BOLETIM GEPEM

23

ANO XIII 2.º SEMESTRE 1988

PUBLICAÇÃO SEMESTRAL DO
G E P E M
GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

GEPEM

APOIO FINANCEIRO DO
SUBPROGRAMA DE EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIA
– PADCT – CAPES –

ÍNDICE

APRESENTAÇÃO

Regina Monken

A Matemática do século XX pode ser caracterizada pela ênfase às noções de estrutura e axiomatização. O prof. Pitombeira nos conta um pouco da história da estruturação da Matemática. Destaca as idéias fundamentais do movimento que se chamou de "Matemática Moderna", segundo ele uma das forças propulsoras de tantas reformas ocorridas nas décadas de 50 e 60 e o maior experimento já feito em Educação Matemática.

Seu artigo é leitura obrigatória para quem se interesse pelo ensino da Matemática.

Como apêndice o prof. Pitombeira acrescenta o exame que Dieudonné fez sobre:

- os conhecimentos que os professores de Escolas de Engenharia gostariam que os estudantes dominassem ao final da Escola Secundária;
- o tipo de aluno que eles realmente recebem;
- como seria possível melhorar a situação existente, incluindo aqui uma sugestão de currículo por faixas etárias.

O prof. Radiwal traduziu para nós a aula inaugural de Junho/81 do Instituto de Educação da Universidade de Londres, dada pela profª Célia Hoyles, sobre Cultura e Computadores nas Aulas de Matemática. Nessa aula a Profª destacou desafios que se apresentam à Educação Matemática e mostrou como os computadores, principalmente a linguagem LOGO, podem auxiliar e se constituir num caminho para a pesquisa em educação matemática.

Preocupados com os altos índices de reprovação na 1ª série do 2º grau do Col. Pedro II/Centro, um grupo de professores vem realizando desde 1985 um trabalho de atendimento a alunos repetentes dessa série. O desenvolvimento desse projeto foi apresentado aos sócios do GEPEM na palestra mensal de 24/11/87. Ao publicar uma descrição do trabalho esperamos mais uma vez atender aos sócios que nem sempre podem comparecer às reuniões, julgando estar contribuindo com um exemplo que pode ser incentivo para outras iniciativas no atendimento a alunos com dificuldades na aprendizagem.

As prof$\underline{as}$ Katia Regina e Mª Antonieta, da rede estadual do RJ e auxiliares de pesquisa da UFF nos resumem as conclusões de sua pesquisa sobre o LIVRO DIDÁTICO, feita para o INEP em 85, onde analisam os livros de Matemática de 1ª a 4ª série do 1º grau comprados pela Fundação de Assistência ao Estudante (FAE) em 1985 para distribuição em todo o território nacional em 1986.

Iniciamos ainda, neste número, a publicação das provas das Olimpíadas Estaduais de Matemática (RJ) a partir da 1ª fase/87. Prometemos para os próximos números a continuação.

AS IDÉIAS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA MODERNA

João Pitombeira de Carvalho
Departamento de Matemática
Pontifícia Universidade Católica
Rio de Janeiro-RJ

"Há muitos indícios claros de que estamos às vésperas de mudanças importantes, até mesmo radicais, em um currículo de matemática que permaneceu relativamente estável durante muito tempo. Em verdade, este seminário foi organizado devido à convicção de que estas mudanças são essenciais para o progresso, e que elas devem ser discutidas com imaginação e discernimento antes de serem postas em prática." (Discurso de abertura de Marshall H. Stone no Seminário Royaumont, de 23 de novembro a 4 de dezembro de 1959).

"...Não posso deixar de demonstrar um certo pessimismo sobre os resultados dos movimentos de renovação curricular e de reforma educacional das décadas de 60 e 70... Suspeito que provavelmente os resultados da experiência internacional com o movimento de reforma matemática... seja semelhante à americana, e que há muito o que aprender das respostas ao impulso de Royaumont e que tem significação para políticas educacionais em geral." (Resenha feita por Ian Westbury dos Anais da Conferência Internacional sobre Mudança e Estabilidade no Currículo de Matemática, Osnabruck, de 7 a 11 de janeiro de 1980).

No início dos anos 50 praticamente todos concordavam que o ensino de matemática havia fracassado. Mesmo nas nações mais ricas e desenvolvidas, a maioria dos alunos chegava ao fim de seus estudos secundários com péssimas notas em matemática e, o que é pior, sem quase nada saber dela. Os que ingressavam na universidade demonstravam total falta de preparo para o contacto com a matemática aí ensinada e suas aplicações. Esta situação era particularmente séria nos Estados Unidos, onde a tradição educacional permite grande liberdade ao estudante na escolha de que disciplinas estudar na escola secundária, com o resultado de que relativamente poucos alunos obtinham boa preparação em matemática. A situação em países como a França e a Inglaterra, com sistemas educacionais mais tradicionais não era tão má, mas havia queixas generalizadas sobre o currículo e o desempenho dos estudantes (2).

Logo no início da década começaram os trabalhos para modificar o ensino de matemática na escola secundária (3). Principalmente nos Estados Unidos, onde a descentralização do sistema escolar facilita experiências, os movimentos de reforma tomaram grande impulso, se estruturando em geral sob a forma de "projetos", modelo pedido emprestado à indústria e à pesquisa operacional. Em princípio, cada projeto deveria passar por três fases: pesquisa, desenvolvimento, difusão ou disseminação (4).

Os movimentos de reforma se multiplicaram; como diz Howson (5):

> "Durante as décadas de 60 e 70, quase todos os países (talvez todos) tentaram reformar radicalmente o currículo da matemática escolar. Este movimento de reforma pode com razão ser considerado como o maior experimento jamais feito em educação matemática. Naturalmente, não foi [um experimento] conduzido ao longo de linhas de pesquisa clássica: em geral não havia grupos de controle, as hipóteses eram frequentemente implícitas, e a avaliação, quando feita, era conduzida de maneira improvisada. Nos meados da década de 70, a fase de desenvolvimento de currículos terminou quase tão rapidamente como tinha começado".

A pressão mais forte e imediata para reformar o currículo de matemática da escola secundária e primária partiu em primeiro lugar da universidade. Dieudonné, na conferência que anexamos a este trabalho (6) deixa bem claro que sua preocupação é com a preparação matemática dos jovens que chegam à universidade. Kline(7) lembra o grande temor inspirado nos americanos pelo lançamento do satélite artificial soviético Sputnik, em 1957, que chamou a atenção para o despreparo científico e tecnológico americano.

Assim, a motivação inicial do movimento da matemática moderna(8) era a preparação pré-universitária dos jovens estudantes. Dieudonné, na conferência já citada, afirma não ter muito a sugerir sobre o que fazer com as crianças antes dos 14 anos, pois concorda com a orientação geral do ensino até esta idade. Howson diz(9):

> "...No entanto, a maior parte das tentativas no início dos anos 50 para modernizar os cursos introdutórios na universidade e para enriquecê-los com matemática mais exigente eram frustradas pelo baixo nível de compreensão e de conhecimentos matemáticos mostrados pelos estudantes que tinham concluído a escola secundária. Parecia essencial que os esforços para melhorar aquele nível tinham que principiar nas escolas. O currículo de matemática nas escolas secundárias e posteriormente das escolas primárias tornou-se um assunto preocupante para os matemáticos universitários. O resultado desta preocupação foi uma onda de reformas na matemática secundária muito mais abrangente e fundamental do que tinha sido inicialmente cogitado. Pois as mudanças planejadas

originalmente não tinham sido tão grandes, o que explica a ausência de qualquer levantamento ou análise ampla das práticas pedagógicas existentes. As correções a serem efetuadas eram simplesmente aquelas que se manifestavam aos matemáticos universitários como fraquezas óbvias do sistema escolar naquela época. Os problemas de método de ensino foram amplamente ignorados: em verdade, a ênfase anterior sobre a metodologia era considerada por muitos como causadora do desprezo pelo conteúdo.

O início da reforma foi portanto um período caracterizado por grande otimismo e confiança de que o problema poderia ser resolvido rapidamene e sem recursos complicados. Era um problema que os matemáticos achavam ter condições de resolver sozinhos."

Ou ainda:

"... (o movimento da matemática moderna) encarava a reforma do currículo de matemática em termos de uma renovação de conteúdo... e não questionava a prática pedagógica existente"(10).

É claro, todavia, que um movimento amplo e profundo de reformas curriculares, como aconteceu nas décadas de 50 e 60, não pode ter uma única causa nem uma única orientação. Ocupar-nos-emos de algumas linhas dominantes de influência. Nossa exposição privilegiará as reformas introduzidas inicialmente na escola secundária, para uma melhor preparação dos universitários, técnicos e profissionais de várias áreas, e que aos poucos desceram até a escola de primeiro grau. É o que Howson caracteriza como as reformas inspiradas na "matemática moderna", centradas no conteúdo. Outras reformas, inspiradas na linha estruturalista, deram atenção a vários outros aspectos, principalmente na escola primária(11).

Quais as idéias por trás do movimento que se chamou de "matemática moderna" e que foi uma das forças propulsoras para tantas reformas? Por quê esse movimento deu ênfase a certos tópicos e a certos métodos? Nesse trabalho, tentaremos fazer uma apresentação rápida das idéias fundamentais da matemática moderna, como seus defensores viam a matemática, e o que propunham para remediar a situação de seu ensino na escola secundária.

A matemática do Século XX repousa sobre as noções de estrutura e de axiomatização. Tal estruturação não foi feita subitamente, começou por volta de 1800, e seguiu quatro grandes correntes:

1- As extensões da noção de número e o aparecimento da álgebra abstrata.
2- O aparecimento das geometrias não-euclidianas e a axiomatização da geometria.
3- O desenvolvimento da teoria dos conjuntos e da lógica.
4- A aritmetização da análise e a percepção da necessidade de rigor nesta área.

Em primeiro lugar, é necessário chamar bem a atenção para o fato de que esses quatro movimentos simultâneos não foram gratuitos nem independentes. Explicitar detalhadamente a origem, gênese e consequências de cada um deles seria escrever todo um livro sobre a matemática dos séculos XIX e XX(12). Gostaríamos contudo de citar pelo menos um exemplo de relacionamento dos 4 ítens acima.

A teoria dos conjuntos, assunto tão polêmico na "matemática moderna", é um exemplo típico de como estas quatro correntes se interpenetram. Em geral, aparece como uma criação matemática independente, sem que se mostre como ela se relaciona com outras partes da matemática e que funções preenche. Diz-se no máximo que ela é importante para os fundamentos da matemática. No entanto, o criador da teoria dos conjuntos, o alemão Georg Cantor, chegou a ela não por acaso ou por simples "criar por criar". Ele estava estudando problemas delicados na teoria das séries de Fourier e percebeu que não era suficiente classificar os subconjuntos do conjunto dos números reais como finitos ou infinitos(13). Havia "várias" maneiras de um conjunto de números reais "ser infinito". De suas reflexões profundas sobre esse problema surgiu a teoria dos conjuntos. Em particular, Cantor percebeu que a ferramenta apropriada para comparar dois conjuntos infinitos é a noção de correspondência bijetora (um-a-um) entre seus elementos: dois conjuntos têm o "mesmo número de elementos" se podem ser postos em correspondência bijetora. Assim, explicitou-se e formalizou-se um processo que está por trás de toda contagem, e que vinha sendo usado desde os primeiros passos do homem no caminho da construção da matemática.

Bem cedo, percebeu-se a importância das idéias de Cantor não só para a análise mas para outras áreas de matemática. A teoria dos conjuntos, como objeto de investigação independente, levou às chamadas antinomias (leia-se contradições) e deu origem a muitos desenvolvimentos no estudo dos fundamentos da matemática. Ela foi usada por Frege na tentativa de reconstruir toda a matemática a partir da noção de conjunto, usando as leis da lógica formal(14). Permitiu, além disso, que se completasse a análise cuidadosa da noção de número, iniciada com a necessidade de tornar o cálculo infinitesimal rigoroso, possibilitando a construção dos números naturais a partir dos axiomas da teoria dos conjuntos(13).

Ao mesmo tempo em que se tentava tornar rigorosa a noção de número, o matemático alemão David Hilbert completava um desenvolvimento principiando com a "descoberta" das geometrias não-euclidianas por Bolyai, Gauss e Lobatschevsky, axiomatizando a geometria euclidiana(16), e mostrando que ela é tão consistente quanto a aritmética dos números reais(17). O aparecimento das geometrias não-euclidianas e a subseqüente axiomatização da geometria euclidiana tiveram conseqüências profundas para a percepção do que é o método axiomático. Hilbert tentou, além disso, "formalizar" toda a matemática, criando, juntamente com seus alunos, a chamada escola "formalista" a fim de mostrar que os métodos geralmente aceitos na matemática, tomada como um todo, não conduzem a contradições (o chamado "programa de Hilbert")(18). Dieudonné, de maneira algo exagerada, diz que a influência de Hilbert na matemática foi marcante tanto devido a suas descobertas realmente profundas e geniais, mas ao ponto de vista axiomático que adotou. Segundo Dieudonné, a contribuição essencial de Hilbert à matemática do século XX foi que "...(ele) ensinou os matemáticos a pensarem axiomaticamente, ou seja, a reduzir cada teoria específica estudada a um esquema lógico consistente."(19).

O uso do método axiomático é sem dúvida uma das características fundamentais da matemática contemporânea. O emprego dele deve ser entendido corretamente. Nenhum matemático, nem mesmo aqueles que trabalham nos fundamentos da matemática ou em lógica formal, "descobre" teoremas usando o método dedutivo(20). O processo de criação matemática é, como o processo de criação artística em geral, informal, intuitivo, meio-inconsciente, usa analogias, passagens formais não justificadas, etc. Somente após ter chegado a seus resultados, é que o matemático lhes dá a forma final lógico-dedutiva que aparece nos livros e artigos de pesquisa. Esta imposição do método dedutivo é a maneira que os matemáticos têm de se policiar e de se disciplinar para não incorrer em erros. E a experiência dos últimos séculos mostra como é fácil errar, se não se tomam os cuidados necessários(21). De maneira algo anedótica, René Thom salienta bem a diferença entre criar matemática e a exposição lógico-dedutiva em que esta criação é registrada em sua forma final, dizendo que fazer demonstrações não é missão dos matemáticos.

Quanto ao rigor matemático, pensa-se hoje que "não se trata de um conceito absoluto, independente do tempo; é uma construção histórica inseparavelmente ligada à prática da pesquisa matemática"(22). Como dito por Glaeser, o rigor não constitui um fim, mas uma ferramenta para conseguir um bom rendimento no trabalho(23).

O coroamento destas tendências de encarar a matemática como estruturas e de apresentar cada uma delas de maneira axiomática, encontra-se na obra do grupo de matemáticos que se intitulou Nicolas Bourbaki. A partir da década de 40, esse grupo de jovens matemáticos franceses incumbiu-se da missão de re-escrever toda a matemática conhecida, apresentando axiomaticamente suas grandes estruturas.

A motivação que os levou a empreender tal tarefa foi a percepção de que a matemática do século XX, quanto mais se desenvolvia, mais mostrava sua unidade profunda. Assim, percebeu-se que certas estruturas básicas estão presentes em várias teorias matemáticas, e que um estudo sistemático das relações entre elas, desnudando o que têm de comum, e apresentando automaticamente este núcleo comum, deixaria bem clara a unidade profunda e orgânica da matemática(24).

Há em matemática muitas estruturas. Por exemplo, as de grupo, de corpo, de anel, de espaço vetorial, de espaço topológico, de espaço métrico, etc. A estrutura de grupo, conjuntamente com a de espaço topológico, dá origem à de grupo topológico, de que os números reais, com a operação de soma usual, são um exemplo.

Ao se debruçar sobre a grande variedade de estruturas estudadas na matemática do Século XX, Bourbaki identificou o que chama de *estruturas-mãe*, que são as estruturas algébricas, as estruturas de ordem, e as estruturas topológicas. Elas, combinadas convenientemente, gerariam todas as outras.

Trata-se certamente de um programa extremamente ambicioso. Devemos salientar que Bourbaki propôs-se apresentar a matemática, e não um método de como criar matemática. Em seus escritos sobre como via a matemática, sua "filosofia da matemática", o grupo sempre chamou a atenção para a componente criativa da matemática, que não pode ser codificada ou reduzida a normas lógicas estritas.

Esta tensão que existe entre a criação e a formalização é parte essencial da matemática do século XX. Glaeser(25) diz a este respeito:

"Quando René Thom afirma... que "a axiomática não produziu nenhum teorema novo de certa importância" tem razão, mas não torna sua idéia suficientemente precisa. Se Thom quer dizer que o trabalho no "vazio", sem nenhuma referência a problemas interessantes, com sistemas axiomáticos-artificiais, somente pode produzir resultados medíocres, temos que dar-lhe razão. Porém todos os progressos importantes realizados nos últimos trinta anos – um período de descobertas matemáticas excepcionalmente fecundo – têm aproveitado a existência de meios de expressão formal e semântica que procedem diretamente do trabalho axiomático.
O próprio Thom participou desse esforço, com seu temperamento peculiar. E não foi por acaso que um matemático como Hassler Whitney, cujos trabalhos são particularmente apreciados por Thom, e que resolveu alguns dos problemas mais importantes e difíceis no domínio da análise e da topologia diferencial, tenha contribuído igualmente para a elaboração de algumas teorias axiomáticas fundamentais (variedades diferenciais, produtos tensoriais, estratificações, classes características, etc.). Em verdade, a partir de problemas que surgem de maneira natural, se realiza, entre outras, uma atividade e clarificação axiomática que forma parte integrante da descoberta".

O programa de Bourbaki teve muita influência. Quando se iniciou, foi acolhido com entusiasmo. Havia então um grande abismo entre a matemática que se criava nas universidades e institutos de pesquisa e a que se ensinava nas escolas, e isto foi uma das motivações para sua proposta de se rever o ensino de matemática no curso secundário(26). Particularmente na França, o ensino da matemática tinha se tornado sinônimo de problemas sutis e complicados sobre a geometria do triângulo, manipulações algébricas capciosas, etc.

Segundo Howson(27), a influência de Bourbaki foi tão grande que deu origem ao movimento da matemática moderna. Para ele, Bourbaki

"Tinha oferecido em seu tratado uma descrição sistemática da matemática, reorganizada de maneira a enfatizar as considerações estruturais e apresentada em uma linguagem uniforme com grande precisão. Devido à sua clareza e à maneira majestosa em que ela pouco a pouco se envolve, a apresentação estrutural oferece uma maneira convincente, (ou, talvez, tentadora) de organizar e apresentar o ensino da matemática nas universidades. Em comparação, o conteúdo da matemática escolar parecia não ter nem exatidão nem organização sistemática. Foi assim fornecido um estímulo para reformar a matemática escolar tradicional... A reorganização resultante teve como resultado mudanças significativas na seleção e no tratamento matemático do conteúdo (ensinado). Nas escolas elementares, o conteúdo, principalmente trabalho com números, não mudou muito, mas certamente houve mudanças na maneira de desenvolvê-lo – a partir da teoria dos conjuntos – e na ênfase dada aos aspectos estruturais, por exemplo, as leis comutativa, associativa e distributiva. Certos tópicos tradicionais da escola secundária, como a geometria euclidiana e a trigonometria avançada, foram postos de lado, por não terem nenhuma função significativa no novo sistema, e em seu lugar foram introduzidas as probabilidades, a estatística e a informática. O princípio básico de Bourbaki, a dedução do conteúdo a partir dos axiomas, também passou a ocupar posição central no ensino da matemática. Conteúdos que não se prestavam a um enfoque axiomático, como por exemplo muitas das aplicações da matemática, foram relegados a um plano secundário: a capacidade de fazer uma demonstração matemática e de raciocinar logicamente foi considerada mais importante do que a aquisição de "perícia trivial para calcular"... Como resultado desta reorganização, tornou-se possível tratar domínios da matemática bastante sofisticados bem cedo na educação das crianças... O método [de Bourbaki], no entanto, não diz nada sobre como tais conceitos básicos poderiam ser introduzidos nos níveis elementares de maneira consistente com a organização sistemática do material..."

Uma exposição bem "pura" e cristalina das intenções dos que esposaram as idéias da matemática moderna, como aplicação da maneira de Bourbaki apresentar esta ciência, encontra-se na palestra que Jean Dieudonné(28) fez em um seminário promovido pela OEEC (Organização para a Cooperação Econômica Européia) em Royaumont, em 1959. Devido à clareza das idéias, ao prestígio do autor e a seu estilo incisivo e vigoroso, trata-se de um texto de leitura obrigatória para todos os que se interessam por uma análise da matemática moderna. Além disso, as idéias de Dieudonné neste trabalho, muito citado mas pouco lido, têm sido frequentemente deturpadas. A leitura do texto permite uma visão mais justa e equilibrada da "proposta Bourbaki". Algumas das idéias expostas nesta conferência são repetidas ou mais desenvolvidas no prefácio de(29).

As idéias de Bourbaki, de matemáticos profissionais preocupados somente com o conteúdo de sua ciência, foram reforçadas pelas posições de Piaget e seus alunos sobre a psicologia do desenvolvimento da inteligência. Segundo Piaget(30)

"... Por um processo que é à primeira vista paradoxal, embora em verdade psicologicamente natural e claramente explicável, as estruturas mais abstratas e gerais da matemática contemporânea são muito mais ligadas às estruturas operacionais naturais da inteligência e do pensamento do que o eram as estruturas particulares que enquadravam a matemática e o ensino clássicos".

E ainda(31):

"... Pelo contrário, cremos que existe, em função do desenvolvimento da inteligência em seu conjunto, uma construção espontânea e gradual das estruturas lógico-matemáticas elementares, e que estas estruturas "naturais"... estão muito mais próximas das utilizadas pelas matemáticas chamadas "modernas" do que as que intervinham no ensino tradicional.

...

Outra coincidência interessante reside no fato de que, a partir do nível das operações concretas,... encontramos um equivalente elementar das três "estruturas-mãe" de Bourbaki, o que torna manifesto o caráter "natural" destas estruturas".

No entanto, é necessário cuidado na interpretação dessas declarações de Piaget como sendo um endosso da matemática moderna(32).

"Uma interpretação superficial seria enganosa. A matemática piagetiana poderia ser vista como uma combinação de aprendizagem por descoberta com a "matemática moderna". Isso está errado por duas razões. Em primeiro lugar, pode-se argumentar que, quando Piaget menciona "[ser essencial] compreender uma teoria por meio de sua redescoberta", tinha em mente algo muito mais dialético do que o ensino pela redescoberta, como esse termo é geralmente usado em educação matemática. Nesta última acepção, seu significado [do ensino pela redescoberta] está baseado em técnicas heurísticas desenvolvidas basicamente por Polya(33)... A idéia de Piaget parece ser mais semelhante ao ciclo evolucionário de conjectura, demonstração e refutação por contra-exemplos proposto por Lakatos(34). Em segundo lugar, a matemática moderna a que se refere Piaget consiste nas "estruturas-mãe" de Bourbaki e na teoria das categorias de Mac Lane(35). Isso é bem diferente da teoria dos conjuntos que forma a base da matemática moderna. Pode ser possível identificar os "aspectos fáceis" de Bourbaki e da teoria das categorias e trazê-los para um nível elementar, como foi feito com a teoria dos conjuntos. No entanto, isso ignora e pode reforçar um aspecto muito anti-Piagetiano da matemática moderna (e uma das razões por que se considera frequentemente hoje que ela falhou). Ou seja, que as estruturas são impostas de cima. Ela [a matemática] não parte das estruturas informais que a criança já possui. Pode-se dizer que ela tenta ensinar a criança a pensar sobre o pensamento de alguma outra pessoa, e não sobre seu próprio pensamento [da criança].

O importante [no comentário de Piaget]... não é que o currículo deve incluir seu tipo de matemática moderna. Em vez disso, é que aquilo que é ensinado deveria, em princípio, conduzir naturalmente a estas noções e a outras como elas, mesmo se muitas delas não foram encontradas explicitamente antes..."

Como exemplo de aplicação das idéias sobre a matemática expostas acima, temos o trabalho do professor Howard Fehr, da Universidade de Columbia, que organizou, com sua equipe, em 1965, o primeiro grande projeto de reforma do ensino da matemática baseado na chamada matemática moderna, adotando o ponto de vista de Bourbaki. Coerentemente com as idéias de ressaltar a unidade da matemática e a economia de pensamento proporcionada pelo método axiomático-dedutivo, deu ênfase, nos materiais elaborados em seu projeto (o Secondary School Mathematics Curriculum Improvement Study – SSMCIS), aos conceitos de conjuntos, operações, aplicações entre conjuntos, relações e estruturas. Na explicitação destas noções, seguindo a filosofia geral de todos os projetos inspirados nas idéias do grupo Bourbaki, foram enfatizados(36):

1 - Insistência sobre as idéias abstratas: fechamento, inversa de uma operação, par ordenado, conjunto vazio, relação de equivalência, densidade do conjunto de números racionais (nos reais), e, finalmente, as extensões da noção de número.

2 - Maior cuidado com o rigor lógico: existência de termos não definidos, proposições relacionadas com uma proposição dada (a negação, a recíproca, e a contrapositiva), equivalência lógica, pepel das definições e hipóteses, o significado de implicação lógica, a validez e a verdade, as demonstrações formais [das propriedades] da multiplicação de números negativos, etc...

3 - O uso de um vocabulário contemporâneo. Falamos, por exemplo, de proposições abertas e de tabelas de verdade, de semi-retas, semi-planos, regiões, curvas simples, polígonos convexos, números naturais e números reais, domínio e contra-domínio, conjuntos, subconjuntos e subconjuntos próprios, etc.

4 - A insistência na precisão da linguagem, o que dá lugar a distinções sutis e a definições bastante formais. Temos assim que considerar números e numerais, as raízes de uma equação e o conjunto de soluções, as frações e os números racionais, as funções e as relações, as incógnitas, triângulo definido como a união de três pontos que não são colineares e dos segmentos que os unem, etc.

5 - A insistência em idéias matemáticas "novas", incluindo, entre outras, a linguagem da teoria dos conjuntos, os diagramas de Venn, as mudanças de base, o conjunto dos números reais, a estrutura lógico-dedutiva da aritmética e da álgebra, a aritmética modular, as desigualdades, as relações (com suas propriedades reflexiva, simétrica e transitiva), as funções, as geometrias não-métricas, a axiomática em geral e o caráter axiomático da geometria em particular, os fundamentos da lógica e a natureza da medida.

Uma crítica extremamente virulenta, quase caricatural, de um tal conteúdo pode ser encontrada em (37).

Apresentamos, assim, as idéias que orientaram o movimento da "matemática moderna" em sua origem. O estudo de sua propagação, influência, e os porquês de sua contestação bem generalizada, principalmente a partir dos meados da década de 70 merecem outro trabalho. Como já dissemos, é impossível, dentro dos limites de um artigo, fazer um levantamento de todos os desenvolvimentos do assunto e das controvérsias que ele fez surgir. Agora, que o movimento já tem mais de vinte e cinco anos, pode-se começar a historiá-lo com isenção de ânimo, tentando ver seus pontos positivos e negativos. É inegável que ele marcou indelevelmente o ensino da matemática elementar. Repetindo as palavras já citadas de Howson(38), o movimento da matemática moderna foi o maior experimento já feito em educação matemática. Assim, qualquer pessoa que se interesse pelo ensino da matemática, quer do ponto de vista acadêmico, de pesquisa, quer do ponto de vista histórico, quer como professor engajado pessoalmente no ensino, deveria tomar conhecimento deste assunto. Sua compreensão é essencial para entender porque se ensina matemática como hoje em dia.

APÊNDICE

NOVAS IDÉIAS NA MATEMÁTICA ELEMENTAR

Jean Dieudonné.

Minha tarefa específica hoje é examinar, do ponto de vista do currículo de matemática atual nas universidades e escolas de engenharia(39):

a) Que conhecimentos de matemática os professores destas instituições gostariam que as crianças tivessem, ao fim de sua educação secundária.

b) Que tipo de aluno eles realmente recebem.

c) Como seria possível melhorar a situação existente.

Nos últimos cinquenta anos, os matemáticos introduziram não somente novos conceitos mas uma nova linguagem, que cresceu empiricamente das necessidades da pesquisa matemática e cujo poder para exprimir afirmativas matemáticas de maneira concisa e precisa tem sido repetidamente testado e [que] ganhou aprovação universal.

Mas até agora a introdução desta nova terminologia tem sido (pelo menos na França), ferozmente combatida pelas escolas secundárias, que se apegam desesperadamente a uma linguagem obsoleta e inadequada. Assim, quando um estudante chega à universidade, quase que certamente nunca terá ouvido falar de palavras comuns da matemática como conjunto, aplicação, grupo, espaço vetorial, etc. Não espanta que se sinta confuso e desencorajado em seu contacto com a matemática superior.

Alguns elementos de cálculo, álgebra vetorial e um pouco de geometria analítica foram recentemente introduzidos nos dois ou três últimos anos da escola secundária. Mas tais tópicos têm sido sempre relegados a uma posição subalterna, o centro de interesse permanecendo, como antes, a geometria pura ensinada mais ou menos como Euclides, com um pouco de álgebra e de teoria dos números.

Acho que os dias de uma tal colcha de retalhos estão contados, e estamos comprometidos com uma reforma muito mais profunda – a não ser que estejamos dispostos a deixar que a situação se deteriore ao ponto em que impedirá seriamente qualquer progresso científico. E se todo o programa que tenho em mente deve ser resumido em um slogan, esse slogan seria: Abaixo Euclides!

Esta afirmação talvez choque alguns dos senhores, mas eu gostaria de mostrar-lhes detalhadamente os argumentos em seu favor.

Foi graças aos gregos que erigimos a estrutura majestosa da ciência moderna. Mas, ao fazer isso, as noções básicas da geometria foram profundamente examinadas, especialmente desde os meados do século dezenove. Isso tornou possível reorganizar o conteúdo da geometria euclidiana, colocando-o sobre alicerces simples e sólidos, e reavaliar sua importância em relação à matemática moderna – separando o que é fundamental de um monte caótico de resultados que não têm nenhum significado exceto como relíquias dispersas de métodos grosseiros ou obsoletos(40).

O resultado talvez seja um pouco surpreendente. Suponhamos, que se deseja ensinar geometria euclidiana a mentes maduras do outro planeta que nunca ouviram falar dela, ou ensiná-la tendo como objetivo sua aplicação possível à pesquisa moderna. Então, todo curso poderia, acho eu, ser dado em duas ou três horas – uma ocupada pela descrição do sistema de axiomar, outra pelas consequências úteis deles, e possivelmente uma terceira hora por alguns exercícios razoavelmente interessantes.

Todo resto, que agora enche volumes de "geometria elementar" – e incluo aí tudo sobre triângulos (é perfeitamente possível e desejável descrever toda a teoria sem mesmo definir um triângulo!)... – é tão relevante ao que os matemáticos (puros e aplicados) fazem hoje quanto os quadrados mágicos e os problemas de xadrês!

Se isso parece fantástico, deixem-me dar alguns detalhes [Dieudonné apresenta então (A) os axiomas de um espaço vetorial real de dimensão dois; (B) de um produto interno].

O que eu chamei de consequências úteis são, por um lado, a álgebra linear bi-dimensional (dependência linear, bases, retas, o grupo de translações e aplicações homotéticas, retas paralelas, aplicações lineares, formas lineares e equações de retas), que é dedutível do sistema de axiomas (A), e constitui o que é também chamado geometria afim plana, e, por outro lado, ortogonalidade, círculos, rotações, simetrias, ângulos e o grupo de simetrias, noções que provêm do grupo (B).

Naturalmente, deste ponto de vista, a velha disputa entre geometria "pura" e "analítica" se torna sem sentido, pois ambas são simples traduções de linguagem de vetores (que, a propósito, vale mais a pena frequentemente aplicar diretamente). É claro como a geometria de três dimensões pode ser desenvolvida no mesmo espírito.

Contrastando com esta maneira "ideal" de ensinar geometria, não preciso contar-lhes o que é hoje em dia realmente feito nas escolas secundárias. As noções básicas (ponto, reta, distância, ângulo) não recebem nunca uma definição axiomática estrita; são introduzidas baseando-se diretamente na intuição, embora nunca sejam explicadas suas relações com os objetos físicos de que são representações "ideais". Como não é dado nenhum sistema completo de axiomas, é naturalmente impossível verificar se qualquer demonstração apresentada está ou não correta.

Os defensores da tradição a qualquer preço têm, naturalmente, uma resposta pronta para isso. Acreditando-se neles, a geometria euclidiana, ensinada de sua maneira, é o único método pelo qual a mente da criança pode ser aberta para uma compreensão real da matemática. No entanto, como nenhum outro método foi jamais tentado, não vejo como aceitar esta afirmação a não ser como um artigo de fé(41).

Acrescentarão que, apesar disso, os grandes matemáticos do passado e do presente foram educados desta maneira e isso não os impediu de fazerem suas descobertas. Isso é certamente verdadeiro, mas estou convencido de que se esses matemáticos não tivessem aprendido nada até a idade de, por exemplo, 16 anos, teriam, muito provavelmente, se saído igualmente bem.

Gostaria de salientar, além disso, que todas essas discussõs não são relevantes. Ninguém deveria ocupar-se, pelo menos nas escolas secundárias, com o ensino de futuros matemáticos profissionais (sem falar dos realmente excepcionais), de que talvez haja um em cada 10.000 crianças. O que está realmente em jogo é o tipo de imagem mental da matemática incutida na mente do estudante inteligente médio após ter sido submetido a esse tratamento durante vários anos(42).

Se tivéssemos um currículo enfim livre do peso morto da "geometria pura" o que colocaríamos no lugar dela? Já mencionei rapidamente alguns dos tópicos que formariam uma preparação extremamente valiosa para teorias de nível superior; mais detalhadamente, gostaria de listar os seguintes:

a) Matrizes e determinantes de ordem 2 e 3.
b) Cálculo elementar (funções de uma variável).
c) Construção do gráfico de uma função e de uma curva dada parametricamente (usando derivadas).
d) Propriedades elementares dos números complexos.
e) Coordenadas polares.

Afirmo que nenhum desses tópicos é mais abstrato ou exige pensamento mais profundo do que a geometria clássica, desde que o ensino de cada um deles seja adaptado ao desenvolvimento intelectual dos estudantes. Isso significa, naturalmente, que continua a haver vários grandes problemas, o principal sendo o de organizar o material em um currículo bem equilibrado e de criar métodos para ensiná-lo(43).

. . .

Com estas idéias em mente, voltemo-nos para um esboço do que julgo deveria ser um currículo moderno. Dividi-lo-ei segundo a idade dos estudantes (a fim de evitar problemas de peculiaridades nacionais e de distribuição por várias séries); e em cada nível discutirei os aspectos "experimentais" e "dedutivos" dos vários tópicos.

Idades até os 14 anos(44). É provavelmente sábio limitar o ensino da matemática nesse grupo a trabalho "experimental" com álgebra e geometria plana e não fazer nenhuma tentativa de axiomatização. Isso não quer dizer que não devessem ser enfatizadas as inferências lógicas, sempre que for possível mostrá-las de maneira bem clara e óbvia.

Em álgebra, o objetivo deveria ser tornar o estudante completamente familiarizado com o cálculo literal, a noção de número negativo, e a resolução de problemas lineares com uma ou duas incógnitas; isso é essencialmente o que é feito hoje, e não tenho portanto nenhuma modificação a propor aqui, excetuando que eu gostaria de ver mais horas gastas com álgebra do que com geometria, nesse estágio.

Em relação à geometria, sei que há muitas pesquisas e experimentos nos últimos anos... sobre os métodos de como ensinar a geometria como parte da física(45). Acho que esse desenvolvimento deveria ser altamente encorajado, desde que enfatize não objetos artificiais como os triângulos, mas sim as noções básicas tais como simetrias, translações, composições de transformações, etc.

Finalmente, em toda esta matemática "experimental", a linguagem e a notação hoje universais deveriam ser introduzidas tão cedo quanto possível: não há nada misterioso ou amedrontador em abreviar "pertence a" por $\in$ ou "acarreta" por $\Rightarrow$, ou falar de "subconjunto do plano" em vez de "lugar geométrico". É chamar um objeto por seu nome apropriado – como "grupo" ou "relação de equivalência" sempre que esse objeto for naturalmente observado em algum contexto geométrico ou algébrico – não implica que tenhamos de desenvolver anteriormente a teoria abstrata dos grupos ou das relações de equivalência.

Se for julgado apropriado, do ponto de vista psicológico, começar com alguma axiomatização neste nível, então, segundo nosso princípio geral, deveríamos procurar a parte da matemática com que as crianças tiveram mais contacto "experimental" até então, ou seja, a aritmética.

Com efeito, é um dos mais simples e mais belos exercícios de lógica desenvolver as leis usuais da aritmética a partir dos axiomas de Peano, e não vejo nenhuma razão para que isso não seja tentado o mais cedo possível(46).

...

É desnecessário salientar que isso não deveria ser tentado antes de que se possa fazer o estudante perceber a necessidade de um tal tratamento axiomático; [isso pode ser feito] encorajando-o a pensar o que quer dizer um inteiro muito grande e por que podemos aceitar a validez das leis da aritmética para tais objetos completamente fora de nossa percepção intuitiva; mas acho que não necessito frizar estes problemas, que os senhores dominam muito melhor do que eu.

● *Idade de 14 anos*. Do ponto de vista "experimental" é esta a idade em que é introduzida a idéia do gráfico de uma função, e isso certamente não deveria ser adiado para mais tarde. O método geral de resolver a equação $f(x)=O$ com ajuda do gráfico de $y=f(x)$, deveria ser imediatamente relacionado com esta idéia juntamente com os vários processos de aproximação (Lagrange, Newton) para o cálculo numérico das raízes, que são consequência dela.

A ênfase aqui deveriam ser as soluções aproximadas, e nunca as "fórmulas fechadas" para as raízes; o estudante deveria ser prevenido de que nunca deve esperar encontrar tais fórmulas, excetuando casos especialíssimos. Em particular, a fórmula para a resolução de uma equação quadrática deveria apenas ser mencionada nesse estágio e nenhum estudo especial deveria ser devotado àquele tipo de equação...

Do ponto de vista lógico, agora, após vários anos de álgebra, parece chegado o momento para uma descrição axiomática dos números reais. Com isso, não quero dizer naturalmente a construção tradicional dos números reais por meio de cortes de Dedekind ou sequências fundamentais de Cantor, partindo dos números racionais...

O que tenho em mente é bem mais modesto, (e também muito mais útil e esclarecedor). Consiste simplesmente em listar as propriedades básicas dos números reais a partir das quais todas as outras podem ser deduzidas logicamente. É bem conhecido que estas propriedades podem ser resumidas dizendo que os números reais formam um corpo arquimediano ordenado, no qual vale o princípio dos intervalos encaixados.

● *Idade de 15 anos.* A esta altura, o estudo anterior da geometria *plana* do ponto de vista experimental deveria ter preparado o estudante para o enunciado dos axiomas (A) e (B) como dado acima. As consequências destes axiomas deveriam, naturalmente, ser desenvolvidas do ponto de vista geométrico e algébrico, i.e., todas as noções deveriam ser apresentadas com ambas as interpretações. Como feito geralmente, a ênfase deveria ser sobre as transformações lineares, seus váris tipos e os grupos que elas formam. As matrizes e determinantes de ordem 2 aparecem de maneira natural durante esse desenvolvimento.

Quando isso tiver sido feito, o estudo "experimental" da matemática da escola secundária propriamente dita terá sido concluído, pois todos os axiomas já terão sido formulados. Mas no estudo de qualquer teoria há ainda espaço para mudanças de ênfase, quer para o aspecto técnico quer para o aspecto conceitual das noções que devem ser introduzidas. E, segundo nosso princípio, qualquer teoria nova tem mais chances de ser assimilada por meio de seus aspectos técnicos do que enfatizando pontos delicados de dedução lógica.

Isso se aplica em particular ao início do cálculo diferencial para funções de *uma* variável, que julgo se enquadrar melhor nesta faixa de idade. Assim, não vejo nenhum problema no ensino desse tópico atualmente, desde que as noções centrais de limite e de continuidade tenham sido corretamente definidas; é aconselhável omitir as demonstrações de todos os teoremas do cálculo (mas devem-se dar seus enunciados precisos), e concentrar-se sobre as técnicas práticas do cálculo das derivadas e de seu uso para traçar gráficos de funções e resolver equações.

● *Idade de 16 anos.* A parte axiomática deveria continuar a desenvolver as consequências dos axiomas, como um estudo mais profundo dos grupos da geometria plana e, em particular, o uso de ângulos e das funções trigonométricas. A "medida" de ângulos deveria ser definida de maneira precisa (como um homomorfismo do grupo dos números reais sobre o grupo das rotações) mas sua existência aceita sem demonstração. Com isso naturalmente surge a introdução dos números complexos e de sua interpretação geométrica.

Finalmente, um outro tópico de interesse poderia ser a discussão de todas as formas quadráticas possíveis no plano, o que é equivalente à classificação das cônicas.

Sob o aspecto das "técnicas", poder-se-ia iniciar o estudo da noção de primitiva e de área para tipos simples de regiões do plano, com exemplos elementares. O estudante deveria também começar a aprender como traçar curvas dadas sob forma paramétrica.

● *Idade de 17 anos.* Neste ano final da escola secundária, os axiomas da geometria tri-dimensional deveriam enfim ser introduzidos, juntamente com suas consequências usuais, incluindo naturalmente o uso de matrizes e determinantes de ordem 3.

Sob um ponto de vista mais técnico, poder-se-ia explicar o uso de primitivas para calcular tipos simples de volumes, e introduzir a noção de coordenadas polares e o método de construção de uma curva dada por suas equações em coordenadas polares.

Finalmente, os logaritmos e as exponenciais podem ser certamente definidos e estudados nesta idade (sem demonstrações de existência), enfatizando o fato de que são homomorfismos de grupos.

Para finalizar, deixem-me indicar em poucas palavras como esse currículo poderia ligar-se naturalmente com o programa atual dos primeiros anos da universidade. Aí, os tópicos principais são:

a) Álgebra linear em sua forma geral (espaços vetoriais de dimensão arbitrária, teoria geral dos determinantes e matrizes).

b) Formas quadráticas e espaços vetoriais euclidianos de dimensão finita.

c) Derivadas e integrais de funções de várias variáveis reais, com suas aplicações. Equações diferenciais ordinárias e parciais. Geometria diferencial elementar.

d) Teoria elementar dos espaços métricos, espaços de Banach, espaços de Hilbert e outros espaços funcionais. Análise funcional elementar.

BIBLIOGRAFIA

BLUMENTHAL, L.M. – A Modern Introduction to Geometry, New York, Dover, 1980.

BOURBAKI, N. – L'Architecture des mathématiques, F. le LIONNAIS (ed.) Les Grands Courants de la Pensée Mathématique, Paris, Blanchard, 1962.

BOYER, C.B. – A History of Mathematics, New York, John Willey & Sons, 1968.

BRUNER, J.S. – On Learning Mathematics, The Mathematics Teacher, vol 53, 1960, pp.610-619

CAVAILLES – L'Epistémologie d'une Science comme Construction du Concept de son Histoire, Bulletin de la Sociéte Française de Philosophie, 196.

DAVIS, P.J. e Hersh, R. – A Experiência Matemática, Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alves, 1985.

DIENES, Z.P. – The Six Stages in the Process of Learning Mathematics, NFER, 1973.

DIEUDONNÉ, J. – Algebre Linéaire et Géométrie Elémentaire, Paris, Hermann, 1964.

DIEUDONNÉ, J. – New Thinking in School Mathematics, NEW THINKING IN SCHOOL MATHEMATICS, Paris, OEEC, 1961, pp. 31-45 (reproduzido em HOWSON, 1981, pp. 101-107).

EBBINGHAUS, H.-D. – Mathematical Logic, New York, Springer, 1984.

FREUDENTHAL, H. – Review of Linear Algebra and Elementary Geometry (Algebre Linéaire et Géométrie Elémentaire) by J. Dieudonné, American Mathematical Monthly, 74(1967), pp. 744-748, (reproduzido em PIAGET, 1978, pp. 285-290).

GLAESER, G. – La Transmission des Conaissances Mathématiques Hier, Aujourd'hui, Demain. L'Enseignement Mathématique 18(1972) pp. 277-289 (reproduzido em PIAGET, 1978, pp. 208-218).

GOALS FOR SCHOOL MATHEMATICS, Houghton Mifflin, 1963 (reproduzido parcialmente em Howson, 1981, PP. 109-110).
GREENBERG, M.J. – Euclidean and Non-Euclidean Geometry, its Development and History, San Francisco, Freeman, 1980.
GROEN, G e KIERAN, C. – In Search of Piagetian Mathematics, GINSBURG, H.P., (ed.) The Development of Mathematical Thinking, New York, Academic Press, 1983, pp. 351-375.
HALMOS, P – Naive Set Theory, New York, Van Nostrand, 1963.
HILBERT, D. – Grundlagen der Geometrie, Teubner, 1899.
HOWSON, G. – Curriculum Development in Mathematics, New York, Cambridge University Press, 1981.
KITCHER, P. – The nature of Mathematical Knowledge, New York, Oxford U. Press, 1983.
KLINE, M. – Mathematics and the Search for Knowledge, New York, Oxford University Press, 1985.
KLINE, M. – Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, New York, Oxford U. Press, 1972.
KLINE, M. – Mathematics, the Loss of Certainty, New York, Oxford U. Press, 1980.
KLINE, M. – O Fracasso da Matemática Moderna, São Paulo, Ibrasa, 1976.
LAKATOS, I. – A Lógica do Descobrimento Matemático, Provas e Refutações, Rio de Janeiro, Zahar, 1978.
MAC LANE, S. – Categories for the Working Mathematician, New York, Springer, 1971.
MOON, B. – The "New Maths" Curriculum Controversy – An International Story, London, The Falmer Press, 1986.
PIAGET, J. Comments on Mathematics Education, Developments in Mathematical Education, Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education, A. G. HOWSON (ed.), Cambridge U. Press., 1973, pp. 79-87 (reproduzido em PIAGET, 1978, pp. 219-227).
PIAGET, J. – Science of Education and the Psychology of the Child, Longman, 1971 (trecho reproduzido em HOWSON, 1981, pp. 118-120).
PIAGET, J. – L'Initiation aux Mathématiques Modernes, les mathématiques Modernes et la Psychologie de l'Enfant, L'Enseignement Mathématique, 12 (1966), 284-292, (reproduzido em PIAGET, 1972, pp. 182-186).
PIAGET, J. et Alii – La Ensenanza de las Matemáticas Modernas, Jesús Hernández (ed.), Madrid, Alianza Editorial, 1978.
POLYA, G. – A Arte de Resolver Problemas, Rio de Janeiro, Interciência, 1978.
SCHAAF, W. L. – How modern is Modern Mathematics?", The Mathematics Teacher 57(1964), 60-72.
SIMMONS, C.G. – Introduction to Topology and Modern Analysus, New York, McGraw-Hill, 1963.
SNAPPER, Ernst – As Três Crises da Matemática, Humanidades, vol. II, n. 8, julho/setembro 1984, Ed. Univ. de Brasília, Brasília, DF.
THOM, René – Is Modern Mathematics a Pedagogical and Philosophical Error?, American Scientist, nov. 1971 (reproduzido em PIAGET, 1978, pp. 115-129).

THOM, René – Mathématiques Modernes et Mathématiques de Toujours, Jaulin, R. (ed.) Pourquoi la Mathématique?, Paris, 1974, pp. 39-56 (reproduzido em PIAGET, 1978, pp. 140-156).

---

1 – Desenvolvimento das idéias apresentadas pelo autor na mesa redonda Matemática Moderna: Uma Análise Crítica, no II Encontro Nacional de Educação Matemática, em Maringá, PR, 24 a 29 de janeiro de 1988.

2 – Uma comparação entre vários sistemas educacionais e as filosofias que os regem encontra-se em HOWSON, 1981. Tem-se aí, também, um estudo detalhado e metódico das mudanças curriculares, sua filosofia, sua implementação, sua administração, etc., com exemplos de vários países. Ver também MOON, 1986, para relatos crítico-analíticos das experiências européias de reformas curriculares.

3 – Veja KLINE, 1976.

4 – Veja HOWSON, 1981, capítulo 4, principalmente pp. 79-83.

5 – HOWSON, 1981, prefácio, vii.

6 – DIEUDONNÉ, 1961, de que apresentamos uma tradução resumida no anexo a este trabalho.

7 – KLINE, 1976, p. 36.

8 – Adotaremos o termo matemática moderna como sendo o equivalente de "new-math", que é por sua vez tomado como sinônimo de "modern mathematics". A expressão, como usada por nós, não tem a conotação usualmente dada a ela em história da matemática (veja SCHAAF, 1964).

9 – HOWSON,1981,p.132.

10 – HOWSON, 1981, p. 101.

11 – Veja GOALS FOR SCHOOL MATHEMATICS, e também BRUNER, 1960 e DIENES 1973.

12 – A este respeito, ver KLINE, 1972; ver também BOYER, 1968, e DAVIS, 1985.

13 – Ver KLINE, 1972, cap. 40, p. 968, cap. 43, p. 1021 e cap. 51; ver também CAVAILLES, 1946.

14 – Veja EBBINGHAUS, 1984, Introdução, p. 3

15 – Para esta construção, e uma exposição em linguagem não formalizada da teoria dos conjuntos, veja HALMOS, 1963, de que existe uma tradução em português, esgotada, publicada pela Editora Universidade de São Paulo, em 1970.

16 – HILBERT, 1899 do qual existem traduções em inglês, francês e espanhol.

17 – Sobre o que é uma geometria axiomatizada, veja por exemplo, BLUMENTHAL, 1980, ou GREENBERG, 1980, para a evolução das geometrias.

18 – Veja SNAPPER, 1984. Veja também EBBINGHAUS, 1984.

19 – apud HERNANDEZ, 1978, p. 26.

20 – Veja a este respeito, os comentários cortantes e profundos em THOM, 1971, 1974.

21 – Acerca dos perigos da intuição e dos erros que ela causa, veja KLINE, 1985.

22 – Piaget, 1978, Prólogo. A este respeito, veja também LAKATOS, 1978, e as idéias de KITCHER, 1983.
23 – GLAESER, 1972.
24 – Ver BOURBAKI, 1962.
25 – GLAESER, 1972.
26 – DIEUDONNÉ, 1964.
27 – HOWSON, 1981, pp. 100-101.
28 – DIEUDONNÉ, 1961.
29 – DIEUDONNÉ, 1964. Veja a resenha deste livro, FREUDENTHAL, 1967.
30 – PIAGET, 1971.
31 – PIAGET, 1973.
32 – Veja GROEN e KIERAN, 1983, p. 369.
33 – POLYA, 1948.
34 – Veja LAKATOS, 1978.
35 – MAC LANE, 1971.
36 – SCHAAF, 1964.
37 – KLINE, 1976.
38 – Howson, 1981, prefácio, vii.
39 – Dieudonné diz preocupar-se especificamente com a preparação matemática dos candidatos ao ensino universitário. No entanto, uma leitura atenta do texto mostra como suas palavras têm muito a dizer sobre o ensino da matemática em geral na escola secundária. Algumas de suas posições são repetidas no prefácio de DIEUDONNÉ, 1964.
40 – Observamos aqui a preocupação com o estrutural, que não se ocupa de resultados isolados. A respeito da tensão existente entre a matemática estrutural, geral, e os problemas específicos, isolados, concretos, que valem por sua beleza, pelo desafio que consiste em resolvê-los ou por sua utilidade, veja a introdução de SIMMONS, 1963.
41 – Compare com as posições de Thom nos artigos já citados (THOM, 1971, 1974). Veja também o artigo de Glaeser (GLAESER, 1972) para uma posição mais equilibrada, longe dos exageros de Dieudonné e de Thom.
42 – Dieudonné não deixa claro se está se referindo aos futuros alunos das "escolas científicas" [écoles scientifiques], ou a todos os alunos do ensino secundário.
43 – Vemos aqui que Dieudonné tem plena consciência dos problemas psico-pedagógicos envolvidos em sua proposta. Infelizmente, os que decidiram implementá-la julgaram ter solução simples e pronta para eles!
44 – O conteúdo desta parte geralmente não é levado em conta na apresentação das idéias de Dieudonné ou de Bourbaki. Ela mostra uma percepção nítida do perigo de apresentar muito cedo matemática formal e axiomatizada.
45 – Compare isso com a opinião que se tem de Dieudonné de um formalista "à outrance".
46 – Revela-se aqui, a nosso ver, que Dieudonné é um dos que Glaeser, num momento feliz, chamou de "pedagogos sem alunos".

CULTURA E COMPUTADORES NAS AULAS DE MATEMÁTICAS

Aula inaugural ministrada em 20 de junho de 1981 no Instituto de Educação da Universidade de Londres pela Professora Celia Hoyles.

Tradução de Radiwal Alves Pereira

Penso que o objetivo desta aula inaugural seja dar um retrato amplo e pessoal dos aspectos que desafiam hoje a Educação Matemática e indicar possíveis caminhos para o futuro. Com esse impreciso ponto de vista, inevitavelmente a análise que farei será bem pouco precisa e sem muitos detalhes.

Então o que pode ser dito sobre a situação na Educação Matemática? A despeito de muitas e variadas tentativas de inovar o currículo, a matemática escolar ainda continua fragmentária e hierarquizada, com poucos alunos experimentando ou aprendendo a apreciar qualquer síntese entre os seus diferentes tópicos. A maioria dos alunos sentem ansiedade pela Matemática, ou dela se alienam ou com ela se aborrecem. Raramente os alunos se empenham com a Matemática, simplesmente executando as suas tarefas sem que se preocupem com aquilo que efetivamente estão executando. Uma reação típica dos alunos à Matemática pode ser ilustrada pelo seguinte extrato, tirado de uma entrevista com um aluno:

"Bem, parece que sou capaz de construir esses triângulos. Não que eu saiba exatamente, mas cada pergunta eu consigo responder, embora não seja bom em Matemática e esteja sempre atrasado. Acabei sabendo que ia bem por que passei à frente de meus colegas no livro... (Hoyles, 1982, pag.363)"

Agora, gostaria de propor a seguinte questão:

"Há 35 cavalos e 10 patos em um navio. Qual é a idade do comandante?"

Não vou pedir que alguém venha à frente e resolva o problema! O ponto é que ao apresentar esse questão às crianças na escola, muitos começam imediatamente a manipular os dados para obter a resposta, como 35 + 10 = 45, por exemplo! Esta situação parece-me fazer compreender claramente quão absurda deve ser para as crianças a matemática escolar. A propósito (em Matemática sempre temos resposta para questões, não é?) a resposta é 28 – e eu sei porque o comandante é meu conhecido!

Os efeitos do desempenho neste estado de coisas estão bem documentados. Na Inglaterra, por exemplo, a Unidade de Avaliação de Desempenho (APU, 1985) e os levantamentos CSMS (1) (Hart, 1981) revelaram que, depois de horas de ensino, muitas crianças compreendiam pouco os conceitos matemáticos e, depois de horas de prática, muitas crianças continuavam incapazes de executar os mais simples cálculos operatórios.

Este trabalho possibilitou a identificação de lugares comuns entre os alunos. O trabalho de acompanhamento de Hart (1984) e Booth (1981 e 1984) tem também ilustrado a prevalência dos "métodos incorretos das crianças" que podem ser pessoais ou próprios, mas que muitas vezes não são originais, isto é, estão vinculados fortemente às primeiras experiências matemáticas nas quais eles **eram** corretos. Conquanto reconheça o valor de trabalhar com erros, esses erros apenas dão uma visão parcial da aprendizagem das crianças. Por outro lado, respostas corretas podem esconder processos incorretos. Um pequeno exemplo, tirado de uma tese de doutorado (Comer, 1981), pedia resposta para a pergunta: "Que fração da figura está hachurada?" (Veja Fig. 1)

A resposta do aluno estava correta, isto é, um, mas foi obtida com o argumento "porque 8 oitavos dão 1."

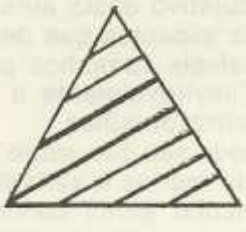


Fig. 1

Mais geralmente, mesmo os "bons" alunos têm idéias básicas incorretas sobre conceitos fundamentais. Por exemplo, Di Sessa (1982) mostrou que alunos de engenharia, que normalmente tinham a sorte de passar em testes envolvendo formalismos de Newton (isto é, impulso dá um acréscimo vetorial ao vetor velocidade), possuíam, em muitos casos, estruturas formais completamente incompatíveis com o conhecimento correto do assunto. Seus experimentos, usando uma "dina-tartaruga", revelaram estruturas aristotélicas subjacentes – isto é, que os estudantes "acreditavam" que o objeto se moveria na direção da força, independentemente de sua velocidade inicial.

Essas idéias sugerem que devemos tentar tornar a Matemática mais "apropriada" (Papert, 1980), isto é, deve-se torná-la mais "contínua" com o conhecimento individual, mais "poderosa" pelo uso em projetos que "fazem sentido" e mais "ressonante culturalmente" pelo reconhecimento do seu papel dentro de contexto social mais amplo (ibid, pag 54). Tentarei nessa aula ressaltar o que deve ser considerado para levar em conta eses princípios e mostrar como, usando a linguagem LOGO na matemática escolar, pode-se fornecer um contexto, no qual, pelo menos parcialmente, esses princípios seriam satisfeitos.

Cultura e Atividade

Em princípio a situação para a Matemática não é tão desoladora como talvez se possa inferir do que eu disse anteriormente. Jean Lave (1982) estudou nos EEUU situações do dia-a-dia em compras em supermercado e na preparação de alimentos. Foi por ela relatado notável sucesso na solução de problemas "in situ", se comparados com testes de papel e lápis envolvendo exatamente as mesmas propriedades aritméticas. "Sucesso na resolução de problemas em sala-de-aula apenas atingia a 59% e, surpreendentemente, atingia 100% nos problemas dentro do supermercado, apesar dos problemas terem envolvido as mesmas propriedades aritméticas em um e outro local" (Lave, 1982, referido por Davis, 1984, pag. 159).

Esta pesquisa mostra como as pessoas podem aplicar e aplica operações e idéias matemáticas como instrumentos em situações que tenham significado para elas, no exterior da chamada "matemática acadêmica", e no interior de seu ambiente diário (no qual às vezes se fala em "matemática popular", Maier, 1980). Além disto, estudos mostraram que, mesmo com pouca idade, as crianças podem atingir relações matemáticas de alto nível e são capazes de aplicar com êxito esses "teoremas em ação" (Vergnand, 1982). Podemos portanto, razoavelmente, deduzir o seguinte: em primeiro lugar, a aprendizagem de Matemática tem sua origem muito cedo na vida e é um processo construtivo (uma perspectiva essencialmente piagetiana); em segundo lugar, devemos tentar construir sobre essa capacidade; em terceiro lugar, o conhecimento matemático deve ser funcional e usado como instrumento de raciocínio dentro da atividade que tenha sentido.

A questão da funcionalidade do conhecimento matemático me conduz para a noção de cultura e como ela é relevante para a matemática em sala-de-aula. Cultura pode-se descrever como conjunto de significados entro de um grupo social. Dentro desse grupo social, o conhecimento matemático evolui na tentativa de resolver problemas ligados ao ambiente. Como exemplo, na Cultura Dioula (Costa do Marfim), Petitto (1978) descobriu que o conhecimento dos princípios da Aritmética penetram na cultura sem exigir qualquer escolaridade. Petitto pesquisou as habilidades matemáticas dos mercadores de tecidos e alfaiates de Dioula e uma das tarefas era um simples teste:

$5 + 15 = ?$ $\qquad 100 \times 3 = ?$ $\qquad 150 + 10 = ?$

Foi por ela constatado que mercadores e alfaiates tiveram bom resultado no teste embora tenha ele sido apresentado de forma abstrata. Um mercador disse:

"Para nós, que não sabemos ler ou escrever, existe uma espécie de cálculo mental que executamos. Logo que você me dá um problema, tenho de pensar um pouco e então dou a resposta. **Temos** que saber contar" (Petitto, 1978, referido por Ginsburg, 1978, pag. 39).

Estudos como esses (que cobrem aspectos numéricos ou não numéricos da Matemática) mostram claramente como a Matemática é usada como instrumento nos grupos sociais. Zaslavsky (1973), por exemplo, identificou sofisticada matemática prática na cultura africana, apesar da aparente ausência de símbolos escritos ou operações abstratas. Devemos todavia tomar cuidado para evitar etnocentrismo na nossa avaliação; porque enquanto a matemática africana possa parecer concreta em nossa perspectiva, pode ser muito adequadamente adaptada ao ambiente local, com seus mais abstratos aspectos, não imediatamente evidentes para nós. O quase "clássico" experimento de Gay e Cole (1967) entre os Kpelles da Libéria bem ilustra isto. Esses dois pesquisadores descobriram que os Kpelles eram muito mais capazes de calcular o número de xícaras de arroz existentes em uma saca do que um grupo de universitários de Yale(2).

Apesar de ser ainda necessária mais pesquisas nessa área, há agora reconhecimento generalizado de que a Matemática não é "livre da cultura" e que devemos tentar distinguir aquilo que podia ser chamado de generalidades (as que são possivelmente relações estruturais com conhecimento teórico) dos modos específicos como os processos matemáticos são modelados e influenciados pelo ambiente e pelas condições culturais. Essas influências são, entretanto, sutis e difíceis de perceber e, muitas vezes, se escondem pela "linguagem comum" aparente da Matemática. Essas afirmações são justificadas pela comprensiva revisão da literatura, empreendida por Wilon (1981), o qual citou linguagens econômica, política e religiosa-filosófica e influências da sociedade na Educação Matemática. O trabalho de Alan Bishop (veja, por exemplo, Bishop, 1979) lançou bastante luz sobre as influências culturais na simbolização e nos métodos de representação em Matemática. Bishop estava trabalhando na Papua, Nova Guiné, e pediu a um grupo de estudantes para construir modelos, com uso de varetas e juntas de plástico, baseados nos desenhos (Fig. 2):

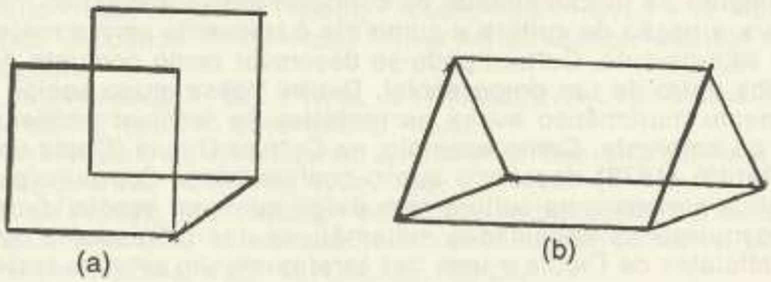


Figura 2: Bishop, 1979, pag. 137

Alguns dos estudantes construíram objetos bidimensionais perfeitamente planos. Então, como educadores, o que podemos aprender com isto? Primeiramente isto nos induz a olhar novamente os desenhos e notar a arbitrariedade das convenções que serviram de base à representação (seria de fato quase impossível ver um cubo como o da Fig 2(a). Em outras palavras "estudos comparativos tornam problemático aquilo já aceito como verdadeiro" (transcrito de Keital, 1982, pag. 120). Em particular, esses estudos mostram-nos que, em Matemática, assim como em outras ciências, o significado das coisas depende de interpretação dentro de algum contexto e a Matemática, infelizmente, possui às vezes linguagem ambígua que é percebida por muitas pessoas e descrita realmente em relato de Cockcroft (Cockcroft, 1982, parágrafo 3). O exemplo de Bishop assinala a crucial importância da relação entre aquilo que se percebe ser o problema e a maneira como é ele representado e como ambas essas coisas são fortemente influenciadas pelo meio cultural e, se estamos falando de situação escolar, pela escola e pelo professor. Isto então me faz considerar qual efeito teria o computador na cultura e no ambiente escolar.

Impacto dos Computadores

Os computadores terão indubitavelmente influência no conteúdo da Matemática nas escolas, como, por exemplo, no equilíbrio entre métodos numéricos e analíticos de prova. Em compensação, toda "mastigação de números" dos primeiros anos de escolaridade e muita manipulação de Álgebra e de Cálculo dos últimos anos tornar-se-ão, cada vez mais, irrelevantes. No entanto, uma observação óbvia **deve** ser feita: o aparecimento dos computadores não terá **necessariamente** qualquer influência nos tópicos fundamentais da prática educacional, porque isto depende crucialmente de **como** os computadores sejam introduzidos no currículo. O computador pode ser usado de vários modos, por exemplo como **professor**, ou como **instrumento** de apoio de alguma fase da aprendizagem, ou como "**aprendiz**", a quem se deve ensinar ou programar (para discussão desses usos de computador, veja Taylor, 1980). Parece-me que é este terceiro uso do computador, provavelmente, que terá mais influência na cultura da sala-de-aula e será portanto o que vou focalizar aqui. A natureza da linguagem usada para programação afetará de novo a interação entre aluno e máquina e falarei sobre o uso do LOGO pelas razões que espero esclarecer.

A linguagem LOGO foi projetada por Seymour Papert e seus colegas (Feurizg e outros, 1969) como um ambiente de exploração de conceitos e processos matemáticos e, desde essa época, tem havido considerável esforço de pesquisa para investigar como os ideais da "Filosofia do LOGO", podiam ser postos em prática. As características do LOGO, como linguagem de programação, importantes pelas suas finalidades na Educação Matemática, têm sido descritas com detalhes em muitos lugares (veja, por exemplo, Noss, 1983 a; Hoyles, Sutherland e Evans, 1985 a) e serão aqui resumidas. Em primeiro lugar, LOGO é prontamente acessível a todas as idades e habilidades por meio do micro-mundo da geometria da tartaruga; em segundo lugar, é extensível, isto é, seu vocabulário pode ser prolongado por construção de novos processos que podem ser denominados e manipulados como "objetos"; em terceiro lugar, é interativo, isto é, qualquer que seja o processo, é executado colocando-o no computador e, desta maneira a realimentação é imediata; em quarto lugar, é processual, isto é, novas instruções ou programas são construídos pela descrição de como funcionam; finalmente, é recursivo, possibilitando a construção de programas curtos e elegantes que captam as estruturas centrais do problema.

Com essas características, LOGO fornece uma representação poderosa e diferente dos conceitos matemáticos. Quando programam em LOGO, os alunos trabalham com uma representação de sua atividade matemática(3), que é poderosa em si mesma, pois diz mais como a idéia é processada do que como é usualmente apresentada (veja, por exemplo, Leron e Zaskis, 1985), mas que também é poderosa por força do contraste com os outros instrumentos existentes, isto é, a atividade pode provocar novas perspectivas do trabalho **tradicional** em Matemática. Espero desenvolver esses pontos com vários exemplos.

Para o propósito de pensar sobre a cultura da sala-de-aula de Matemática, entretanto, há um outro importante aspecto do ambiente da programação de LOGO e que é: esta programação tem o potencial de tornar mais funçionais para os alunos as idéias e os processos da Matemática(4). É útil lembrar o afirmado por Sylvia Weir: "A mais excitante parte do projeto de uso de computador na Educação será o seu efeito, na cultura da sala-de-aula, em atitudes, no ambiente, nos padrões de intervenção e na localização do controle da sala-de-aula" (Weir, 1985, pag. 246). Um poderoso meio de afastar os alunos de exercícios rotineiros e de tarefas sem propósito é torná-los empenhados em projetos de sua responsabilidade. Desta maneira, os alunos aprendem novas técnicas que fazem sentido, isto é, dentro do contexto em que são necessárias; ganham experiência em assumir o papel de **peritos** e podem desenvolver um rico senso de questionar tanto o professor como os seus colegas de grupo. Além disso, nessas situações em "grande escala", é mais provável descobrir a interpretação e a percepção dos alunos dos objetivos da tarefa e observar-lhes as estratégias que adotaram. No trabalho com o LOGO, os alunos podem chegar muito espontaneamente a projetos-desafio com os quais estejam profunda e pessoalmente empenhados. São capazes de gerenciar seus projetos de modo flexível, testando suas idéias e "debugging"* quando conveniente. "Debugging" é aqui uma importante metáfora. No ambiente de programação, os alunos não vêem os erros como sinais de estupidez, porém como fonte de dados que podem usar para compreender melhor as consequências de suas atividades (Brown e Burton, 1978). Explorando e refletindo sobre "enganos" no ambiente interativo do computador, mais provavelmente as crianças abandonarão erros de entendimento, ao invés de "reprimí-los" meramente (veja o trabalho de Di Lessa, referido anteriormente), pois, de acordo com minha experiência, os alunos que precisam de ajuda no "debugging", não suportam que lhes ensinem um "modo correto", mas insistem em descobrir seu próprio caminho na execução do trabalho.

DESENVOLVIMENTO DE CONTEXTO PARA A LOGO DENTRO DA ATIVIDADE DE MATEMÁTICA NA ESCOLA

Intuição e Reflexão

Em primeiro lugar, devemos olhar a atividade de Matemática na escola em geral e considerar a relação entre o uso das estruturas da Matemática nas atividades da escola e o conhecimento teórico; isto é, como as estruturas da Matemática introduzidas nas atividades podem ser elevadas a um nível de observação consciente (Thom, 1973). É importante, inicialmente, levar em conta que a atividade pode as-

* Nota do Tradutor: "Debbuging" é neologismo da Informática, com sentido de "Detecção de erros e seu expurgo". Talvez, no vernáculo, uma palavra adequada seja "Expurgo".

sumir diferentes formas; como Skemp (1979) assinalou, há um modo intuitivo de atividade mental centrada em ações físicas e um modo reflexivo focalizado nas ações mentais. O que desejo aqui enfatizar, entretanto, é a importante "complementaridade"(5) entre esses dois tipos de atividades – sendo diferentes, não podem ser reduzidas uma à outra e, entretanto, devem mesclar-se em todos os níveis e ser lembradas simultaneamente. É na reflexão que se dá forma aos conhecimentos de Matemática e essa reflexão ocorre durante e como parte de matemática informal.

Um ambiente de programação interativo, usando a linguagem LOGO, muito naturalmente pode trazer consigo atividades intuitivas e reflexivas, pois os objetos matemáticos podem ser elaborados por processos de construção denominados e manipulados de variadas maneiras, desde que tenham sido adequadamente modificados e generalizados. Para dar início à elaboração de um programa, vocês necessitam conhecer alguma coisa sobre os sistemas de relações existentes na tarefa, mas durante o processo de construção e da interação com o computador, outras talvez mais poderosas perspectivas dessas relações podem aparecer. Vou-lhes dar um exemplo pessoal do que estou querendo dizer. No último mês de janeiro, um nosso grupo notou o belo teto do século XVII na sala de jantar de Weetwood Hall (Universidade de Leeds), na qual tomávamos parte em um Seminário de Matemática de LOGO. Decidimos elaborar um programa para desenhar o teto. A estrutura imediata vista no teto era formada de retângulos, elipses e hexágonos mistilíneos, os quais foram os "objetos" iniciais do projeto do programa. No entanto, durante a atividade informal de tentar ajustar essas figuras, outra estrutura apareceu (que essencialmente mudou o padrão e o fundamento), a de "orelhas de coelho" (veja Fig. 3). A nova estrutura, consistindo apenas de um mosaico, era mais simples de ajustar e ainda mais poderosa.

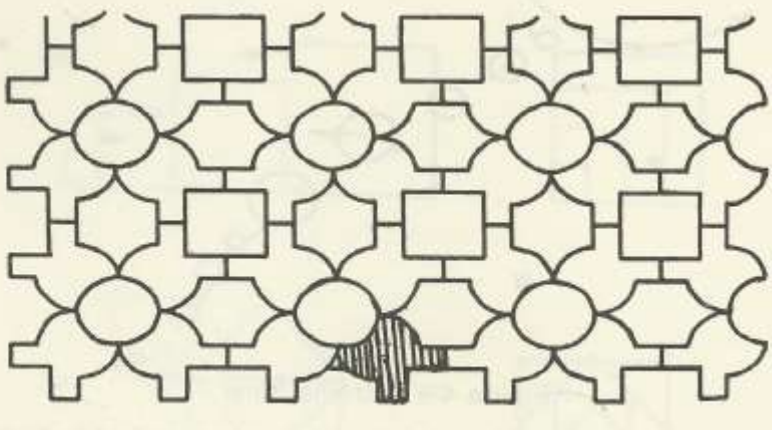


Figura 3: o padrão do teto (a parte hachurada é a estrutura de "orelha de coelho").

Entretanto, quando consideramos a atividade de Matemática usada na escola, imediatamente enfrentamos o dilema de que o significado e o sentido da atividade não são constituídos de diferentes elementos, mas da dinâmica da situação como um todo. As idéias matemáticas, que por seu significado, estão contidas em algum contexto, estão aí portanto "enroladas", por redundância; essa redundância é efetivamente necessária para comunicação e de grande auxílio na previsão do que poderia acontecer. No entanto, é também o caso em que alunos, construindo dessa maneira conceitos no contexto de sua aplicação, possivelmente integrarão propriedades do contexto com o próprio conceito(6). O professor tem, pois, o problema didático de focalizar os pontos críticos da tarefa e de suas relações importantes. O processo é sutil e difícil e, para dizer com franqueza, como observou Brousseau, não é apenas suficientemente bom para realizar com as crianças "alguma manipulação divertida com copos de plástico ou com figuras coloridas e então, de repente, anunciar que "vocês acabaram de descobrir o Grupo Quádruplo deKlein" "(Brousseau, 1984, pag. 116). Aqui novamente o ambiente de programação deve ser de grande auxílio. Os alunos nesse ambiente, com encorajamento dos professores, podem afastar-se da atividade, tornar-se mais atentos aos processos matemáticos em execução e, em particular, tornar-se mais cuidadosos nos exemplos de "super-generalização" (veja Pickthorne, 1983). Além disso, a atividade experimental com os objetos "batizados", permite-lhes que sejam vistos de variados aspectos e "a diferentes níveis de produção e processo". Vou desenvolver mais tarde este assunto. Gostaria ainda de dar exemplo de projeto de aluno, desenvolvido como parte do trabalho do "Projeto de Matemática do LOGO" (Hoyles, Sutherland e Evans, 1985), como ilustração mais evidente de atividades intuitivas e reflexivas.

Nina e Melanie trabalharam durante seis meses no seu sistema solar (Fig. 4).

Figura 4 – Sistema Solar

O projeto estava parcialmente planejado antes do "mãos-à-obra" e, em geral, evoluiu durante a integração da dupla com o computador. Muitos dizem: "Ora, LOGO é apenas desenho de figuras!", mas neste exemplo e no contexto da discussão prévia, quero analisar um pouco mais o que estava acontecendo. Em primeiro lugar o projeto foi criado pelas alunas e, embora não "real" se comparado com nosso modelo atual de sistema solar, era muito real para as crianças que o desenvolviam. A motivação era forte, o interesse completo e as alunas gastaram muitíssimas horas em estender e aprimorar o trabalho. Durante todo o trabalho as duas alunas estavam constantemente experimentando coisas novas e explorando diferentes noções iniciais (por exemplo, usaram movimentos intrínsecos para "navegar" entre dois planetas e um sistema de coordenadas absolutas para localizar as estrelas). Então o que dizer de conteúdo de Matemática e de existir alguma atividade reflexiva? Permitam-me que focalize uma parte do projeto, o desenho das estrelas (veja Fig. 5). Isto não era uma tarefa inicial e a dupla primeiro tentou desenhar o polígono numa só arrancada, uma atividade concreta e intuitiva! Era também difícil de executar, como vocês podem imaginar, porque as estrelas eram muito pequenas! As alunas foram então instadas a parar e refletir sobre a tarefa. Chegaram então à idéia (ajudadas pelo professor) de que deveriam desenhar uma ESTRELA maior e depois reduzí-la! Isto significava que teriam que introduzir um "input" variável no processo da sua ESTRELA, isto é, um fator de redução dos comprimentos dos lados da estrela, como se vê na Fig. 6.

Fig. 5: uma estrela

```
TO STAR 'SHRINK
LT 75
FD :SHRINK * 40
RT 50
FD :SHRINK * 40
RT 150
FD :SHRINK * 35
RT 135
FD :SHRINK * 30
RT 135
FD :SHRINK * 35
END
```

Fig. 6: programa para ESTRELA

Tendo escrito sua representação de uma ESTRELA como se vê no programa da Fig. 6, as alunas desenvolveram uma atividade experimental para ver como funcionava e para descobrir o "melhor input" para seu particular projeto. Melanie descobriu que, multiplicando os comprimentos da sua ESTRELA por 0,5 a tornaria menor e depois predisse que multiplicando por 1,5 também a tornaria menor, pois "1,5 não é um número inteiro" (Hoyles e Sutherland, 1985). A experimentação concreta realizada convenceu Melanie de que estava errada e obrigou-a a refletir sobre o tipo de "inputs" que deveriam de fato reduzir sua ESTRELA.

Instrumentos e Micromundos

Assim como a reflexão "espontânea" sobre os conceitos e processos matemáticos que emerge dos projetos dos alunos, como ilustrado antes, a provisão de novos instrumentos de representação poderia também ser às vezes exigida. Esses instrumentos permitirão que o problema inicial tome uma nova perspectiva (por exemplo, se tivesse sido dado programa para desenhar "orelhas de coelho" para o meu teto!) e também provocar reflexão sobre as representações já em uso. No caso de Nina e Melanie, o ambiente poderia ter sido estruturado de modo diferente para elas se, por exemplo, lhes tivesse sido fornecido o instrumento "RETA" para traçado de sua ESTRELA, pois, como vocês podem notar, sua ESTRELA não tinha lados iguais. Tal instrumento provocaria o traçado de um polígono regular. Seria também possível, em circunstâncias diferentes, fornecer o próprio programa ESTRELA como instrumento; as alunas poderiam então "dar-lhe sentido" como de um produto cobrindo o céu com estrelas, fazendo-as girar, etc. As alunas poderiam também analisar o programa ESTRELA e moldá-lo de modo que o processo de construção da ESTRELA fosse, ao mesmo tempo, visível e também o assunto da experimentação. Isto quase se poderia chamar de micromundo da ESTRELA! É esse tipo de atividade, a nível de produto e processo, a que me referi anteriormente como "exploração a diferentes níveis". A programação LOGO é naturalmente adequada ao desenvolvimento desses micromundos, pois uma quase interminável variedade de estruturas, que dão mais disponibilidades e permitem abreviar outras, podem ser adicionadas ao programa. O "centro" de tal micromundo é o conjunto dos instrumentos do LOGO, o qual, com o "correto" tipo de ambiente pedagógico, atingiria o âmago da experiência de aprendizagem de conceitos específicos de Matemática e suas específicas relações. O desenvolvimento de tais micromundos (7), que envolve a construção mais explícita dos conhecimentos que se espera sejam adquiridos, com uma atividade escolhida, é o assunto do esforço da futura pesquisa a ser feita neste instituto.

Formalização e interpretações do aluno

Na atividade de Matemática, o professor tem também a responsabilidade de apresentar a disciplina como um sistema formalizado de conhecimento e esta tarefa não é nada fácil, em parte por causa dos perigos da "manipulação de símbolo sem sentido". Há também a possibilidade de confundir "absolutismo do conteúdo com a relatividade da forma" (Erlwanger, 1973). Isto foi mostrado em alguns trabalhos de Erlwanger (1973), que descreveu a experiência com um aluno que sabia que a mesma resposta poderia ser expressa em formas diferentes, isto é, 4/4 era o mesmo que 1 e 2/4 o mesmo que 1/2, porém generalizou essa descoberta em uma teoria de relatividade do "Conteúdo" de Matemática, isto é, que a resposta do problema dependia de como tinha sido ele efetivamente solucionado! De novo aqui a exploração ou a elaboração de um programa de computador, como formalizada pela atividade do aluno, tem vantagens óbvias em ajudar a fazer a formalização, "a propriedade do aluno como indivíduo". (Byers e Erlwanger, 1984, pag. 259). O programa, juntamente com o planejamento do aluno e o seu árduo trabalho e a disposição visual na tela, todos tornarão os esquemas do aluno mais compreensíveis ao professor e ajudá-lo-ão na tarefa de melhor entendimento com o aluno. Esses diversos pontos são mostrados no seguinte breve episódio (também referido por Hoyles, 1985): Em visita a uma sala-de-aula, do Projeto LOGO Children (Noss, 1983, 1984) aproximei-me de David, que estava no meio de projeto de desenhar três "Homens" semelhantes em ordem decrescente de tamanho (Fig. 7).

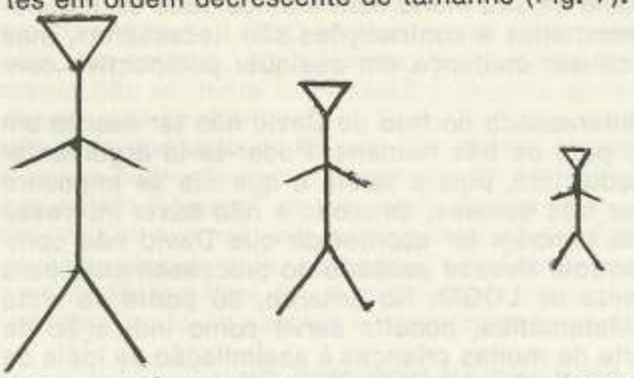


Figura 7

David já tinha escrito o processamento MAN : B : N : A : SIZE, onde B era a medida do comprimento do corpo, N do pescoço, A dos braços e pernas e SIZE da cabeça triangular. David tinha digitado o seguinte processamento:

```
TO MEN
MOVE 1
MAN 55 30 40 35
MOVE 2
MAN 50 25 35 30
MOVE 3
MAN 45 20 30 25
```

onde MOVE 1,2,3 eram sequências simples de comandos usados para as interfaces entre os três homens.

Diversas observações podem ser feitas pela consideração desse único e curto processamento. Em primeiro lugar, David estava usando a subtração como operador para produzir suas formas "semelhantes" e, mesmo quando lhe falaram sobre fatores de escalas, alegremente falou sobre multiplicação e divisão. Isto mostra com clareza como o conhecimento tende a se "fragmentar" e como cada experiência tende a ser "específica de algum domínio", isto é, específica à situação em que foi realizada e não transferível automaticamente para contextos diferentes. Em particular, mostra com clareza a "lacuna" entre o acompanhamento da regra formal (isto é, reprodução verbal ou exercício com papel e lápis) e a representação mental do conhecimento e entre a conservação do que é conhecido e a habilidade de aplicar conhecimentos na prática.

Para investigar um pouco mais, intervim para provocar o que eu esperava ser um "conflito" cognitivo-perceptivo:

Pesquisador: O que acha de reduzí-los mais rapidamente?
Porque não tira 10 em cada "input"?

David alegremente aceitou minha sugestão. Efetivamente chegou a digitar 0 para o pescoço do homem menor e então parou:

David: Oh, ele tem que ter pescoço! Teria sido melhor fazer o homem maior 32!

Ele então voltou atrás e adicionou dois a todos os "inputs" do homem maior! Este episódio mostra muito bem a dificuldade de transferir conceitos e como anomalias e contradições são necessárias, mas não suficientes, para causar mudança em qualquer perspectiva conceitual.

Eu estava também interessada no fato de David não ter escrito um procedimento genérico para os três homens. Poder-se-ia argumentar que o contexto não pedia isto, pois a tarefa a que ele se impusera era apenas de desenhar três homens, de modo a não haver interesse em generalizá-la. Podia também ter acontecido que David não compreendesse como o controle tivesse passado do processamento para algum sub-processamento de LOGO. No entanto, do ponto de vista de um educador em Matemática, poderia servir como indicação de forte resistência de parte de muitas crianças à assimilação da idéia de uma incógnita como um número generalizado, a qual pode ser explicada pela referência a uma pesquisa piagetiana em Educação Matemática (Collis em Booth; 1984, pag 88). Collis, por exemplo, sugere que a distinção feita por Piaget entre o pensamento operacional concreto e o formal, em termos do grau de confiança na realidade das crianças é, provavelmente, refletida na percepção das crianças da natureza de elementos algébricos (Collis, 1973). Enquanto o "pensador de operações concretas" seja capaz de lidar com letras representando valores particulares, embora desconhecidos, somente quando tiver atingido o nível de operações formais é que poderá apreciar completamente a representação generalizada de valores por letras.

Para continuar a história do David, a sugestão que elaborasse um super-processamento com "inputs" variáveis para seus três homens não criou qualquer problema, indicando que o "fluxo de controle", não era o seu problema. Pareceu surpreendente que ele usasse recorrência imediatamente e digitasse o seguinte:

```
TO MEN : B : N : L : SIZE
MOVE : MOVE
MAN : B : N : L : SIZE
MEN : B-10 : N-10 : L-10 : SIZE-10
```

onde MOVE : MOVE era um modo interessante de "generalizar" MOVE 1, MOVE 2 e MOVE 3! Tendo "debugged" (expurgado ?) MOVE : MOVE, o programa tinha rodado. O impacto visual dos homens de cabeça para baixo, formando-se cada vez maiores, à proporção que o programa "enrolava" a tela, provocou um questionamento com muito sentido do seu método de obter figuras semelhantes, assim como um direcionamento para uma excitante exploração dos números negativos!

Então, deixem-me resumir. Em primeiro lugar, implícita em toda essa discussão, estava o reconhecimento do papel crucial da "representação" do problema; se você descobrir a correta representação, então você terá visualizado os principais aspectos e relações do problema e, essencialmente, já o terá resolvido! Com esse esquema e durante os processos complementares de atividade intuitiva e reflexiva (apoiada pelo professor e levando em conta o prévio conhecimento e o meio cultural do aluno), uma relação significativa é elaborada entre a forma e o conteúdo, os quais, ulteriormente, devem ser integrados em forma matemática socialmente desenvolvida. A atividade de programação do LOGO tem potencial para preencher todos esses papéis. No entanto, aqui devemo-nos lembrar que a forma do conhecimento não somente expressará a relação entre conhecimento e atividades, mas também reflete os estilos de pensar e as atitudes moldadas pelo contexto da escola. Os alunos responderão usualmente de maneira coerente com sua concepção da tarefa, mas isto não implica que sejam "lógicos" de um ponto de vista cognitivo, como foi mostrado por um exemplo no começo desta aula. De alguma maneira, nas nossas salas-de-aula, aprendem sensivelmente a **não** usar o que sabem de Matemática (8). Agora voltemos a examinar resumidamente o funcionamento de escolas e de salas-de aula.

NO INTERIOR DA SALA-DE-AULA

Matemática escolar e interações da sala-de-aula

Inicialmente é importante investigar o que é efetivamente a Matemática escolar. Boa indicação pode ser dada olhando detidamente para livros-textos e programas. Um importante aspecto que salta aos olhos é o alto grau de padronização em diferentes países (notado por Brian Wilson em seminário, março de 1985). Na terminologia de Bernstein (1971), a Matemática pode ainda ser considerada como tendo forte classificação e forte estrutura, que tem consequência naquilo que é olhado como "tendo conhecimento" e como esse conhecimento é adquirido. A Matemática escolar tende a ser definida "do lado de fora" e dominada pelas tarefas que se executam e pelo sistema de exames. A Matemática escolar pode também ser olhada como um assunto distinto, isto é, distinto até mesmo da própria Matemática. Tem seus modos próprios de trabalho (por exemplo, passo a passo e hierárquica) e até nomes e símbolos próprios para seus conceitos (veja Dorfler e Mc Clone, 1985). Assim, o que é chamado de "transposição didática" pelos educadores franceses, tem aparecido onde "o tratamento adaptativo do conhecimento matemático" realiza-se de modo a "transformá-lo no conhecimento a ser ensinado" (Balacheff, 1984, pag 35).

Então devemos olhar para dentro da sala-de-aula para obter alguma visão de como e porque isto tem acontecido. Inicialmente, é muito evidente que a interação social entre professor e aluno, tanto no ensino em classe, como em trabalho individualizado e pequenos grupos, ainda tende a refletir e reforçar um modelo de transmissão ensino-aprendizagem, onde o conhecimento e o saber estão somente com o professor. Bauersfeld (1980) identificou um padrão consistente de comunicação "afunilada" na matemática da sala-de-aula, onde as perguntas do professor cada vez mais limitam a resposta do aluno e contribuem para um prático comportamento programático por parte do aluno, por exemplo, para adivinhar o que está na mente do professor (Voigt, 1984, pag 34).

Professores e alunos assim parecem "coniventes", tanto em insistir em um currículo altamente estruturado e repetitivo, como em evitar expor-se a quaisquer diferenças fundamentais de compreensão. A propósito, Lorenz (1980) observou:

Não há outro assunto no qual o professor seja tão tentado a interpretar mal a resposta (numérica) correta de um estudante, como analisando a estrutura subjacente do problema; em nenhum lugar o estudante deseja mais intensamente respostas imediatas estereotipadas ou disfarçadas de modo a esconder problemas de compreensão. (Lorenz, 1980, pag 18).

Permitam-me dar um exemplo que observei recentemente. Mandaram um aluno substituir $x = 4$ na expressão $3x - 8$. O aluno se atrapalhou e pediu ajuda:

Professor: Quanto vale 3×4?
Aluno: 12
Professor: Quanto vale $12 - 8$?
Aluno: 4
Professor: Tudo bem, e então?
Aluno: Acabei de escrever 4, pois não? Tudo bem!

No padrão da interação mostrada aqui o professor parece ser obrigado a perguntar aquilo que o aluno podia responder e que pudesse mostrar que o conhecimento tinha sido "adquirido". Porém, como foi comentado por Brousseau, "o significado desse conhecimento é inteiramente dependente do que foi deixado para o aluno fazer como atividade" (Brousseau, 1984, pag 11). (aqui muito pouca!). O significado dependerá também de como a interação estabelece alguma relação com a perspectiva do aluno com o problema. Aqui, por exemplo, imaginem o impacto das perguntas do professor a um aluno que pensasse, como é comum, que 3x dava trinta de algum modo! No entanto, Brousseau (1984) também tem interessante interpretação desse tipo de interação, isto é, quando se usam perguntas deste modo, seja para transformar, deformar ou mesmo fazer desaparecer o conhecimento, "essa transformação não é da responsabilidade do professor, é antes importa por compulsões que ele não pode evitar". (ibid, pag. 111) Brousseau argumenta que com as restrições do que é denominado compromisso didático, um conjunto de regras que estabeleça relações entre o conteúdo ensinado, os alunos e o professor, "o professor é conduzido, em certas circunstâncias a esvaziar a situação de aprendizagem de qualquer conteúdo cognitivo" (ibid, pag. 112)

Assim, os alunos chegam à solução interpretando o compromisso didático e não empenhando-se na tarefa. A observação a ser aqui feita é que esse tipo de interação é um produto necessário da relação entre professor e aluno na presente situação da sala-de-aula de Matemática, a despeito das intenções e das preferências dos professores. Acredito ser isto exagero, pois há alguma evidência de que as crenças do professor têm sutil e significativo papel em moldar a prática da sala-de-aula (veja por exemplo, Lerman, 1983), mas esse ponto de vista deve ainda ser confirmado.

A posição das meninas.

O tipo de interação mostrado acima tem efeitos significativos, além de esvaziar a Matemática de sentido! Para tornar-se matemático e mais tarde ter sucesso no assunto é geralmente aceito que certos atributos são exigidos – por exemplo, independência, persistência e uma perspectiva global intuitiva que é a "procura" por padrões e por estruturas. No entanto, a maioria dos alunos não consegue trilhar o caminho do sucesso na escola, a não ser seguindo instruções muito bitoladas. Professores e alunos parecem engajados em ciclo recursivo de dependência.

Naturalmente, isto não é completamente verdadeiro para todos os alunos e alguns – principalmente meninos – tentam isolar-se deste dogmatismo da matemática escolar (Grieb e Easley, 1984). Não tenho tempo aqui de analisar o fenômeno extremamente complexo de diferença de atitudes em um e outro sexo e o seu desempenho na Matemática. É óbvio ser fenômeno muito mais amplo que o dos estudos em sala-de-aula. No entanto, esses estudos revelam interessantes diferenças e mostram como as meninas são particularmente forçadas neste ciclo de dependência.

Num levantamento da pesquisa realizada na última década, das interações de alunos e de alunos com professores e com professoras nas escolas primárias, Brophy observou que:

Estudos que têm examinado aspectos qualitativos sutis do comportamento dos docentes sugerem que eles estejam encaminhando meninos mais para a auto-confiança e para esforçar-se mais pelo desempenho próprio, enquanto meninas são encaminhadas mais para o conformismo e para o cuidado no seu trabalho (Brophy, 1985, pag 5).

No que diz respeito à escola secundária, Brophy achou o quadro confuso, mas se for focalizada a matemática das salas-de-aula (em oposição às outras disciplinas do nível secundário), pode-se dar algum apoio às descobertas de Becker (1981) que relatou ser o ambiente da classe de geometria para os meninos "acadêmica e emocionalmente favorável", porém para as meninas, "benignamente tolerante" (Becker, 1981, referido por Brophy, 1985, pag 31).

Analisando especialmente escolas primárias, Grieb e Easley (1984) tentaram identificar o mecanismo social que permite alunos brancos de classe média, criativos nos seus estudos de Matemática, a conservar atitude independente, em constraste com alunas brancas e estudantes de minorias raciais, os quais são encorajadas a assumir atitude mais dependente. Fenômeno básico semelhante foi observado na pesquisa de Valerie Walberdine, aqui neste Instituto, no Projeto Moças e Matemática. Ela observou que professores primários têm uma tendência avassaladora para rotular meninas como "maduras" e meninos como "tendo potencial"!

Sumário e conclusões

Farei agora uma tentativa de arrumar os temas que tentei desenvolver nesta aula. Foi enfatizada a importância das atividades produtivas de sala-de-aula que colocam o conhecimento num contexto pessoal e tendo finalidade para os alunos. Os professores têm então a tarefa de experimentar refletir com os alunos sobre o que foi feito, para extrair os aspectos matemáticos e, finalmente, identificar o que resultou do conhecimento cultural e dos sistemas padronizados de Matemática.

Para melhorar hoje a Educação Matemática nas nossas escolas, sinto que devemos:

. descobrir maneiras nas quais a Matemática possa ser usada como instrumento em atividade significativa (do ponto de vista do aluno);

. durante essa atividade, a formalização deve surgir da interação dinâmica com o conteúdo e originada da resposta refletida dos alunos (com ajuda do professor) às representações desse conteúdo, emergindo dos instrumentos usados pelos alunos na atividade.

Tudo isso só pode acontecer no ambiente de sala-de-aula onde as tentativas criativa e exploratórias dos alunos não sejam reprimidas pela ênfase do desempenho e pela obediência a excessivas regras e, em particular, sejam de algum modo livres dos vínculos do compromisso didático.

Portanto, é exigido um modo significativamente diferente de educar e de agir nas salas-de-aula e um poderoso catalisador para a mudança – e é isto que espero ter mostrado, que o computador teria potencialmente o mais significativo papel a desempenhar. Em ambiente de programação LOGO, como foi descrito, poder-se-ia deslocar o foco da atividade escolar do aprendizado de propriedades formais de sintaxe e códigos simbólicos para a descoberta do seu significado semântico e, assim fazendo, permitir-se-ia que a interpretação do currículo feita pelos alunos se tornasse mais visível e tendo maior influência no modo como a aprendizagem seria organizada.

Apresso-me a dizer, entretanto, que LOGO não é uma panacéia. Há aspectos de sua linguagem que certamente poderiam ser aperfeiçoados para finalidades didáticas e essas modificações serão, sem dúvida, incorporadas às linguagens de programação e aos mais potentes ambientes baseados em computador do futuro. Em compensação, algumas crianças irão trabalhar de modo automático com o LOGO, tornar-se-ão competidoras, porém não compreenderão necessariamente o que estejam programando (Hoyles, Sutherland e Evans, 1985a, pag. 217-226). Nós, que temos trabalhado com programação LOGO, temos visto crianças construindo longos programas para jogos de guerra, acompanhados com deslocamentos de cores! Essas reações isoladas (de fato são isoladas) não são surpreendentes – a aprendizagem de LOGO pelos alunos não pode ser separada das influências maiores da escola e da sociedade. Deve ser aceito (e de fato não é coisa ruim) que a programação em LOGO seja uma atividade não-trivial na qual as crianças enfrentam difíceis problemas de natureza conceitual. Certamente endosso por completo os comentários de Joel Hillel que a atividade LOGO não deve ser trivializada "polindo todas as suas dificuldades" (Hillel, 1985, pag 28). Nós, como pesquisadores e professores, devemos reconhecer e tentar compreender nossos "fracassos". Há também outras questões que devem ser examinadas, como, por exemplo, o tempo exigido para esse tipo de trabalho, com implicações no planejamento curricular e na distribuição dos tempos na escola a como os professores possam ser apoiados para realizar esse trabalho, o qual tem implicações na própria educação.

Ao executar a minha análise hoje, tentei aglutinar algumas idéias teóricas de largo grupo de disciplinas e gostaria de enfatizar a importância desse tipo de esforço na Educação Matemática. Isto é, devemos tentar desenvolver uma perspectiva teórica mais compreensiva e mais poderosa, de modo que sejamos mais capazes de interpretar as respostas das crianças ao aprendizado de Matemática.

Desenvolvendo uma perspectiva mais teórica, devemos, entretanto, ter em mente a complementaridade essencial entre o conhecimento prático e o teórico – isto é, o conhecimento prático deve dar subsídios para a criação do conhecimento teórico e ao mesmo tempo, servir como "teste" para inferências teóricas. A propósito, Thom afirmou:

Por aparente paradoxo, os problemas locais exigem meios não-locais para sua solução, enquanto a inteligibilidade exige a redução de fenômenos globais a situações típicas locais, cujo fértil caráter torna-as compreensíveis (Thom, 1973, pag. 116).

Com isso em mente e como tributo aos numerosos ensinamentos que adquiri por ter tido a felicidade de ter trabalhado com muitos professores e seus alunos, terminarei com um exemplo de um trabalho em LOGO, feito por crianças, no nosso projeto de pesquisa no Instituto. No meu modo de pensar, esse episódio peculiar também capta a importante influência da situação social na resposta do aluno, a qual, espero, seja uma feliz mostra de alguns dos pontos que foram hoje apresentados.

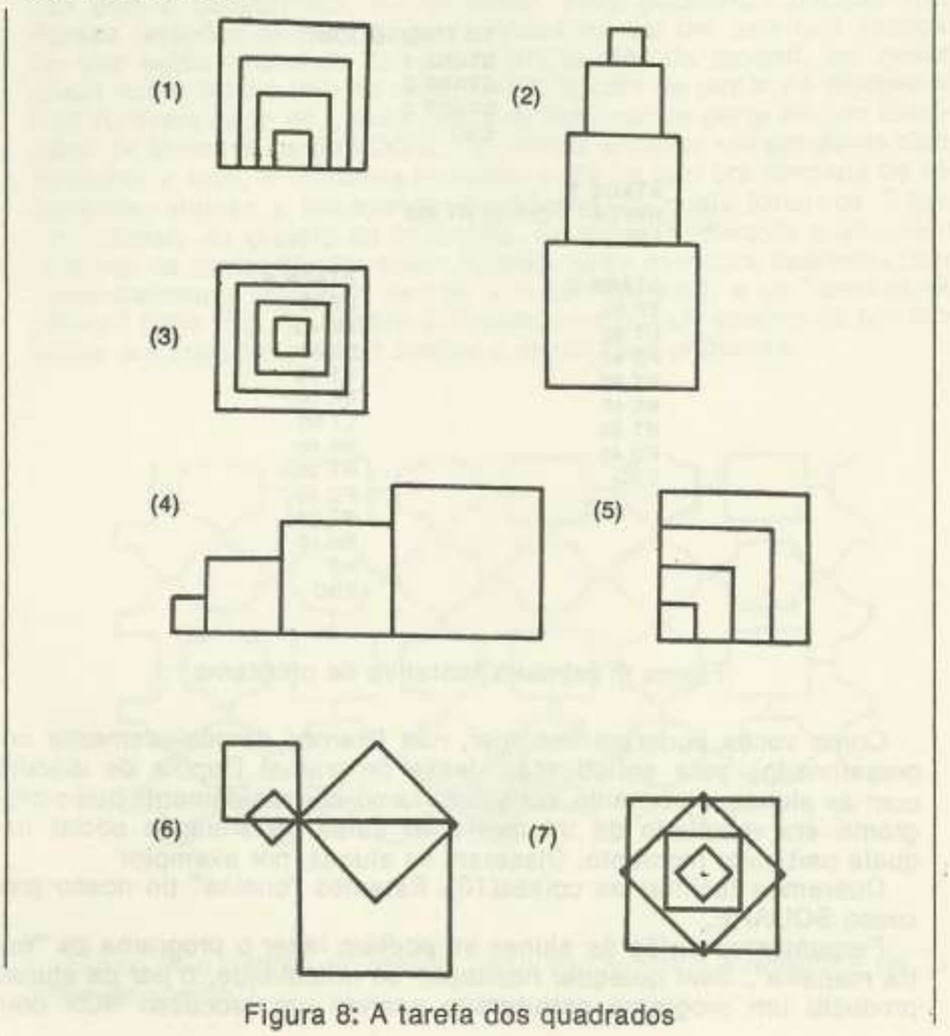


Figura 8: A tarefa dos quadrados

da Fig. 8. A situação proposta pretendia encorajar as moças a considerar a semelhança de estrutura entre os sete desenhos, de modo que fossem induzidas a usar um padrão modular nos seus programas (9). É bem sabido que isto não é, de maneira alguma, um progresso "natural" na programação com LOGO (Leron, 1985). A propósito, Hillel suscintamente escreveu: "Por um lado, a naturalidade do LOGO é devido a ressonâncias com o esquema gráfico das crianças, porém a ligação da programação com o desenho estabelece uma "análise processual" da tarefa (Hille, 1985).

As alunas foram também incumbidas de comunicar seus programas a outra dupla de crianças do seu grupo, de tal maneira que estas últimas pudessem ser capazes de identificar qual figura tinha sido efetivamente desenhada.

Quando Sandra e Joana chegaram ao programa número 6, escreveram uma lista longa de comandos diretos em um programa que chamaram THISISGOOD:

```
TO THISISGOOD
STAGE 1
STAGE 2
STAGE 3
END

STAGE 1
REPEAT 3 (BK 20 RT 90)
END

STAGE 2
BK 60
RT 90
FD 40
RT 90
BK 40
RT 90
FD 40
END

STAGE 3
LT 45
FD 40
BK 40
RT 90
BK 30
LT 90
BK 40
RT 90
FD 10
RT 90
BK 10
HT
END
```

Figura 9: primeira tentativa de programa

Como vocês puderam imaginar, não ficamos demasiadamente impressionados pela sofisticação desse programa! Depois de discutir com as alunas, no entanto, conscientizamo-nos rapidamente que o programa era resultado da interpretação delas da situação social naquele particular momento. Disseram as alunas, por exemplo:

Queremos facilitar as coisas(10). Estamos "cheios" do nosso processo SQUARE.

Perguntamos então às alunas se podiam fazer o programa de "outra maneira". Sem qualquer hesitação ou dificuldade, o par de alunas produziu um programa estruturado usando um processo BOX com "input" variável (Ver Fig. 10). Comparando os dois programas, Sandra disse: "Aquele é mais rápido (referindo-se à versão dos comandos diretos), porém se você esticou desenvolvendo, você pode ter os boxes...!"

```
BOX 2
LT 45
BOX 1.5
LT 135
BOX 1
LT 45
BOX 5
END

BOX :SCALE
FD :SCALE * 30
RT 90
FD :SCALE * 30
RT 90
FD :SCALE * 30
RT 90
FD :SCALE * 30
RT 90
END
```

Figura 10: segunda tentativa de programa

Finalmente, apenas para assegurar que sabíamos que o programa estruturado estava dentro de sua capacidades, elas o batizaram EASY!

NOTAS

1 – Conceitos de Matemática e de Ciências do 2º grau.
2 – Entretanto, talvez deva ser notado, como assinalado por Ginsburg (1978, pag 31), que os culturalmente atrasados estudantes de Yale (do ponto de vista dos Kpelles) conseguiram, depois de certa prática, emparelhar-se com os Kpelles!
3 – Frequentemente acompanhado pela dimensão visual muito poderosa.
4 – Essas espécies de atividades têm base no trabalho de Piaget e na distinção entre abstração empírica e refletida.
5 – Veja Otte (1985) para descrição do conceito de "complementaridade".
6 – Além disso, propriedades de um conceito matemático obtidas por dedução devem ser sintetizadas com as que foram captadas dessa espécie de experiência (veja Dorfler e Mc Clone, 1985).
7 – Em colaboração com o Dr. Richard Noss.
8 – Há alguma pesquisa que pode ser citada para corroborar esse ponto. Por exemplo, nos EEUU, Carpenter e outros (1981) descobriram que alunos da 1ª série, ao resolver problemas orais en-

volvendo operações ainda não estudadas, tiveram melhor desempenho do que o mostrado por alunos mais velhos aos quais se ensinara antes essas operações. Semelhantemente Kerslake (1981) descobriu que a capacidade das crianças em somar ou subtrair frações diminuía entre as idades de 11 e 15 anos.

9 – Essa tarefa foi desenvolvida a partir de uma idéia de Rouchier e Samuracau (1985).

10 – Isto significava que Sandra e Joana pensavam, em completo contraste conosco, que uma lista de comandos diretos seria mais fácil de ser interpretada pela outra dupla, do que um padrão modular.

References

APU Retrospective Report (1985). A Review of Performance in Mathematics 1978-1982. HMSO, London.

Balachieff, N. (1984), "French research activities in didactics of mathematics, some key words and related references', in Theory of Mathmatics Education Occasional Paper 54, November, pp.33-41. Institut für Didaktich der Mathematik (IDM), Universität Bielefeld.

Bauersfeld, H. (1980), quoted in Lorenz (1980).

Becker, J. (1981). 'Differential teacher treatment of males and females in mathematics classes', Journal for Research in Mathematics Education, Vo. 12, pp. 40-53.

Bernstein, B. (1971). 'On the Classification and Framing of Educational Knowledge', in M. Young (ed.), Knowledge and Control, pp 47-69. Collier Macmillan, London.

Bishop, A (1979), 'Visualising and mathematics in a pre-technological culture', Educational Studies in Mathematics, Vol. 10, pp. 135-46.

Booth, L.R. (1981), 'Child methods in secondary mathematics', Educational Studies in Mathematics, Vo. 12, pp. 29-40.

(1984), Algebra: Children's Strategies and Errors. NFER-Nelson, Windsor.

Brophy, J. (in press), 'Interactions of male and female students with male and female teachers', in L. Wilkenson and C. Merritt (eds.) Gender Influences in Calssroom Interaction. San Diego Academic Press.

Brousseau, G. (1984). 'The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics', in Theory of Mathematics Education Occasional Paper 54, November, pp.110-19, Institut für Didaktich der Mathematic (IDM), Universität Bielefeld.

Brown, J.S. and Burton, R.R. (1978), 'Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills', Cognitive Science, Vol.2, pp.155-92.

Byers, V. and Ewlwanger, S. (1984), 'Content and form in mathematics', Educational Studies in Mathematics, Vol. 15, pp. 259-75.

Carpenter, T.P., Hiebert, J. and Moser, J.M. (1981). 'Problem structure and first grade children's initial solution processes for simple addition and substraction problems', Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 12, pp. 27-39.

Cockcroft, W.M. (1982), Mathematics Counts. HMSO, London.

Christiansen, B. and Howson, A. (1985 in press), Perspectives on Mathematics Education, D. Reidel Publishing Company, Holland.

Collis, K (1973), 'Study of concrete and formal operations in school mathematics', unpublished PhD thesis, University of Newcastle, New South Wales, Australia.

Comer, T. (1981), 'Analysing children's erros in mathematics', unpublished MPhil thesis, Cambridge University.

Davis, R.B. (1984). Learning Mathematics. The Cognitive Science Approach to Mathematics Education. Croom Helm, Kent, UK.

Di Sessa, A. (1982), 'Unlearning Aristotelian physics: a study of knowledge-based learning', Cognitive Science, Vol. 6, No. 1 (January-March), pp.37-75.

Dorfler, W. and McLone, R. (1985 in press), 'Mathematics as a school subject', in Christiansen and Howson (1985, no prelo).
Erlwanger, S.H. (1973). 'Benny's conception of fules and answers in IPI mathematics, Journal of Children's Mathematical Behaviour, Vol. 1, No.2, pp.7-26.
Feurzig, W., Papert, S., Bloom, M., Grant, R. and Solomon, C. (1969), Programming Languages as a onceptual Framework for Teaching Mathematics, Report 1889. Bolt, Beranck and Newman, Cambridge, Mass.
Gay, J. and Cole, M. (1967), The New Mathematics and an Old Culture: A Study among the Kpelle of Liberia. Holt, Rinehart and Winston, New York.
Ginsburg, H. (1978), 'Poor children, African mathematics and the problem of schooling', Educational Research Quarterly (Special Edition), Vol. 2, No. 4, pp.26-44.
Grieb, A. and Easley, J. (1984), 'A primary school impediment to mathematical equity: case studies in rule-dependent socialization', Advances in Motivation and Achievement, Vol.2, pp.317-62.
Hart, K. (ed) (1981). Children's Understanding of Mathematics. John Murray, London.
(1984). Ratio: Children's Strategies and Errors. NFER-Nelson, Windsor.
Hillet, J. (1985), "On squares, triangles and houses", For the Learning of Mathematisc (no prelo).
Hoyles, C. (1982). 'The pupil's viwe of mathematics learning', Educational Studies in Mathematics, Vol. 13, pp.340-72.
(1985). 'Developing a context for Logo in schol mathematics', Journal of Mathematical Behaviour, Vol. 4, No. 2(no prelo).
and Noss, R. (eds.) (1985), Proceedings of Logo and Mathematics Education Conference. University of London Institute of Education.
, Sutherland, R. and Evans, J. (1985a.), The Logo Maths Project, Interim Report to Leverhulme Trust.
Shuterland, R. and Evans, J. (1985b), 'Two children and Logo', Micromaths, Vol. I, No. 1, pp.7-13.
Keital, C. (1982), 'Mathematics education and educational research in USA and USSR: two comparisons compared', Journal of Curriculum Studies, Vol. 14, No.2, pp.109-26.
Kerslake, D. (1981), 'Graphs', in K. Hart (ed.), Children's Understanding of Mathematics 11-16, pp. 120-36, John Murray, London.
Lave, J. (1982), 'Arithmetic procedures in everyday situations', paper presented a the fourth Annual Conference of the Cognitive Science Society, Ann Arbor, Michigan, 4-6 August (quoted in Davis, 1984, p.159).
Lerman, S. (1983), 'Problem-solving and knowledge-centred – the influence of philosophy and mathematics teaching', International Journal of Mathematics Education, Science and Techonology, Vol.14, No.2, pp.59-66.
Leron, U. (1985), 'Logo today: vision and reality', The Computing Teacher, February, Vol. 12, No.5, pp.26-32.
and Zaskis, R. (1985), 'Mathematical induction and computational recursion' in Hoyles and Noss (eds.) (1985).

Lorenz, J.H. (1980), 'Teacher-student interactions in the mathematics classroom: a review'. For the Learning of Mathematics, Vol.I, No.2, November, pp.14-19.
Maier, E. (1980), 'Folk mathematics', Mathematics Teaching, No.93, December, pp.21-24.
Mellin-Olson, S. (1985 in press), The Politics of Mathematics Education.
Noss, R. (1983a), 'Doing maths while learling Logo', Mathematics Teaching, No.104, September, pp.5-10.
(1983b), Starting Logo: Interim Report No.1 of the Chiltern Logo Project. Adivisory Unit for Computer-based Education, Hatfield, UK.
(1984), Children Learning Logo Programming: Interim Report No.2 of the Chiltern Logo Project, AUCBE, Hatfield, UK.
Otte, M. (1985). Mathematics, Computers and School from Epistemological Perspective, Occasonal paper 68, Institut für Didaktik der Mathematic der Universitat Bielefeld.
Papert, S. (1980), Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas. Harvester Press, Brighton, UK.
Petitto, A.L. (1978), 'Mathematical thinking in tailors and merchants in Ivory Coast', unpublished PhD, Cornell University.
Pickthorne, B. (1983), 'Error factors: a missing link between cognitive science and classroom practice? Instructional Science, Vol. II, pp.281-312.
Rouchier, A. and Samurcay, R. (1985), 'Didactical studies of teaching situations. What about Logo?' in Hoyles and Noss (eds) (1985).
Skemp, R.R. (1979), 'Goals of learning and qualities of understanding', Mathematics Teaching, No.88, September, pp.44-9.
Taylor, R.P. (ed.) (1980) The Computer in the School: Tutor, Tool, Tutee, Teachers' College Press, New York.
Thomm, R. (1973), 'Modern mathematics: does it exist?' in A.G. Howson (ed.), Developments in Mathematics Education: Proceeding of Second International Congress on Mathematical Education, Cambridge University Press. pp.194-209.
Vergnaud, G. (1982), 'Cognitive and developmental psychology and research in mathematical education: some theoretical and methodological issues', For the Learning of Mathematics, Vol. 3, No.2, pp.31-41.
Voigt, J. (1984). Pattern and Routines in Classroom Interactions, Institut für Didktik der Mathematik (IDM), Universitat Bielefeld.
Walkerdine, V. (1985), Girls and Mathematics Project, University of London Institute of Education (personal communication).
Wier, S. (1985 in press) Cultivating Minds: A Logo Casebook. London: Harper and Row.
Wilson, B. (1981), Cultural Contexts of Science and Mathematics Education: A Bibliographic Guide. A. Wrigley and Sons, Leeds.
Zaslavsky, C. (1973), Africa Counts. Prindle, Weber and Schmidt, Boston.

[illegible] (1987) [illegible] in the [illegible] a review', For the Learning of Mathematics, Vol. 7, No. 3, November, pp. [illegible].

Mason, J. (1987) [illegible], Mathematics Teaching, No. 121, December, pp. [illegible].

Mellin-Olsen, S. (1987 in press) The Politics of Mathematics Education, [illegible].

Noss, R. (1984) 'Doing maths while learning Logo', Mathematics Teaching, No. 104, September, pp. [illegible].

[illegible] (1985) 'Starting Logo: Interim Report Part 1 of the Chiltern Logo Project', Advisory Unit for Computer-based Education, Hatfield, UK.

[illegible] (1986) Children Learning Logo Programming, Interim Report No. 2 of the Chiltern Logo Project, AUCBE, Hatfield, UK.

Otte, M. (1983) 'Mathematics, Computers and Schools: new Fundamental Ideas?' Occasional paper [illegible], Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Papert, S. (1980) Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas, Harvester Press, Brighton, UK.

[illegible] (1978) [illegible] thinking in children and adolescents [illegible], unpublished PhD, [illegible] University.

Schoenfeld, A. (1983) 'Beyond the purely cognitive: belief systems, social cognitions and metacognitions as driving forces in intellectual performance', Cognitive Science, Vol. 7, pp. [illegible].

[illegible], A. and [illegible], H. (1986) [illegible] studies of learning situations, what about Logo?', in Hoyles and Noss (eds) (1986).

Skemp, R.R. (1976) 'Relational understanding and instrumental understanding', Mathematics Teaching, No. 77, December, pp. [illegible].

Taylor, R.P. (ed.) (1980) The Computer in the School: Tutor, Tool, Tutee, Teachers College Press, New York.

Thom, R. (1973) 'Modern mathematics: does it exist?' in A.G. Howson (ed.), Developments in Mathematical Education: Proceedings of Second International Congress on Mathematical Education, Cambridge University Press, pp. [illegible].

Vergnaud, G. (1982) 'Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues', For the Learning of Mathematics, Vol. 3, No. 2, pp. [illegible].

Voigt, J. (1984) Pattern and Routines in Classroom Interactions, Institut für Didaktik der Mathematik (IDM), Universität Bielefeld.

Walkerdine, V. (1986) [illegible] and Mathematics [illegible], University of London Institute of Education (personal communication).

Weir, S. (1987 in press) Cultivating Minds: A Logo Casebook, London, Harper and Row.

Wilson, B. (1981) Cultural Contexts of Science and Mathematics Education: A Bibliographic Guide, [illegible], Leeds.

Zaslavsky, C. (1973) Africa Counts: Number and Pattern in African Culture, Prindle, Weber and Schmidt, Boston.

HÁ ALUNOS IRRECUPERÁVEIS?

Relato de uma experiência realizada no Colégio Pedro II –
Unidade Escolar Centro

Elza Maria Braga e
Vera Maria Rodrigues

1. Apresentação do Projeto

Em Outubro de 1984, um grupo de professores da Unidade Centro do Colégio Pedro II, preocupado com os elevados índices de reprovação (20%) e de jubilação (10%) que vinham ocorrendo na 1ª série do 2º grau e sentindo que, ao trabalhar com turmas heterogêneas, e tentando dar um mesmo tratamento a alunos com características diferentes, não se atendia à maioria dos alunos, elaborou um documento pedindo autorização para tentar alternativas metodológicas que viessem a solucionar os problemas vivenciados. O documento foi encaminhado à Secretaria de Ensino, com o aval da Direção da Unidade. Como resposta, a Secretaria de Ensino solicitou que o grupo elaborasse um Projeto a ser desenvolvido com turmas de 1ª série no ano de 1985.

Os objetivos desse Projeto eram:

a) experimentar a aplicação de novas alternativas técnico-administrativas e pedagógicas, levando em conta as peculiaridades de aprendizagem dos alunos bem como o contexto sócio-econômico e cultural;

b) coletar elementos que identificassem, na 8ª série, alunos que tivessem concluído o 1º grau com um fraco desempenho, a fim de encaminhá-los, no 2º grau, para turmas com atendimento especial nas disciplinas que apresentavam maior índice de reprovação (Física, Química, Matemática e Inglês).

2. Organização das Turmas

Ao concluir-se o ano letivo de 84, de cerca de 600 alunos da 1ª série do 2º grau, mais de 60 tinham sido jubilados e 106 reprovados após a recuperação. Isto fez com que se formassem três turmas, em caráter experimental, só com alunos repetentes.

A composição dessas turmas foi a seguinte:

Turma 102 : alunos reprovados em 3 ou mais disciplinas;

Turma 104: a metade dos alunos reprovados em 3 ou mais disciplinas e a outra metade com reprovados depois da prova final de recuperação;

Turma 106: alunos reprovados em, pelo menos, uma disciplina após a prova final de recuperação.

Observe-se, ainda, que, na turma 102, foram agrupados todos os alunos reprovados em Inglês, o que permitiu que o programa desta disciplina fosse adiantado nas duas outras turmas.

Antes do início do ano letivo foram convocados pela Direção do Colégio, SOE, STE e Equipe do Projeto:

a) os alunos para serem entrevistados e dizerem de sua vontade ou não de participarem do Projeto;

b) os responsáveis pelos alunos, para esclarecê-los, quanto à criação das turmas, explicando os objetivos do trabalho e a disponibilidade para horário integral, pelo menos, duas vezes por semana.

3. Formação da Equipe

Em reuniões entre representantes da Direção, SOE, STE (Seção Técnica de Ensino), coordenadores de disciplinas e equipes docentes de cada disciplina, foram apresentados esclarecimentos sobre a proposta experimental, sendo então solicitado pela Direção que os professores que acreditassem na proposta se apresentassem como voluntários para integrar a Equipe, que ficou assim constituída:

– dois professores de Português, sendo um para aulas de redação;

– dois professores de Matemática, dos quais um responsável por uma das turmas e pela Coordenação Geral do Projeto (nas aulas de apoio os dois trocavam turmas);

– dois professores de Educação Física;

– um professor de cada uma das outras disciplinas: Física, Química, Desenho, Biologia, História, Geografia, Educação Moral e Cívica, Inglês e Francês;

– um professor representando a STE;

– uma orientadora educacional.

4. Desenvolvimento do Projeto

Para implantação do Projeto, alguns professores fizeram revisão e adaptação de seus programas. Foram, também, estabelecidas aulas de apoio, pela manhã, inicialmente de Português, Física, Química, Matemática e Inglês – em alguns casos ministradas por professores diferentes dos da tarde. No 2º semestre, depois dos resultados das avaliações dos dois primeiros bimestres, passaram a ser oferecidas aulas de apoio de todas as disciplinas, conforme as necessidades dos alunos. Para estas aulas havia dois tipos de indicação – alunos de média baixa, encaminhados pelo professor, ou alunos voluntários, com qualquer média, dando-se preferência, naturalmente, àqueles que mais necessitassem de assistência programada pela escola.

Foram elaborados e aplicados, semestralmente, questionários de análise do trabalho destinados a alunos e professores. Muitas das modificações introduzidas ao longo do processo resultaram de sugestões apresentadas nesses questionários.

O sistema de avaliação do Colégio é por meio de graus numéricos. O aluno é avaliado ao longo de quatro bimestres e, caso não obtenha média 7 (sete), é submetido a uma prova final, quando então a média passa a ser 5 (cinco). As provas dos 2º e 4º bimestres são provas únicas, isto é, iguais para todas as turmas de uma mesma série de cada Unidade e elaboradas pela equipe de professores de cada disciplina. Se o aluno não lograr aprovação em até 3 disciplinas, ele terá oportunidade de realizar provas de recuperação em fevereiro, quando são abandonados todos os resultados e o grau mínimo para aprovação é 5 (cinco). Cada equipe de professores da mesma série elabora um roteiro de estudos para essas provas, constando dos assuntos indispensáveis à promoção à série seguinte.

Foi concedida ao Projeto uma certa flexibilidade dentro do sistema de avaliação, o que permitiu procedimentos diversos, como: diferenciação entre provas únicas, um variado e farto número de avaliações, e atribuição de notas aos trabalhos desenvolvidos nas aulas de apoio. A permissão para realizar provas únicas diferentes não deve ser vista como uma forma de facilitar a aprovação dos alunos: é comum as provas aplicadas serem mais difíceis que as das demais turmas. Por vezes, é preciso elaborar provas diferentes para que se atenda à metodologia adotada. Quando não há muita diferença metodológica, os alunos são submetidos às mesmas provas que os das outras turmas, e ocorre, às vezes, apresentação de um melhor desempenho.

5. Avaliação e conseqüentes modificações do Projeto

Ao final de 85, chegou-se ao seguinte resultado:

TURMAS	APROVADOS DIRETO	APROVADOS APÓS RECUP.	JUBILADOS DIRETO	APÓS RECUP.	ABANDONOS	TRANC. MATRÍCULA	TOTAL DE ALUNOS
102	4	16	5	2	2	—	29
104	9	15	—	2	—	—	26
106	14	8	—	1	3	1	27
TOTAL	27	39	5	5	5	1	82

Aprovação: 80,49%
Jubilação: 12,20%
Abandono/Trancamento: 7,31%

Como o número de alunos reprovados nas demais turmas da 1ª série se mantivesse elevado ao final do ano de 1985, ainda foi necessário manter três turmas inteiras de repetentes em 1986.

Após análise dos questionários de alunos e professores e sucessivas reuniões da Equipe para avaliar os aspectos positivos e negativos da experiência desenvolvida, foram planejadas várias mudanças para aquele ano:

– aulas curriculares e de apoio ministradas por um só professor (excetuando Física e Matemática, cujos professores estavam impossibilitados de dar aulas no outro turno por desempenharem funções administrativas, ficando o apoio a cargo de outro professor);

– apoio obrigatório, desde o início do ano, nas disciplinas em que o aluno repetisse;

– sistema de avaliação do apoio – variável conforme o professor;

– possibilidade de exclusão do apoio, conforme o aproveitamento do aluno, em qualquer época; caso contrário, continuaria até o final do ano letivo (excetuando a disciplina História, em que o aluno permaneceria, em virtude da forma como foi planejado);

– organização das turmas de forma aleatória (único critério: reprovados em Inglês agrupados na turma 104, junto com os alunos de Francês);

– estabelecimento de calendário de reuniões da Equipe (quinzenais por grupos dos mesmos dias e bimestrais para toda a Equipe).

O critério de agrupamento adotado visava permitir um melhor atendimento dos alunos nas aulas de língua estrangeira. Apesar de o programa de Inglês ser o mesmo para todos os alunos, o fato de os alunos das turmas 102 e 106 não serem repetentes nesta disciplina propiciou que o curso fosse dado com maior profundidade, abordando textos mais difíceis. Por outro lado, a turma 104, nas aulas de língua estrangeira, se dividia em dois grupos mais ou menos iguais: o de Francês e o de Inglês. Este era constituído por alunos repetentes, portanto, necessitando de um ritmo mais lento, para atender às suas dificuldades. O de Francês, apesar de heterogêneo, por ser pequeno, dava oportunidade ao professor de atender às diferenças individuais. Os resultados finais mostraram que foi acertada esta constituição das turmas.

Diferenças de características entre as turmas de 1985 e 1986:
- quanto à idade:
  - em 1985 - mais velhos;
  - em 1986 - mais jovens (muitos com 14 anos).
- quanto à origem, em sua maioria:
  - em 1985 - de outras escolas;
  - em 1986 - do próprio Colégio Pedro II.
- quanto a deficiências e interesses:
  - em 1985 - mais deficiências, porém, interesse maior;
  - em 1986 – menos deficiências, porém, interesse menor.

O resultado final de 1986 foi o seguinte:

TURMAS	APROVADOS DIRETO	APROVADOS APÓS RECUP.	JUBILADOS DIRETO	APÓS RECUP.	ABANDONOS	TRANC. MATRÍCULA	TOTAL DE ALUNOS
102	15	07	01	03	01	–	27
104	13	05	08	–	–	–	26
106	18	01	01	01	01	–	22
TOTAL	46	13	10	04	02	–	75

Aprovação: 78,66%
Jubilação: 18,66%
Abandonos/Trancamentos: 2,66%

Merece destaque especial o índice de aprovação direta destas turmas: 63%. O das demais turmas de 1ª série ficou em torno de 40%.

Ao fazer o planejamento para 1987, a Equipe decidiu, de acordo com a experiência dos anos anteriores e com base nas opiniões apresentadas por alunos e professores nos questionários de avaliação, fazer algumas modificações nas aulas de apoio:

– tratamento uniforme por parte de todos os professores;

– obrigação de frequência pelos alunos reprovados, desde o início do ano, até o fim do 1º semestre;

– liberação dos estudantes que obtivessem média igual ou superior a 5 (cinco), com possibilidade de indicação de outros, ao longo do ano;

– consideração da nota do apoio, através de média ponderada;

– maior colaboração por parte do SOE que entrevistaria os alunos, principalmente os faltosos costumazes ou atrasados reincidentes.

Em 1987 ocorreram mudanças na Equipe. Os professores de Física e Matemática foram substituídos por outros que podiam dedicar-se exclusivamente às turmas. A professora de Matemática, entretanto, foi mantida pela Equipe como Coordenadora do Projeto.

Por outro lado, em 1986, os alunos mais fracos da primeira turma do Projeto, ao serem promovidos à 2ª série, apresentaram dificuldades, ocorrendo elevado índice de reprovação ao final do ano. Este resultado veio confirmar a idéia inicial da Equipe de que os alunos mais fracos necessitariam de acompanhamento na 2ª série, o que não seria preciso para aqueles que lograssem aprovação direta. Em 1987, fez-se uma tentativa diferente: os alunos que lograram aprovação direta foram incluídos nas turmas regulares de 2ª série, enquanto os promovidos mediante recuperação constituíram, com outros alunos em igual situação, oriundos das demais turmas, uma turma de 2ª série que seria objeto de atenção especial. Os professores de Física, Inglês e Matemática acompanharam o grupo. Foi constituída uma equipe de professores que adotou metodologia semelhante à de 1ª série.

Esta equipe reuniu-se algumas vezes durante o ano para analisar o desempenho da turma. As aulas de apoio só foram ministradas no 2º semestre nas disciplinas em que ocorreu maior dificuldade. A experiência deu bom resultado e o índice final de aprovação da turma foi de 71,4%.

Também o SOE introduziu modificações em 1987 relativamente à orientação educacional do Projeto e à introdução da figura de uma psicóloga no grupo. Estas mudanças trouxeram novo impulso ao trabalho, pois muitos alunos do Projeto necessitam de acompanhamento especial, o que passou a ser feito.

Quanto à faixa etária e à origem, os alunos de 1987 não diferiam muito dos de 1986, revelando, no entanto, menor empenho. Isto preocupou muito a Equipe, provocando uma atenção maior por parte de todos, na tentativa de mudar a atitude dos alunos. O que foi conseguido, como se constata no resultado final de 1987.

TURMAS	APROVADOS DIRETO	APROVADOS APÓS RECUP.	JUBILADOS DIRETO	APÓS RECUP.	ABAN-DONOS	TRANC. MATRÍ-CULA	TOTAL DE ALUNOS
102	05	18	04	01	01	06	35
104	21	11	–	03	02	01	38
106	19	02	–	05	01	01	28
total	45	31	04	09	04	08	101

Aprovação: 72,25%
Jubilação: 12,87%
Abandonos/Trancamentos: 11,88%

Ao final do ano letivo ficou decidido que:

– seria feita uma ficha avaliativa para que fossem apreciados pontos importantes como assiduidade, pontualidade, cumprimento dos deveres de casa, etc. O professor daria um conceito que seria, depois, anexado ao grau de aula de apoio;

– seria organizado um arquivo com o material utilizado pelos professores;

– seria tentada uma integração disciplinar, na medida do possível;

– nas reuniões, não só se estudariam os chamados "casos difíceis" mas também se fariam relatos de experiências já realizadas com sucesso;

– trabalhar-se-ia com duas turmas de repetentes da 1ª série e uma turma vinda da 8ª série, formada por alunos que tinham obtido aprovação em até três disciplinas, em recuperação;

– haveria aulas de nivelamento, no primeiro mês, em turno inverso, delas devendo participar todos os alunos. Para tanto, as turmas seriam divididas em 2 grupos que se revezariam quinzenalmente;

– seriam indicados pelos professores os alunos que necessitariam de apoio ao final do primeiro bimestre, sem se excluir a possibilidade de o aluno ser voluntário.

6. Avaliação por parte dos alunos

Quando este projeto foi lançado, houve uma forte oposição por parte de pessoas que julgavam uma temeridade agrupar alunos repetentes, pois achavam que isto causaria uma discriminação dentro da escola. Jamais isto aconteceu: há dezenas de depoimentos escritos por alunos dizendo exatamente o contrário e pedindo que a experiência se estenda às outras turmas.

Dentre os pontos positivos apontados pelos alunos destacam-se: o relacionamento professor/aluno; a paciência dos professores para explicar; a homogeneidade das turmas; as aulas de apoio. Estas, porém, às vezes são apontadas como ponto negativo – alegam ser cansativo ficar o dia inteiro no Colégio (o que pode chegar a ocorrer em até 4 dias da semana, conforme e situação do aluno). Entretanto, muitos dizem não haver pontos negativos.

Se ainda não se conseguiu recuperar inteiramente os alunos do ponto de vista cognitivo, do ponto de vista afetivo o êxito é total. O aluno repetente, no início de cada ano, é alguém com a auto-estima no mais baixo nível. A forma como ele é tratado, o fato de o Colégio dividir com ele e com sua família a responsabilidade pelo fracasso, as oportunidades que são oferecidas, a atenção e o carinho por parte dos professores e demais membros da Equipe fazem com que, no decorrer do ano, estejam completamente adaptados. Muitos declaram que a reprovação e consequente participação no Projeto é o que de melhor podia acontecer em sua vida escolar.

7. Avaliação por parte dos professores

A confiança que os alunos depositam no Projeto é, em parte, reflexo do clima que se conseguiu estabelecer na Equipe. Cada professor tem suas características pessoais, sua metodologia, porém, todos têm em comum entusiasmo pelo que fazem e estão satisfeitos com a oportunidade que lhes foi dada de trabalhar do modo que julgam adequado. As reuniões periódicas têm propiciado uma aproximação maior entre os professores e isto repercute na prática docente: os alunos sentem que há união na equipe, que há esperança no seu desempenho e procuram retribuir.

Dentre os pontos observados pelos professores, destacam-se os seguintes:

– a liberdade de escolha do material a ser apresentado, podendo este inclusive sofrer modificações após avaliação. Daí poder-se dizer que o professor do Projeto talvez seja um eterno pesquisador do material ideal.

– participação em reuniões periódicas onde se analisam fiel e objetivamente os resultados.

A isto se acrescentam as peculiaridades dos alunos apontadas pelos professores:

– falta de hábito de estudo sistemático;

– expectativa ansiosa de resolução de suas dificuldades pelo professor;

– falta de concentração e de uso do raciocínio.

Diante desta situação, é necessário que o professor se discipline em benefício do alunado e não ceda ao impulso de facilitação do processo, o que o impediria de desenvolver, nas turmas a seu cargo, o raciocínio e a criatividade.

8. Conclusão

Da análise dos aspectos positivos do Projeto, a Direção da Unidade Centro vem estendendo, na medida do possível, às demais turmas do Colégio, as aulas de apoio e as reuniões das equipes envolvidas com cada grupo de turmas da mesma série (professores, SOE e STE).

Como resposta aos que julgavam serem esses alunos irrecuperáveis – que não existe para professores que trabalham com idealismo e gosto pelo que fazem – apresentam-se os resultados dos exames vestibulares: da primeira turma do Projeto Experimental (cerca de 60 alunos foram promovidos à 2ª série), 20% aproximadamente, obtiveram aprovação. Antes do Projeto, eram jubilados a cada ano 10% dos alunos de 1ª série do 2º grau. Ao final do primeiro ano de trabalho, este índice caiu para cerca de 3% e, desde então, vem-se mantendo em torno dele. A aprovação nas turmas do Projeto tem sido sempre bem superior à das demais turmas da 1ª série. A Equipe sabe que ainda há muita coisa a ser melhorada e sonha com o dia em que não haja mais turmas de alunos repetentes, porém tem a certeza de estar no rumo certo.

ANALISANDO LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

*Kátia Regina Ashton Nunes**
*Maria Antonieta Pirrone***

Este texto foi organizado a partir das conclusões obtidas na realização da pesquisa O COTIDIANO DO LIVRO DIDÁTICO NA ESCOLA, pesquisa esta que está proposta no documento o LIVRO DIDÁTICO – ESTUDO E AÇÕES, solicitado pelo INEP em 1985, tendo sido encaminhada através de três vertentes, quais sejam:

1. As Características do Livro Didático e os Alunos, coordenado por Lúcia Moysés.
2. O Modo como o Livro Didático é Introduzido nos Cursos de Formação de Professores, coordenado por Regina Leite Garcia.
3. A Articulação do Conteúdo e do Método nos Livros Didáticos, coordenado por Nilda Alves.

O nosso trabalho foi desenvolvido nesta terceira vertente, a qual, em convênio com a Faculdade Latino Americana de Ciências Sociais (FLACSO) e com a Universidade Federal Fluminense, fixou-se na análise dos livros didáticos das diversas disciplinas de 1ª a 4ª séries do 1º grau, que foram mais comprados pela FAE (Fundação de Assistência ao Estudante) em 1985 para distribuição em todo o território nacional em 1986.

Percebendo que o livro didático afigura-se como único instrumento acessível à maioria dos professores de nossa escola pública, determinando desde o programa a ser cumprido até as atividades diárias de sala de aula, pretendemos através desta análise contribuir para uma utilização mais consciente deste instrumento. Para tal, buscamos perceber a forma como os conteúdos eram articulados, tendo como eixos de nossa análise a observação quanto aos possíveis erros conceituais, a forma através da qual esses conteúdos eram trabalha-

* Professora secundária de Matemática da rede pública estadual do Rio de Janeiro. Auxiliar de pesquisa na Universidade Federal Fluminense, tendo curso de Aperfeiçoamento em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro.
** Professora secundária de Matemática da rede pública estadual do Rio de Janeiro, aluna do Mestrado em Educação da UFF e auxiliar de pesquisa na Universidade Federal Fluminense.

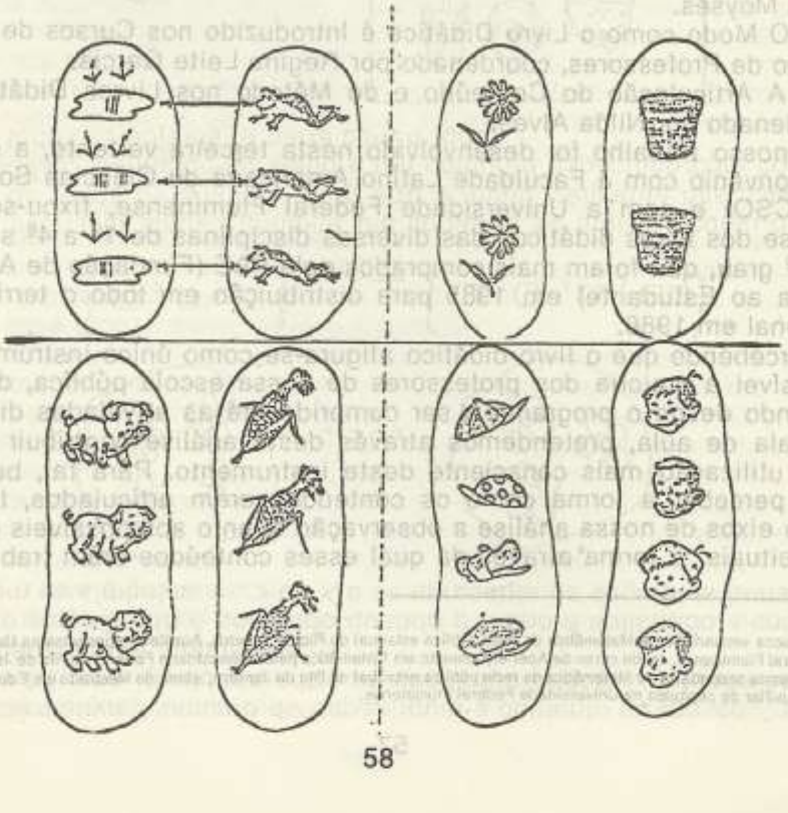
dos, assim como a linguagem, as ilustrações e os exercícios apresentados.

Enumerar todos os aspectos negativos observados na análise dos livros didáticos e sobre eles requerer a crítica do leitor não é o objetivo deste artigo, mesmo porque não pretendemos haver esgotado uma análise que deve ser contínua na prática pedagógica.

Pudemos constatar que os livros analisados, em geral, subestimam a capacidade do aluno e não se preocupam em seguir as etapas que a criança deve percorrer para apreender os conceitos. Apelam em geral para a memorização, não estimulando a criatividade. Além de não retratarem a realidade vivida pelos alunos e de reforçarem ideologias conservadoras, os livros pecam ainda pela falta de sequência lógica e clareza. Inexiste nos livros didáticos preocupação de incorporar no processo de ensino a prática social da criança. Não é nossa opinião que se deva reduzir a matemática unicamente aos seus aspectos prático-utilitários, mas sim que a aprendizagem desta ciência seja significativa e não automática. Acreditamos que o domínio do conteúdo matemático seja, sem dúvida alguma, um dos caminhos que nos levará a transformações sociais, pois concordamos com Saviani quando este afirma que o dominado somente deixará de sê-lo se dominar aquilo que o seu dominador domina.

Apresentamos a seguir alguns exemplos de falhas constatadas nas análises que efetuamos. A noção de correspondência biunívoca é normalmente apresentada de forma incorreta e reduz-se sempre a um traçado mecânico de riscos, segundo um modelo.

Faça a correspondência um a um:



O conceito de medida não é trabalhado, uma vez que deveria ser introduzido a partir da idéia de comparação de grandezas. No entanto, é apresentado já em termos de uma medida padrão, não dando ao aluno possibilidade de perceber a necessidade da mesma.

A divisão de decimal por decimal, bem como a divisão e multiplicação por 10, 100 e 1000 reduz-se normalmente a um conjunto de regras.

Divisão por 10

Na divisão por 10, desloca-se a vírgula **uma casa** para a esquerda.

Exemplo 1	Exemplo 2
67,3 ÷ 10 = 6,73	0,5 ÷ 10 = 0,05

Divisão por 100

Na divisão por 100, desloca-se a vírgula **duas casas** para a esquerda.

Exemplo 1	Exemplo 2
765,4 ÷ 100 = 7,654	9,2 ÷ 100 = 0,092

Divisão por 1 000

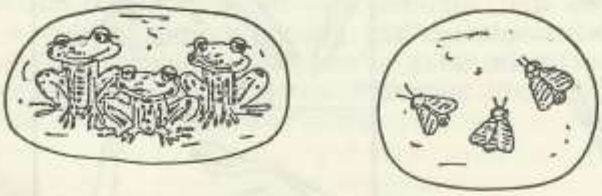
Na divisão por 1 000, desloca-se a vírgula **três casas** para a esquerda.

Exemplo 1	Exemplo 2
385 ÷ 1 000 = 0,385	97,4 ÷ 1 000 = 0,0974

Verificamos que frequentemente confunde-se a propriedade de dois conjuntos possuírem o mesmo número de elementos com a igualdade entre estes conjuntos.

Ligue os elementos dos conjuntos com um traço.

Depois, dê o número de elementos dos conjuntos e complete com o sinal $\boxed{=}$.



Esses conjuntos têm .... elementos.

conjunto de sapos **igual a** conjunto de moscas

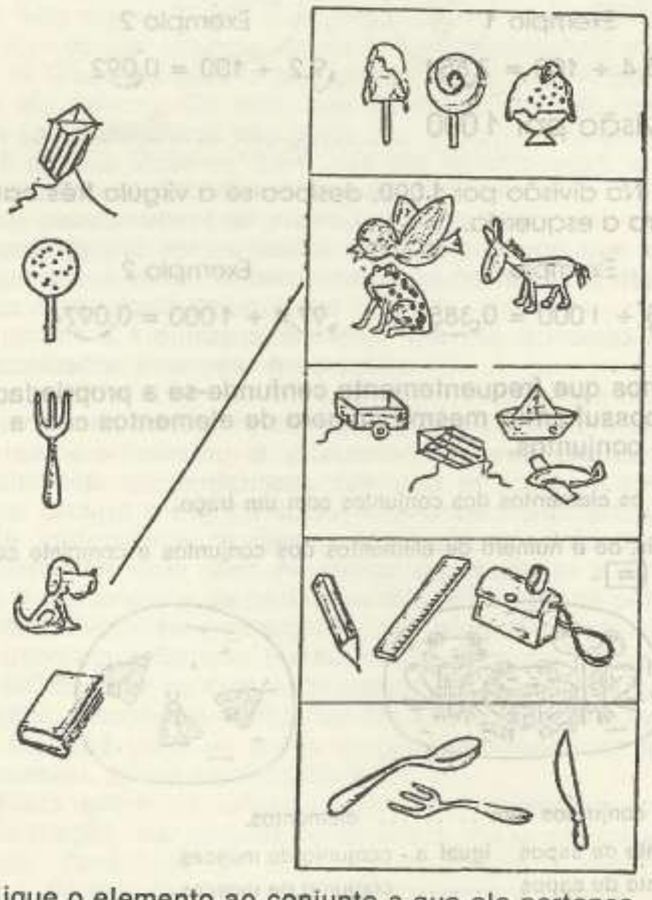
conjunto de sapos ...... conjunto de moscas

A afirmativa "conjunto de sapos igual a conjunto de moscas" sugere que há uma igualdade entre os conjuntos dados. Confunde-se aí a qualidade com a quantidade.

Erro semelhante é cometido quando o aluno é solicitado a completar com os símbolos = , > ou < e se apresenta os seguintes itens:

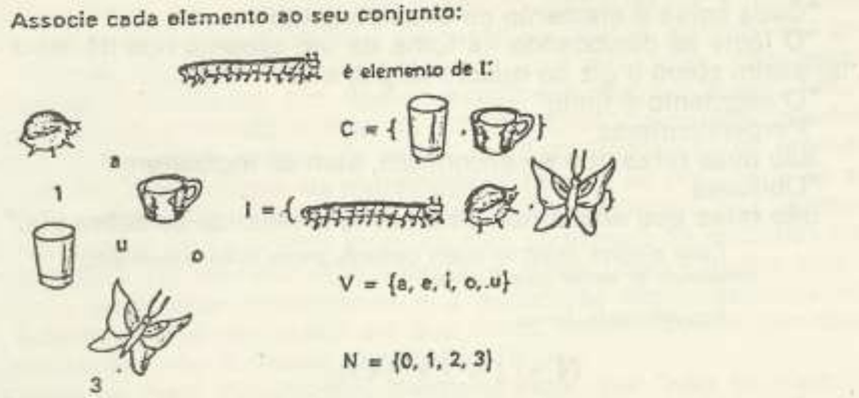
{□, ○, △} ---- {□, ○, △, ▭}

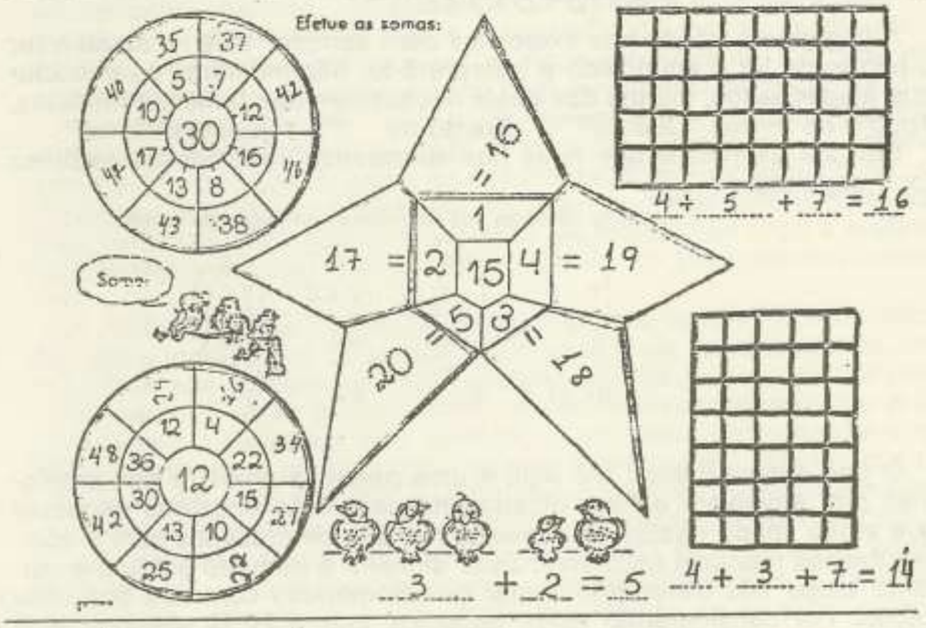
No exercício abaixo toma-se **um** conjunto de animais como o conjunto de todos os animais. Este erro é muito frequente nas coleções analisadas. Confunde-se sempre um conjunto específico com conjunto de todos os objetos (a parte com o todo).

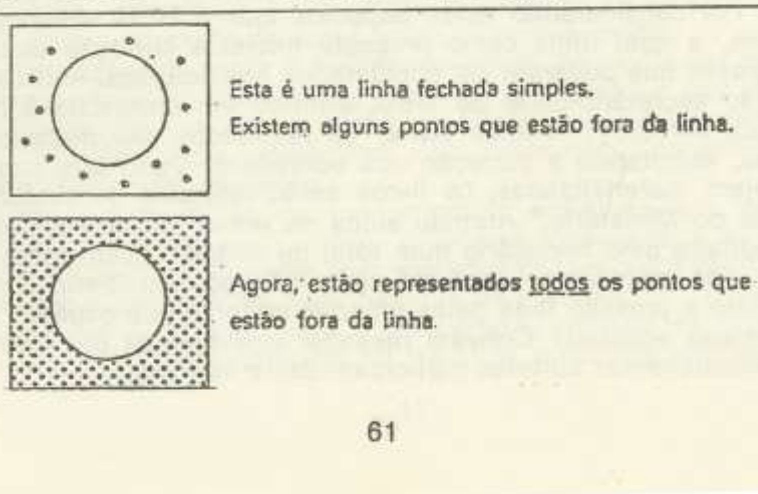


Ligue o elemento ao conjunto a que ele pertence.

No que diz respeito às ilustrações, percebemos que estas muitas vezes, em nada contribuem para o entendimento do conteúdo desenvolvido e exercitado. Vejamos:







Achamos dispensável, nas séries iniciais, o excessivo rigor na linguagem e na simbologia matemática, mas nem por isso justifica-se torná-la vulgar a ponto de sua inadequação induzir a graves erros como veremos a seguir:

"Cada coisa é elemento de cada conjunto".

"O lápis se deslocando na folha de um caderno nos dá idéia de reta, assim como o giz no quadro negro, etc."

"O segmento é finito"

"Perpendiculares
São duas retas que se encontram, sem se inclinarem."

"Oblíquas
São retas que encontram uma outra, inclinando-se sobre ela."

Esses números estão na ordem crescente porque estão aumentando, começando do menor para o maior.

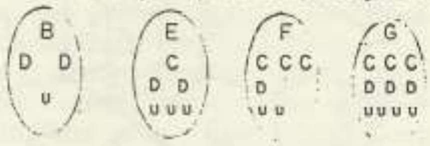
Representando, temos:

$$N = \{1 < 2 < 3 < 4\}$$
$$N = \{3 < 5 < 7 < 9\}$$

A linguagem usada nos exercícios nem sempre leva o aluno a ter o hábito de ler o enunciado e interpretá-lo. São inúmeros os enunciados inadequados, muitos dos quais necessitam dos famosos modelos. Tudo é da forma: "Quanto?" , "Quanto no ?" , "Quantas vezes?".

Um dos exercícios que mais nos surpreendeu em nossas análises foi o seguinte:

Escreva os numerais que representam os conjuntos abaixo:



B= 21 E=..... F=..... G=.....

O que apresentamos até aqui é uma pequena amostra dos problemas que envolvem o livro didático no país. Não podemos esquecer que estão sendo gastos anualmente milhões de cruzados com a compra desses manuais escolares. Esse dinheiro é dinheiro público e portanto todos nós deveríamos estar comprometidos com sua boa utilização. Foi considerando estes aspectos que o MEC solicitou esta pesquisa, a qual tinha como proposta inicial a correção dos erros mais graves que puderam ser constatados nas análises. Aluízio Sotero, então secretário-geral do MEC, afirmou em entrevista à revista VEJA de 04/03/87: "Vamos enviar os resultados das pesquisas às editoras, solicitando a correção dos conteúdos. Caso tais correções não sejam materializadas, os livros serão retirados do catálogo de compras do Ministério." Afirmou ainda na entrevista, que a pesquisa seria editada pelo ministério num total de 400.000 exemplares e entregue aos professores. Isso até agora não ocorreu. Seria o motivo de tal fato a pressão feita pelas grandes editoras que ocupam 92,2% do mercado editorial? Convém ressaltar que apenas **dez** dentre as quase quatrocentas editoras participam deste mercado.

OLIMPÍADA ESTADUAL DE MATEMÁTICA RJ/87

Realizaram-se no 2º semestre de 1987 as Olimpíadas de Matemática e Física do RJ. Organizada pela SBM e com a colaboração dos Institutos de Matemática da UERJ e da UFRJ, a Olimpíada de Matemática envolveu alunos de colégios de 2º grau do Estado do RJ (quadro 1) bem como candidatos com 2º grau completo.

Esse concurso vem revelando jovens matemáticos de nosso Estado desde 1980, acontecendo anualmente desde então e já tendo levado esses talentos até o exterior, como, por exemplo, em 1986, quando o então estudante de 3ª série de 2º grau Ralph Teixeira obteve o 1º lugar, na classificação individual, na 27ª Olimpíada Internacional de Matemática, realizada na Polônia (*).

Em 1988 a Olimpíada se realizou em Setembro e foi organizada por uma equipe de ex-integrantes de concursos anteriores.

Publicamos a seguir as provas de Matemática de 87, fase inicial, colocando à disposição dos leitores as de Física e prometendo para os próximos números a Fase Final de 87 e as provas de 88.

1ª Série

1) Resolvendo a equação $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}=\frac{3}{x}$ encontramos a raiz:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

2) Se vale 7 a diferença entre as raízes da equação $x^2 - 5x + m = 0$, então o valor do parâmetro m é:

a) -6 b) -5 c) 2 d) 3 e) 5

(*) A Revista do Prof. Matem., da SBM, vem publicando com detalhes estes resultados.

3) O produto das duas menores raízes de $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ vale:

a) 13   b) 12   c) 6   d) − 13   e) 36

4) A diferença entre a maior e a menor das raízes da equação $x^2 - x - 30 = 0$ vale:

a) 15   b) 11   c) 10   d) 8   e) 6

5) A maior solução inteira de $x^2 + 5x - 14 \leqslant 0$ é:

a) − 7   b) − 3   c) 2   d) 3   e) 7

6) Se $x_1 = a$, $y_1 = b$ e $x_2 = c$, $y_2 = d$ são as duas soluções reais do sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \end{cases}$, então, $a + b + c + d$ vale:

a) $4\sqrt{7}$ b) $-4\sqrt{7}$ c) 4   d) 1   e) −1

7) Se $\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ tem uma única slução real, então a soma dos possíveis valores do parâmetro m é:

a) 6   b) 4   c) 2   d) 0   e) − 2

8) A parábola $y = x^2 + x - 6$ corta os eixos de coordenadas nos pontos P, Q e R. A área do triângulo PQR vale:

a) 16   b) 15   c) 14   d) 12   e) 9

9) Se o gráfico de $y = x^2 - 2Kx + K$ tangencia o eixo Ox, então sobre o parâmetro K, podemos afirmar:

a) tem valores negativos
b) tem valores positivos
c) um seu valor é nulo
d) um seu valor é fracionário
e) tem dois valores simétricos

10) Dentre as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a única bijetora é a definida por:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$
b) $f(x) = -x^2 + 5x + 5$
c) $f(x) = x^2 + 1$
d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
e) $f(x) = x^3 + 1$

11) Na figura, AB e AC são os lados, respectivamente, do pentágono e do hexágono regulares inscritos no círculo de centro O. Então o ângulo $B\hat{A}C$ mede:

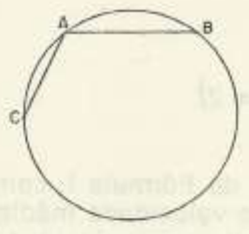
a) 120º

b) 118º

c) 116º

d) 115º

e) 114º



12) Considere o círculo de centro 0 da figura e o quadrado OABC. Se o triangulo mistilíneo ABC tem área $\frac{25(4-\pi)}{4}$, então o raio R mede:

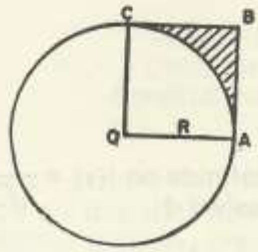
a) 6

b) 5

c) 4

d) 3

e) 2



13) No triângulo ABC, $\hat{A} = 30^\circ$, AB = 10 e BC = 7. Então a altura BH, relativa ao lado AC, mede:

a) 4 b) $4\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{3}$ d) 5 e) 4 3

O enunciado a seguir refere-se às questões 14 e 15

A velocidade de uma lancha é 21 km/h. Se ela navega subindo um rio de A para B gasta 8 horas; se navega descendo o rio de B para A gasta 6 horas. Então, sabendo que seu movimento é retilíneo,

14) A distância de A até B mede:

a) 142 km
b) 144 km
c) 145 km
d) 146 km
e) 147 km

15) A velocidade da correnteza do rio é:

a) 3,0 km/h
b) 3,2 km/h
c) 3,4 km/h
d) 3,5 km/h
e) 3,8 km/h

16) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Então o conjunto-imagem da f é o conjunto:

a) $\{x \in \mathbb{R} | x > -2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leqslant x < 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} | x = 1\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} | x = 1 \text{ ou } x = 2\}$

17) Em um circuito de Fórmula I, com 6 km de extensão, um piloto faz uma volta com a velocidade média de 220 km/h. Se os primeiros 3 km foram percorridos com velocidade média de 210 km/h, então, na 2ª metade do circuito a sua velocidade média foi de:

a) 227 km/h
b) 228 km/h
c) 230 km/h
d) 231 km/h
e) 236 km/h

18) Seja $f: A \to \mathbb{R}$, definida po $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 5x - 6}}$ Então, o conjunto A mais amplo possível é:

a) $\{x \in \mathbb{R} | x = 2 \text{ ou } x = 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2 \text{ e } x \neq 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} | x < 2 \text{ ou } x > 3\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} | 2 < x < 3\}$

19) Considere uma circunferência de centro 0 e raio 6 cm. De um ponto P do plano da circunferência, distando 10 cm do centro da mesma, traça-se uma reta tangente à curva. A distância de P ao ponto de tangência mede:

a) 8 cm b) 8,5 cm c) 9 cm d) 9,5 cm e) 10 cm

20) O número de conjuntos X, tais que

$\{a, b\} \subset X \subset \{a, b, c, d,\}$ é:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 8

21) A soma dos ângulos internos de um polígono convexo vale 1800°. O número de diagonais desse polígono é:

a) 27 b) 35 c) 44 d) 54 E) 65

22) Se a luz do sol gasta 8 minutos e 20 segundos para chegar à Terra e se a velocidade da luz é de 300.000 km/s, então a distância Terra-Sol vale:

a) 15×10^5 km
b) 15×10^6 km
c) 15×10^7 km
d) 30×10^7 km
e) 30×10^8 km

23) Seja AH a altura, relativa à hipotenusa BC, de um triângulo cujos catetos medem AC = 5 e AB = 12. A menor distância de H a cada um dos vértices do triângulo mede:

a) $\frac{25}{13}$
b) 2
c) $\frac{27}{13}$
d) $\frac{30}{13}$
e) 3

24) Suposta a Terra esférica, π valendo 3,14 e um meridiano medindo 40.000 km, o valor mais próximo do raio da Terra é:

a) 6325 km b) 6347 km c) 6354 km
d) 6369 km e) 6405 km

25) Sejam $M = \{1, 2\}$ e $N = \{4, 5, 6\}$. O número de funções distintas, de M em N, é:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 8 e) 9

2ª Série

1 a 15: iguais às da 1ª série.

16) No triângulo ABC, os lados medem BC = 6cm, AC = 5 cm e AB = 4cm. O valor do cos $\hat{A}$ é:

a) 1/8 b) 1/5 c) 1/4 d) 1/3 e) 1/2

17) Seja $0 < x < 2\pi$. Então a maior raiz da equação $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} \pi/6$ é:

a) $\frac{35\pi}{16}$ b) $\frac{17\pi}{9}$ c) $\frac{11\pi}{6}$ d) $\frac{31\pi}{18}$ e) $\frac{5\pi}{3}$

18) A função f(x) = cox x é crescente se x pertencer ao intervalo fechado:

a) $[\,0, \pi/2]$
b) $[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$
c) $[\,0, \pi]$
d) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
e) $[-\pi, 0\,]$

19) Seja ABC um triângulo retângulo cuja hipotenusa BC = 8cm e sen $\hat{B}$ = 1/4. Então a área do triângulo vale:

a) $2\sqrt{15}$ b) $3\sqrt{15}$ c) $4\sqrt{5}$ d) $5\sqrt{5}$ e) $6\sqrt{5}$

20) Se x é um arco do 3º quadrante e tgx = 1/3, então senx + secx vale:

a) $\left(-1/3\right)\sqrt{10}$ b) $\left(-13/30\right)\sqrt{10}$ c) $\left(-15/32\right)\sqrt{10}$

d) $\left(-1/5\right)\sqrt{10}$ e) $\left(-3/5\right)\sqrt{10}$

21) Se cosx = 4/5, o valor de cos2x é:

a) 1/5 b) 6/25 c) 7/25 d) 8/25 e) 9/25

22) Sendo tg2x = + 1 e 2x do 3º quadrante, o valor de cotgx é:

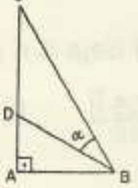
a) − 1 + 2 b) − 1 − 2 c) 1 − 2 d) 2 −
2 e) 2 − 2

23) A partir de um barbante de comprimento L, constroi-se um retângulo de área máxima. O valor da maior das duas diagonais é:

a) L/4 b) $L\sqrt{2}/4$ c) $L\sqrt{2}/2$

d) $L\sqrt{3}/4$ e) L/2

24) Considere o triângulo equilátero ABC de lado 8, onde está inscrito o triângulo isósceles DEF, com os dados da figura. A área de DEF é:



a) $3\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{5}$

d) $4\sqrt{3}$ e) 5

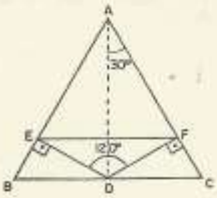
25) No triângulo retângulo ABC da figura,

AB = AD = DC. O valor de tgα é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



d) 1/2 e) 1/3

3ª série:

1 a 15: iguais às da 1ª série
16 a 20: iguais às questões de 21 a 25 da 2ª série

21) Se o polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + x - 1$ é divisível por x-1, então as raízes de $P(x) = 0$ são:

a) 0, -1 e 1
b) 1, i e $-i$
c) 2i, $-2i$ e 1
d) i, $-2i$ e 1
e) -1, i e $-i$

22) O eixo Oy determina na circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8 = m$ uma corda de comprimento 4. O valor do parâmetro m é:

a) 4 b) -4 c) 12 d) -12 e) -8

23) A reta $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 - 3t \\ z = -5 + mt \end{cases}$ $-\infty < t < \infty$ faz um ângulo de 60º com o

plano $5x + 12z = 10$. O parâmetro m vale:

a) $\frac{34\sqrt{29}}{21}$ b) $\frac{35\sqrt{23}}{23}$ c) $\frac{41\sqrt{29}}{21}$

d) $\frac{37\sqrt{26}}{19}$ e) $\frac{39\sqrt{23}}{23}$

24) A equação

$$\begin{bmatrix} 3x - y & 7 \\ 23 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 7 \\ 23 & 5x + 3y \end{bmatrix} \text{ tem}$$

como solução:

a) $x = -3$, $y = 4$
b) $x = 3$, $y = -4$
c) $x = 3$, $y = 4$
d) $x = 4$, $y = -3$
e) $x = -4$, $y = 3$

25) Seja t a reta tangente a $x^2 + y^2 = 4$ no ponto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. A área do triângulo cujos lados estão sobre t, 0x e 0y vale:

a) $2\sqrt{2}$ b) 3 c) $3\sqrt{2}$ d) 4 e) $4\sqrt{2}$

QUADRO 1
OLIMP. EST. MATEM./RJ/1987

TOTAL DE ALUNOS INSCRITOS		1038
PRESENTES		
COLÉGIOS PARTICULARES E FEDERAIS		
	1ª SÉRIE	209
	2ª SÉRIE	124
	3ª SÉRIE	191
	2º GRAU COMPLETO	119
	TOTAL	643
COLÉGIOS ESTADUAIS		84
	TOTAL GERAL	727

QUADRO 2
(SOMENTE 1ª FASE)

RESULTADOS COLÉGIOS ESTADUAIS

1ª SÉRIE:
1º LUGAR – DANIEL DOS SANTOS FILHO – NILÓPOLIS
2º LUGAR: ROBSON DOS SANTOS ROSARIO – RIO
3º LUGAR – LUIS CLAUDIO R. SOUZA – ANGRA

2ª SÉRIE:
1º LUGAR: LUCIANO R. DE ALMEIDA – VALENÇA
2º LUGAR: MARCIO LUIZ RAMOS DOS SANTOS – ITAPERUNA
3º LUGAR – RENATO DA CRUZ DOS SANTOS – RIO

3ª SÉRIE:
1º LUGAR: VITOR LUIZ BASTOS DE JESUS – NILÓPOLIS
2º LUGAR: JOSELIAS T. DE OLIVEIRA – RIO
3º LUGAR – MARCOS ANTONIO DOS SANTOS MARQUES – RIO

QUADRO 3

2ª FASE – NOTA MÁXIMA: 50

(SOMENTE COLÉGIOS PARTICULARES)

1ª SÉRIE:
1º LUGAR: CARLOS GUSTAVO TAMM DE ARAUJO MOREIRA - 29
2º LUGAR: MARCUS ANDRE DE CARVALHO TORRES - 19
3º LUGAR: JULIO CESAR DE SOUZA REBELO - 18

2ª SÉRIE:
1º LUGAR: EDSON ROBERTO ABE - 50
2º LUGAR: HERBERT CESAR GONÇALVES - 48
3º LUGAR: ALBERTO ADAMI - 42

3ª SÉRIE:
1º LUGAR: FREDERICO GANEM FILHO - 32
2º LUGAR: ANTONIO MARCOS DE OLIVEIRA COSTA - 31
3º LUGAR: LENILSON BARREIRA DE MORAIS - 28

2º GRAU COMPLETO:
1º LUGAR: GUILHERME BATISTA MONTEIRO - 35
2º LUGAR: MARCELLO POPULO DA COSTA SILVA
3º LUGAR: JOÃO CARLOS DE LIMA ROSCOE