre os quatro pares de ângulos consecutivos de um paralelogramo. A tarefa é composta por uma série de questões.

- I. O que você pode dizer sobre os quatro pares de ângulos consecutivos do paralelogramo?
- II. Justifique como você realizou a visualização dos ângulos consecutivos do quadrilátero na animação do OA.
- III. Construa um paralelogramo ABCD usando uma nova janela do *software* GeoGebra.
- IV. Descreva como usar a construção do item III para ampliar as possibilidades de análise matemática do item I.



- V. Quais são as construções geométricas auxiliares que podem ser realizadas sobre a construção do paralelogramo e permitem justificar a questão formulada no item I?
- VI. Realize essas construções auxiliares e descreva como usá-las para explicar a questão visualizada no item I.

A seguir são descritas algumas possíveis soluções das questões formuladas em cada item da tarefa de geometria dinâmica.

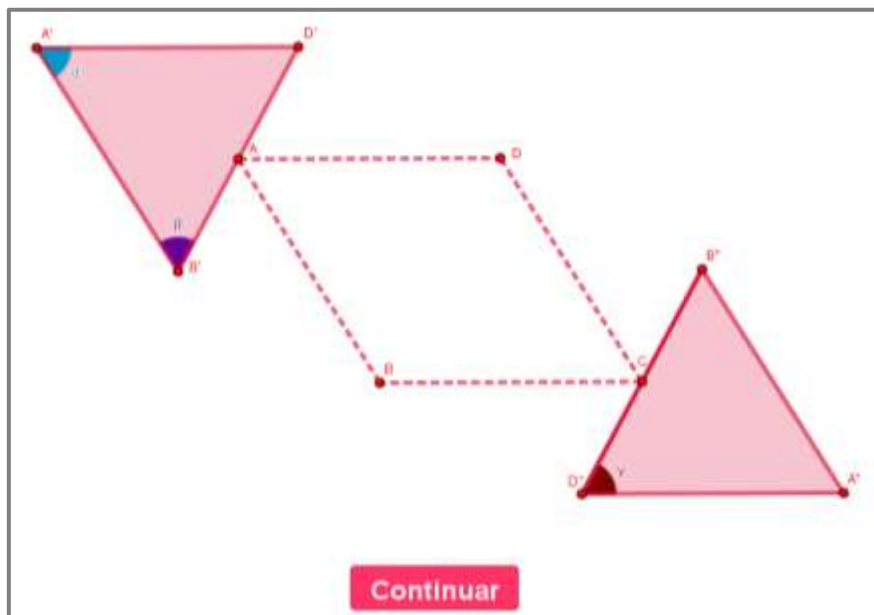
Item I. A identificação da relação entre os ângulos consecutivos

Este item relaciona-se com o primeiro princípio metodológico – *identificação* – uma vez que seu objetivo é fazer os professores engajarem-se na relação entre cada par de ângulos consecutivos do paralelogramo visualizado no OA. Espera-se que os professores identifiquem a propriedade que estabelece que os ângulos consecutivos de todo paralelogramo são suplementares.

Item II. A justificação da relação visualizada no OA

O segundo princípio metodológico – *justificação* – tem relação com este item porque seu objetivo é fazer com que os professores expliquem como foi possível identificar a relação entre os ângulos consecutivos do paralelogramo. Uma das formas que os professores podem encontrar para realizar a justificação está vinculada à observação direta aos ângulos  $\angle A$  e  $\angle B$ . Ao clicar no botão “Iniciar”, o paralelogramo  $ABCD$  se divide em dois triângulos pela diagonal  $\overline{BD}$  e, portanto, o ângulo  $\angle B$  se divide nos ângulos  $\beta$  e  $\gamma$ , isto é,  $m(\angle B) = m(\beta) + m(\gamma)$ , com  $m(\angle A) = m(\alpha)$  (Figura 4).

**Figura 4 – Divisão do paralelogramo e do ângulo  $\angle B$**

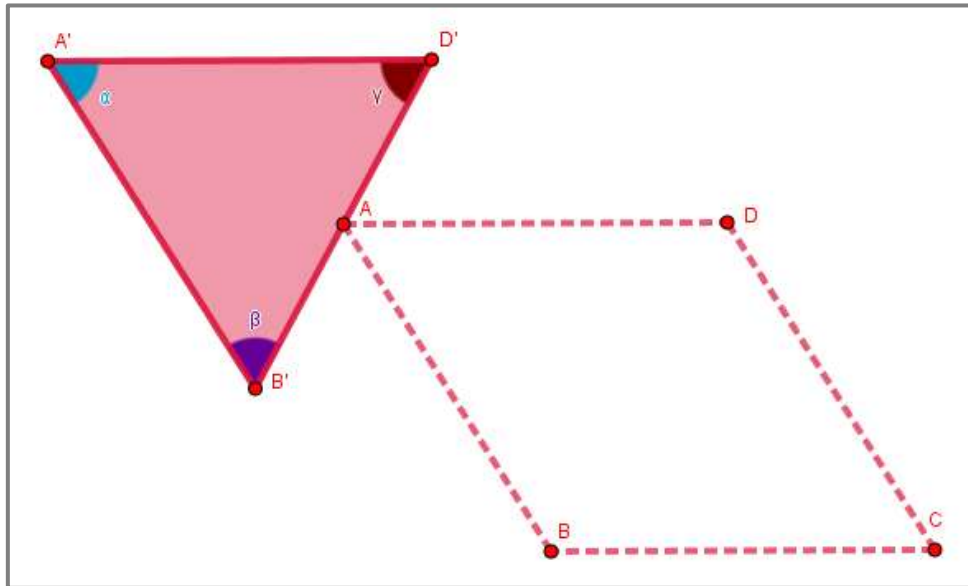


Fonte: Elaborada pelos autores.

Ao clicar no botão “Continuar”, o triângulo  $A''B''D''$  se sobrepõe ao triângulo  $A'B'D'$  por meio de uma rotação em torno de um ponto e uma translação. Uma vez sobrepostas ambas figuras,

é possível observar que os ângulos internos dos triângulos são  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  (Figura 5), os quais relacionam-se por meio da expressão  $m(\alpha) + m(\beta) + m(\gamma) = 180^\circ$ . Dado que  $m(\angle A) = m(\alpha)$  e que  $m(\angle B) = m(\beta) + m(\gamma)$ , temos  $m(\angle A) + m(\angle B) = 180^\circ$ . Usando uma argumentação similar, pode-se estabelecer as três relações restantes entre os pares de ângulos consecutivos do paralelogramo.

Figura 5 – Relação entre  $\angle A$  e  $\angle B$  por meio dos ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$



Fonte: Elaborada pelos autores.

#### Itens III e IV. A construção do paralelogramo – Ampliação da propriedade

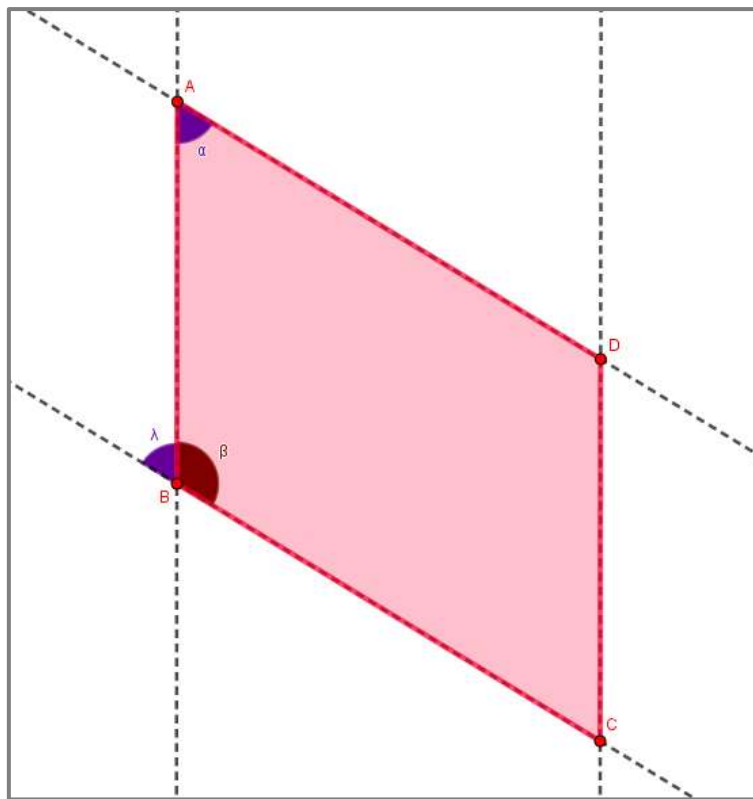
Os itens III e IV vinculam-se aos princípios metodológicos *construção* e *ampliação*, respectivamente. Os professores devem descrever as formas nas quais a propriedade identificada no OA seja ampliada além do caso particular abordado no recurso. Para tal, os professores utilizam processos de construção, medição e uso do arrastar de um paralelogramo qualquer em uma nova janela do *software* GeoGebra.

#### Itens V e VI. As construções auxiliares e a generalização

Os princípios metodológicos *significado matemático* e *generalização* estão presentes nestes itens da tarefa. Assim, busca-se ir além do conjunto de paralelogramos obtidos da construção e ao arrastar o quadrilátero nos dois itens anteriores. Nesse sentido, os professores são orientados a pensar em construções auxiliares que permitam elaborar uma argumentação mais generalizada sobre a propriedade abordada. Tais construções auxiliares podem ser as retas que contêm cada lado do paralelogramo  $ABCD$  da Figura 6, as quais seriam usadas focando nos ângulos externos do quadrilátero. Com isso, é possível observar que o ângulo  $\lambda$ , externo ao ângulo  $\angle B$ , é alterno interno com o ângulo  $\angle A$  entre as retas paralelas  $\overleftrightarrow{AD}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ , razão pela qual  $m(\lambda) = m(\angle A)$  (Figura 6).

Dado que  $m(\lambda) + m(\angle B) = 180^\circ$  por serem ângulos adjacentes, temos  $m(A) + m(\angle B) = 180^\circ$ . Usando uma argumentação similar, pode-se chegar à mesma conclusão para as relações restantes.

Figura 6 – Construções auxiliares utilizadas para generalizar a propriedade geométrica



Fonte: Elaborada pelos autores.

## Tarefa 2. Sobre as transformações geométricas

### Os princípios metodológicos para a elaboração da tarefa

No que diz respeito à segunda tarefa, o foco são as transformações geométricas que foram utilizadas para criar a animação do OA. Pelo fato de tratar-se de um objeto matemático diferente, a tarefa em questão é de natureza relativamente diferente daquela sobre as propriedades geométricas inerentes ao paralelogramo. Por essa razão, os princípios metodológicos para elaborar a segunda tarefa são adaptados às características e às possibilidades de abordagem das transformações geométricas a serem estudadas. Assim, os princípios metodológicos vinculados à tarefa são:

1. *Identificação*: identificar, na animação do OA, as transformações geométricas relacionadas ao desenvolvimento da animação do recurso.
2. *Justificação*: explicar as características fornecidas pela transformação identificada, em função dos seus elementos constitutivos.
3. *Construção*: realizar a construção geométrica de um paralelogramo qualquer, na qual se represente a transformação identificada.

4. *Exploração*: arrastar a construção geométrica para validar as justificações fornecidas.

A tarefa: transformações geométricas no OA

O objetivo desta tarefa é fazer com que os professores identifiquem e caracterizem a translação, a rotação e a reflexão em relação a um ponto, isto é, o modo como as transformações geométricas estão implícitas no desenvolvimento da animação do OA por meio da visualização, da construção e da exploração. Assim como a primeira, a segunda tarefa propõe uma série de questões que levam a realizar os princípios metodológicos mencionados anteriormente.

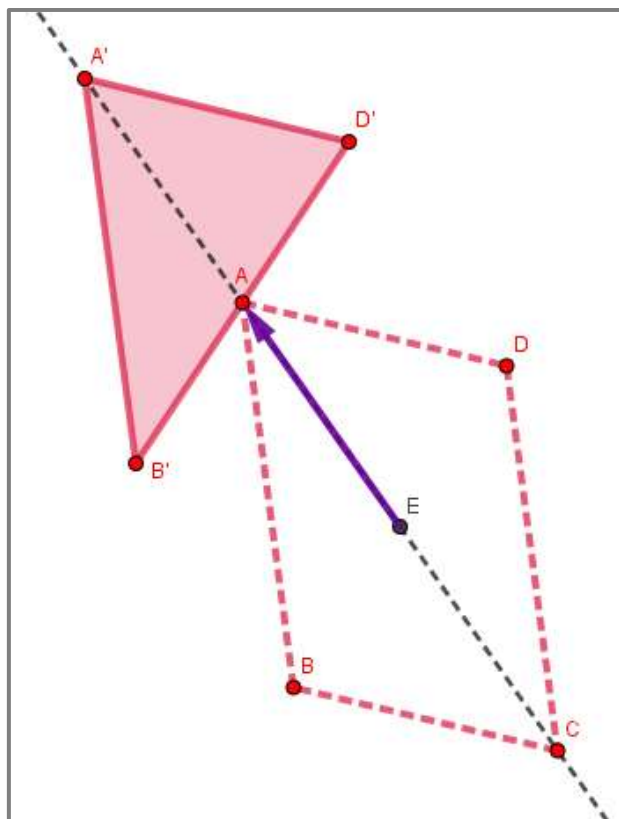
- I. Qual é a transformação geométrica vinculada ao efeito do *deslizamento* dos triângulos, nos quais se divide o paralelogramo do OA? Quais são as suas características? Explique.
- II. Construa um paralelogramo como o mostrado no OA e aplique a transformação geométrica identificada a um dos dois triângulos da divisão do quadrilátero. Arraste a construção realizada para validar o item I.
- III. Que transformação geométrica se relaciona aos dois triângulos nos quais se divide o paralelogramo do OA? Quais são as suas características? Explique.
- IV. Obtenha o outro triângulo da divisão do quadrilátero aplicando a transformação identificada no item III. Arraste a construção para validar a resposta do item III.

A exemplo da primeira tarefa, a seguir descrevem-se possíveis soluções das questões formuladas em cada item da segunda tarefa.

Item I. A identificação e a caracterização da translação

Este item vincula-se aos dois primeiros princípios metodológicos da tarefa, a *identificação* e a *justificação*. O objetivo é fazer com que os professores identifiquem a translação como a primeira transformação geométrica aplicada no OA. Os professores devem caracterizar a transformação em função do objeto geométrico que a define, isto é, o seu vetor de translação, neste caso específico. Realizar tal caracterização pressupõe a definição dos elementos do vetor de translação, como a sua magnitude, direção, sentido, origem e extremidade. Assim, espera-se que os professores identifiquem como uma possível origem do vetor o ponto centro  $E$  do paralelogramo, como consequência do ato de observar que os triângulos nos quais se divide o quadrilátero *deslizam-se* a partir do seu centro. Observando o triângulo  $A'B'D'$ , os professores poderão reconhecer que a extremidade do vetor seria  $A$ , um dos vértices do paralelogramo e ponto médio do lado  $B'D'$ . Em consequência, a magnitude do vetor seria igual à distância  $d(EA)$ , o sentido de  $E$  até  $A$  e a direção a reta  $\overrightarrow{EA}$ , ou a reta que contém a diagonal  $\overline{AC}$  (Figura 7).

Figura 7 – Vetor de translação e os seus elementos constitutivos



Fonte: Elaborada pelos autores.

### Item II. A aplicação da translação no software

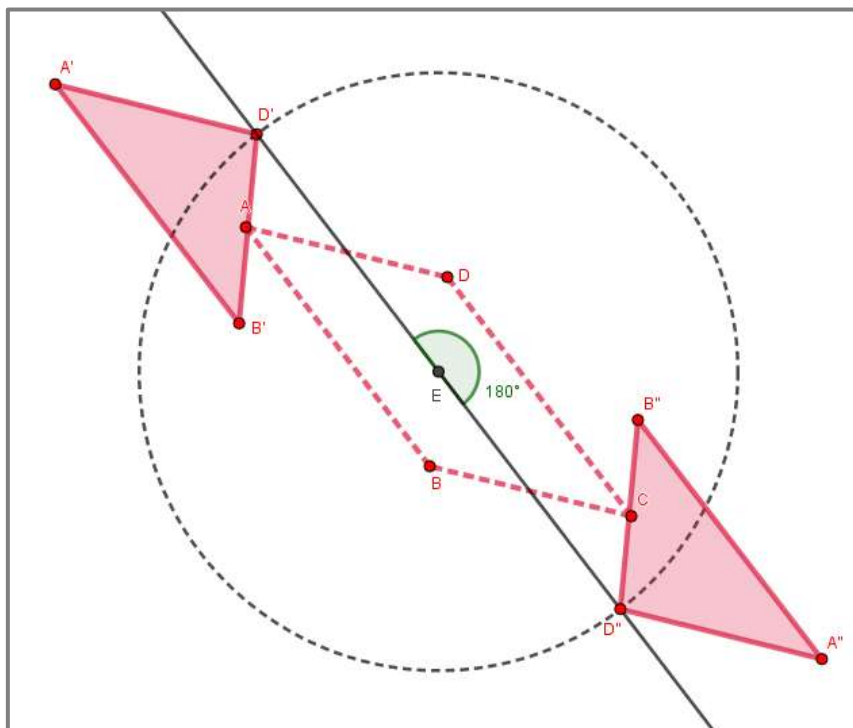
O item considera os princípios metodológicos *construção* e *exploração* no intuito de fazer com que os professores validem as respostas do item I mediante a aplicação da translação no *software* GeoGebra. Assim, em primeiro lugar, os professores devem construir um paralelogramo qualquer seguindo um procedimento similar ao aplicado na tarefa anterior. Em segundo lugar, espera-se a construção de qualquer um dos dois triângulos, que dividem o paralelogramo por uma das suas diagonais. Também se deve localizar o centro com a ferramenta “Ponto Médio ou Centro”, clicando sobre o quadrilátero. Em terceiro lugar, eles utilizam a ferramenta “Vetor” para construir o vetor com origem no ponto E do paralelogramo e fim no ponto médio do lado do triângulo, segundo a explicação do item anterior. Em quarto lugar, os professores aplicam a translação com a ferramenta “Translação por um Vetor”, clicando no triângulo e no vetor, nessa ordem. Após a construção, espera-se que os professores a arrastem para validar os argumentos do item I.

### Itens III e IV. A identificação e a aplicação da reflexão em relação a um ponto

Nesta parte da tarefa, os professores devem identificar, caracterizar e justificar a reflexão em relação a um ponto como outra transformação geométrica presente no OA, para posteriormente aplicá-la no *software* GeoGebra. Nesse sentido, o item III baseia-se nos princípios metodológicos de *identificação* e *justificação*, enquanto o item IV vincula-se aos princípios de *construção* e

*exploração*. No que diz respeito ao item III, justificar a reflexão em relação a um ponto pressupõe reconhecer que essa reflexão é um caso particular de uma rotação com um ângulo de  $180^\circ$ . Com isso, os professores podem observar, por exemplo, que o vértice  $D''$  do triângulo  $A''B''D''$  – imagem do triângulo  $A'B'D'$  em relação ao ponto  $E$  – é obtido por meio de uma rotação do vértice  $D'$  com centro no ponto  $E$  com um ângulo de  $180^\circ$  (Figura 8).

**Figura 8 – Reflexão do triângulo  $A'B'C'$  em torno ao ponto  $E$  como uma rotação**



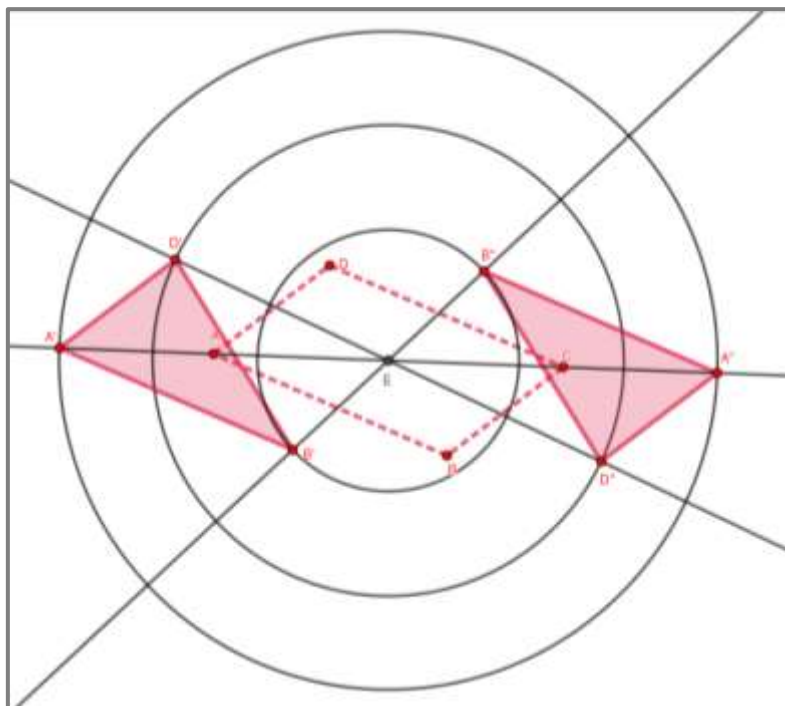
Fonte: Elaborada pelos autores.

Espera-se que os professores identifiquem, ao invés da reflexão em relação a um ponto, a reflexão em relação a uma reta como a transformação geométrica aplicada a um dos triângulos que dividem o paralelogramo. Esse fato poderia ser aproveitado no momento da discussão da tarefa, para refletir sobre e aprofundar a relação entre ambas transformações, perguntando aos professores, por exemplo, em que casos o triângulo  $A''B''D''$  é uma reflexão em relação a uma reta do triângulo  $A'B'C'$ , analisando o caso em que o paralelogramo é um losango – e, por conseguinte, quando é quadrado – com base na perpendicularidade das suas diagonais.

No que diz respeito ao item IV da tarefa, o objetivo é fazer com que os professores apliquem a transformação correspondente por meio da ferramenta “Reflexão em Relação a um Ponto”, clicando no triângulo  $A'B'C'$  e no ponto  $E$ , nessa ordem. Também se considera a possibilidade de realizar a construção sem usar a ferramenta direta da transformação. Para isso, os professores podem aplicar a reflexão por meio de construções geométricas auxiliares baseadas na concepção da transformação como uma rotação de  $180^\circ$ . Assim, seriam traçadas três

circunferências centradas no ponto  $E$  e passando pelos vértices do triângulo  $A'B'C'$  e as retas  $\overleftrightarrow{A'E}$ ,  $\overleftrightarrow{B'E}$  e  $\overleftrightarrow{D'E}$ . O desenho das retas justifica-se com base no fato de que os pontos obtidos das suas interseções com as circunferências – os vértices do triângulo  $A''B''C''$  – são diametralmente opostos aos vértices do triângulo  $A'B'C'$ , quando se obtém, em cada caso, o ângulo de  $180^\circ$  (Figura 9).

**Figura 7 – Reflexão em relação a um ponto por meio de construções auxiliares**



Fonte: Elaborada pelos autores.

Na próxima seção, sintetizam-se as conclusões derivadas do desenvolvimento deste artigo.

### **Encaminhamentos para a prática do professor**

O objetivo do artigo foi *apresentar e caracterizar tarefas de geometria dinâmica que envolvem o uso de objetos de aprendizagem (OA) para a exploração e a investigação de conceitos geométricos*. Considerando a revisão de literatura, para a elaboração dessas tarefas estabeleceram-se relações entre aspectos teóricos e metodológicos. No que diz respeito ao referencial teórico, foram demarcadas distinções entre as noções teóricas *exercício, problema e investigação*. Em termos metodológicos, utilizaram-se processos que permitem desenvolver tarefas investigativas em ambientes de geometria dinâmica, nomeadamente: *identificação, justificação, construção, ampliação, significado matemático e generalização*.

Tendo em vista a natureza das tarefas, baseando-se nos aspectos teóricos e metodológicos descritos, entende-se que as tarefas investigativas elaboradas neste artigo podem contribuir para a prática do professor que ensina geometria e deseja integrar tecnologias digitais em sala de aula na Educação Básica. Para tanto, salienta-se que o professor precisa se engajar na prática de análise das

tarefas de geometria dinâmica que envolvam OA, com a finalidade de apontar possibilidades e limitações da aplicabilidade desses objetos na prática docente. Ressalta-se que é fundamental que o professor pense sobre o modo como pode gerenciar a execução da tarefa em sala de aula e pondere sobre as possíveis intervenções docentes e as interações com os estudantes.

Em síntese, considera-se que os princípios metodológicos usados para a elaboração das tarefas podem ser redimensionados de acordo com o contexto no qual as tarefas são usadas, isto é, as tarefas podem ser modificadas no âmbito da sala de aula do professor da Educação Básica, na formação inicial e na formação continuada de professores que ensinam ou desejam ensinar matemática. Nesses contextos, acredita-se que o professor deva ser convidado a refletir, a discutir e a reconhecer a importância de integrar os princípios metodológicos na elaboração de tarefas de geometria dinâmica com o uso de OA.

## Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Curricular Comum – BNCC** (Ensino Fundamental). Brasília, 2017.

CLARK, et al. **Rethinking science learning through digital games and simulations**: Genres, examples, and evidence. Learning science: Computer games, simulations, and education workshop sponsored by the National Academy of Sciences, 2009. Disponível em: <[http://www7.nationalacademies.org/bose/Gaming\\_Sims\\_-Commissioned\\_Papers.html](http://www7.nationalacademies.org/bose/Gaming_Sims_-Commissioned_Papers.html)> Acesso em: 13 Jan. 2019.

GALLO, P.; PINTO, M. G. Professor, esse é o objeto virtual de aprendizagem. **Revista Tecnologias na Educação**, Curitiba, v. 2, n. 1, p.1-12, 2010.

GUTIÉRREZ, R. E.; PAZUCH, V. Elaboração de objetos de aprendizagem com o software GeoGebra para o ensino de geometria. **Boletim Online de Educação Matemática**, v. 6, p. 55-74, 2018.

GUTIÉRREZ, R. E.; HERNÁNDEZ, M. F. Simulación de fenómenos físicos con GeoGebra. Una oportunidad de aprendizaje mediada por tecnologías digitales. In: PRIETO, J. L.; GUTIÉRREZ, R. E. (Org.), **Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia**. Maracaibo: A.C. Aprender en Red, 2016. p. 224-240.

KALINKE, M. A.; DEROSI, B.; JANEGITZ, L. E.; RIBEIRO, M. S. N. Tecnologias e educação matemática: um enfoque em lousas digitais e objetos de aprendizagem. In: KALINKE, M. A.; MOCROSKY, L. F. (Org.). **Educação matemática**: pesquisas e possibilidades. Curitiba: Ed. UTFPR, 2015. p. 159-186.

KOPER, R. Combining re-usable learning resources to pedagogical purposeful units of learning. In: LITTLEJOHN, A. (Org.). **Reusing online resources**: a sustainable approach to eLearning. Londres: Kogan Page, 2003. p.1-8.

PLASS, J. L.; HOMER, B. D.; HAYWARD, E. O. Design factors for educationally effective animations and simulations. **Journal of Computing in Higher Education**, Estados Unidos, n. 21, p.31-61, 2009.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem matemática. In: PONTE, J. P. (Org.) **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2014, p. 13-30.



- PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BROCARD, J. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 3. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.
- POWELL, A. B.; ALQAHTANI, M. M. Tasks and meta-tasks to promote productive mathematical discourse in collaborative digital environments. In: I. SAHIN, I.; KIRAY, S. A.; ALAN, S. (Org.), **Proceedings of the International Conference on Education in Mathematics, Science & Technology**, Antalya, Turkey, 2015. p.84-94
- POWELL, A. B.; PAZUCH, V. Tarefas e justificativas de professores em ambientes virtuais colaborativos de geometria dinâmica. **Zetetiké**, Campinas, v. 24, n. 2, p.191-207, 2016.
- SANTOS, M. E. K. L. **Objetos e ambientes virtuais de aprendizagem no ensino de matemática: um estudo de caso para o estágio supervisionado de docência**. Dissertação de mestrado – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2007.
- TROCKI, A; HOLLEBRANDS, K. The Development of a Framework for Assessing Dynamic Geometry Task Quality. **Digital Experiences in Mathematics Education**, Berlin, p.1-29, 2018.
- URDANETA, S. D.; PRIETO, J. L.; DUARTE, A. Interpretação dos signos das razões trigonométricas com GeoGebra. **Amazônia**, Belém, v. 13, n. 28, p.78-89, 2017.
- YEO, J. B. W. Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment. **Mathematics and Mathematics Education**, p. 1-26, 2007.

Submetido em fevereiro de 2019  
Aprovado em março de 2019