BOLETIM GEPEM

25

ANO XIV 2º SEMESTRE 1989

PUBLICAÇÃO SEMESTRAL DO
GEPEM
GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

APOIO FINANCEIRO DO
SUBPROGRAMA DE EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIA
– PADCT – CAPES –

ÍNDICE

APRESENTAÇÃO

Regina Monken

Em novembro de 1988 realizou-se na Universidade Federal Fluminense, em Niterói, a 1ª Reunião Pró-Formação do Grupo de Educação Matemática de Niterói. Nessa ocasião, nossa associada e freqüente colaboradora Ana Kaleff proferiu palestra sobre a origem e aspectos do desenvolvimento da Matemática Moderna, reconstituindo a existência da Educação Matemática nos seus primeiros 30-40 anos. Iniciamos o boletim 25, relativo ao 2º semestre de 1989, com o artigo-transcrição dessa palestra.

A seguir reproduzimos do volume 66, nº 154, da Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, uma publicação do INEP, o artigo do professor Newton Duarte sobre o ensino da adição e da subtração, onde ele aborda questões importantes na Educação, como: a superação dos métodos escolanovistas e dos métodos tradicionais de ensino, a relação entre teoria e prática, entre outros. O trabalho descreve uma experiência com alfabetizandos adultos, funcionários da Universidade de S. Carlos.

Na palestra do GEPEM de Maio de 1989 o professor Luís Adauto Medeiros nos presenteou com a excelente conferência "Relações Métricas da Geometria Plana e Conseqüências", onde o autor apresenta fatos relevantes sobre espaços abstratos. Continuando com a estratégia de levar aos colegas de outros estados e aos demais, que nem sempre podem estar conosco nessas reuniões mensais, uma amostra do que nelas temos recebido, apresentamos o artigo "Sobre uma Propriedade Métrica do Paralelogramo", uma reconstituição da palestra de maio.

A revista Educação e Matemática é um periódico da Associação dos Professores de Matemática de Portugal. Dela transcrevemos a seção IDÉIAS, PROBLEMAS, SUGESTÕES, dando uma amostragem da seriedade com que lá é tratada a Educação Matemática.

"Uma dose de humor em sua reflexão" é um artigo que descreve um instrumento de auto-avaliação voltado para professores de 3º grau da área de tecnologia, elaborado pela professora Valderez Fraga, do ITA, S. José dos Campos. Acompanham o de auto-avaliação outros instrumentos: de avaliação do professor e da disciplina pelo aluno e de auto-avaliação do aluno. Acreditamos que esse material possa refletir, como pretende a professora Valderez, "na qualidade do planejamento do professor e de suas atitudes pedagógicas, de uma maneira bem humorada".

MATEMÁTICA MODERNA. SUA ORIGEM E ASPECTOS DE SEU DESENVOLVIMENTO EM ALGUNS PAÍSES OCIDENTAIS

Profª ANA MARIA M.R. KALEFF
Departamento de Geometria – UFF
Palestra proferida na Primeira Reunião Pró-Formação do Grupo de Educação Matemática de Niterói – Nov./88

Nas últimas décadas ocorreu uma mudança sem precedentes nos currículos de Matemática na maioria dos países do mundo. A denominação "matemática moderna" ou "nova matemática" tem sido usada para indicar essa mudança, que ocorreu em todos os níveis escolares. Todavia, os programas, submetidos a essa reforma, apresentam diferenças consideráveis de um país para outro e até no mesmo país.

Algumas perguntas poderão ser colocadas:

a) Por que surgiram tais mudanças? Quais as razões dessas mudanças?

b) O que incentivou essa mudança?

c) Como foram implantadas?

d) Como foram se espalhando?

e) Qual foi a natureza e quais os efeitos dessas mudanças?

f) Como estão essas mudanças atualmente no Brasil?

Tentaremos respondê-las.

Clima em que se originou essa mudança.

Após a segunda Guerra Mundial, deu-se verdadeira explosão no conhecimento matemático; época de intensa atividade. Surgiram novos resultados; novos métodos e técnicas; foram criados novos conceitos matemáticos. Buscou-se uma abstração maior do pensamento; o que levou à necessidade de uma formulação de idéias mais cuidadosa e a uma maior precisão de linguagem.

O desenvolvimento tecnológico do pós-guerra foi visto pelos países desenvolvidos e também pelos em desenvolvimento recém independentes (como os africanos) como chave para o desenvolvimento social e global.

A matemática que havia tido um importante papel no desenvolvimento das conquistas tecnológicas obtidas até então, recebeu ênfase especial na produção de mais técnicos matemáticos e melhor formados. Na maioria dos países a população estudantil se expandiu enormemente, nos USA isso foi bem marcante, notando-se que um número maior de alunos ficava na escola em busca de qualificação superior, além da obrigatória. Nos países em desenvolvimento se criaram novas universidades e as oportunidades para a educação cresceram muito (nota-se que no Brasil de 1960 para cá duplicou o número de alunos nas universidades).

Além destes fatores, o lançamento da nave Sputinik I em outubro de 1957, pela Rússia,provocou uma comoção através de todo USA e do mundo ocidental cujos efeitos foram sentidos no investimento degrandes somas de fundos federais para inovações e incentivos à educação. As lideranças políticas dos países desenvolvidos do Ocidente, bem como do Japão, estavam preocupados com a necessidade de uma ampla educação para fazer frente ao crescimento rápido nos novos campos abertos pela indústria. O desafio russo os levou a acreditar que os currículos vigentes eram inadequados para enfrentar as ameaças do avanço tecnológico russo e pressionaram uma mudança a nível educacional, surgiram novos projetos de currículos e a realização de inúmeras conferências e simpósios de debates.

Uma das primeiras reações nos USA foi a criação dos grupos School Mathematics Study Group (SMSG) e do Physical Science Study Commitee (PSSC) em 1958 e 1959, que tinham como objetivo melhorar o ensino mediante preparação de textos cujos conteúdos eram ensinados através de experimentos. Esses textos foram publicados no Brasil em 1966 e 1967 sob o patrocínio da "Aliança para o Progresso" (convênio MEC-USAID)

A Organização de Cooperação e Desenvolvimento Econômico (órgão que une os USA, Alemanha, países do Mercado Comum Europeu e os da Escandinávia) patrocinou em 1959 em Royaumont, na França em 1960 em Dubrovnic e em 1961, em Paris, seminários dos quais sairam as "Sinópses para a matemática da escola secundária e matemática para físicos e engenheiros", publicados pela UNESCO e que nortearam as mudanças que se seguiram.

Deve-se notar que as mudanças foram iniciadas a nível universitário, induzidas pelos governos; foram desenvolvidas por professores que estavam nas universidade e não no ensino secundário e muito menos no primário. Nesses seminários influenciaram principalmente os matemáticos franceses do grupo Bourbaki, sua preocupação com os conteúdos, com o aspecto formal, abstrato e rigoroso, com ênfase na precisão das definições e no uso cuidadoso da linguagem. A ênfase à Teoria dos Conjuntos, na busca pela unificação das estruturas leva Dieudonné (do grupo Bourbaki e talvez um dos maiores analistas) a dizer em Royaumont: "Abaixo Euclides", propondo o estudo da álgebra linear em substituição ao estudo da geometria euclidiana, ao da Trigonometria ao dos números complexos, etc. A utilidade da Geometria Euclidiana como meio de formação do pensamento é violentamente questionada; desloca-se o enfoque euclidiano onde se dava ênfase ao estudo dos triângulos através das congruências para o estudo do paralelogramo através de vetores e se introduz a álgebra vetorial.

Por outro lado as experiências levadas a efeito no começo dos anos 60, na Bélgica por Papy; na Austrália por Hull; no Canadá por Dienes e Gaulin baseadas nos desenvolvimentos psicológicos do ser humano, pesquisados nas experiências de Piaget, vêm modificar em muito o efeito inicial criado pela influência dos bourbakistas.

O desenvolvimento da Psicologia Genética Experimental e o crescente questionamento filosófico, político, cultural que se iniciou no final dos anos 60 colaboraram para o desenvolvimento de uma nova visão não somente do ensino da matemática, de seus conteúdos e métodos, mas também dos fins a que se propõe uma sociedade ao se estudar matemática.

Talvez, pudessemos resumir o ensino da matemática antes das considerações feitas acima com algumas questões. Existiam perguntas básicas:

O que ensinar?

Como ensinar?

A quem ensinar?

Com a evolução da Psicologia Genética surge outra questão:

Quando ensinar?

Como consequência do questionamento iniciado no final de 60 surge uma outra questão:

Para que ensinar?

Analisaremos alguns países onde as mudanças ocorreram.

I – Inglaterra

Informe Jeffrey – Publicado pelo órgão não governamental – "Mathematical Association", em duas partes:

Primeira parte – em 1944, proposta de mudanças para a escola secundária, com uma redução dos cálculos e manipulação da geometria formal, enfatizando a funcionalidade levando a matemática a ter uma relação mais com a vida e experiência dos alunos. Sugeria um currículo unificado para evitar a tradicional compartimentação em geometria, álgebra e artmética;

Segunda parte – em 1956, proposta de mudanças para a escola primária dando as diretrizes do ensino da matemática para as próximas décadas. Toma a posição de que as crianças se desenvolvem com ritmo próprio e que aprendem através de respostas ativas e das experiências.

Este informe foi preparado por matemáticos, professores universitários, lamentavelmente sem estabelecer conexões efetivas com as escolas primária e secundária e por isso influenciou muito pouco.

Por outro lado, as conexões mais efetivas entre as reformas propostas pelos professores universitários e os professores primários e secundários foram feitas através da associação de Professores de Matemática. Essa associação de professores **não** universitários surgiu da necessidade de se reunir interessados em investigar novos materiais didáticos para o ensino de matemática, enfatizando os métodos de ensino e não o conteúdo. As revistas publicadas entre 1964 e 1967, influenciaram muito o meio docente. Note que a exigência de uma mudança na mentalidade dos docentes partiu dos professores universitários, mas o ímpeto para tal, veio dos professores secundários.

No começo dos anos 60 surgiram muitos grupos na Inglaterra com desenvolvimento de outros projetos, sem apoio do Ministério da Educação mantendo a tradição inglesa das matemáticas aplicadas e evitando o excesso da abstração.

O projeto mais conhecido no Brasil é o Nuffield, iniciado em 1964, cujo registro foi publicado no Brasil com o nome "Se eu faço eu aprendo". Tinha como meta produzir um curso contemporâneo objetivando o relacionamento da criança com aspectos do mundo que a rodeia, introduzindo-a gradativamente no processo do pensamento abstrato e formando uma mente lógica, crítica, mas sempre criativa.

II – França, Bélgica, Suiça e Canadá

Em 1963 cria-se a Sociedade Belga de Professores de Matemática e forma-se em Paris um grupo de estudos dirigidos por membros do Grupo Bourbaki e que objetiva difundir trabalhos que melhor servissem à causa do ensino da Matemática.

Em 1955 é publicado "L'énsèignement des Mathematiques" por Piaget, Beth, Dieudonné, Lichnerowicz, Choquet e Gattegno.

Em 1957, Lucienne Felix, publica "L'Aspect Moderne des Mathematiques".

Em 1959, Papy, do grupo Belga, publica "Quinze leçons sur l'álgebre linéaire".

Em 1960, Dienes, em Quebec publica "Building up Mathematics"

Em 1963, Hull, na Austrália, faz suas primeiras experiências usando blocos lógicos, por ele criados que são desenvolvidos, posteriormente, por Dienes.

Em 1964, Choquet, do grupo Bourbaki, lança seu livro "L'énséignement de la Geometrie", onde faz uma exposição axiomática da geometria euclidiana com uma proposta diversa da de Dieudonné, expostas no congresso de Royaumont.

Em 1965, Dieudonné publica seu livro "Algébre linéaire et geómetrie élémentaire" refutando as idéias de Choquet e unificando a "geometria pura", geometria projetiva, geometria conforme, teoria dos Números Complexos, sob a álgebra linear.

Em 1967, o Centro Belga de Pedagogia e Matemática, ligado à Sociedade Belga de Matemática, começa a implantar com alunos de seis anos os mini-computadores de Papy, que têm como objetivo introduzir a criança no mundo racional matemático e iniciar progressivamente as técnicas de cálculo. Outros materiais manipuláveis e estruturados (material Cuisinaire e blocos lógicos) começam a ser utilizados no ensino. Os conceitos matemáticos vão ser construídos com o auxílio de materiais concretos, desenvolvendo-se a estrutura lógico-matemática através de relações que a criança estabelece com a ajuda desses materiais. Também, no Canadá, o Professor Claude Gaulin pesquisa com afinco esses materiais.

A preocupação com os aspectos psicológicos, com o desenvolvimento cognitvo da criança começa a se fazer presente e a influência da psicologia experimental se faz sentir através da aplicação dos estudos de Jean Piaget.

O questionamento para o ensino da matemática ganha mais uma questão: "Quando se ensinar um determinado conteúdo?"

Em 1969, o governo Francês instalou vários institutos de pesquisa no ensino da Matemática (IREM) nos quais também se reciclam professores e se preparam licenciandos.

A partir de 1974, muitas críticas começaram a surgir sobre as mudanças ocorridas com o ensino da Matemática. Matemáticos e educadores como André Revuz Fehr Gattegno e outros levantam dúvidas quanto ao sucesso dos métodos e meios utilizados nas mudanças.

III – Estados Unidos

Em 1951, em Illinois, sob a orientação do Professor Max Beberman, forma-se o programa UICSM que objetivava melhorar os currículos da escola secundária, enfatizando as leis algébricas, os princípios dedutivos, relações e funções, dando ênfase ao mesmo rigor e precisão que caracterizavam a nova matemática que estava sendo desenvolvida pelos grandes nomes de pesquisa. Pensavam em incluir o que chamavam "métodos pedagógicos da descoberta", porém, isso não ficou claro nos livros que se seguiram ao projeto.

Em 1957, surgiu o Projeto Madison sob a orientação do Professor Robert Davis, com o objetivo de formar professores. Desse projeto se originou material didático baseado no "método da descoberta" e se começou a fazer uso de materiais manipuláveis.

Em 1958, em Illinois, sob a orientação do Professor David Page, forma-se o programa UIAP, que visava a melhoria dos programas de escola primária, no qual o conteúdo foi outra vez priorizado.

Em 1961, surge o Projeto Minnes-mat, dirigido pelo professor Raul Rosenbloon, que propunha produzir um currículo integrado de matemática e ciências para crianças de 5 a 11 anos. Baseado fundamentalmente no meio ambiente, dando ênfase às experiências concretas das crianças, através das quais a percepção às idéias matemáticas pudessem ser desenvolvidas.

Com o surgimento dos grupos SMSG e PSSC, já citados, proliferam as idéias com a preocupação de "Textos Experimentais", onde o aluno aprende através de experiências que ele realiza.

No começo dos anos 70, seguidores do pedagogo Jerome Bruner levam adiante a idéia que "Todo tema pode ser ensinado de uma forma eficaz e intelectualmente honesta a qualquer criança em qualquer idade". Isto estimulou ainda mais a introdução, nos currículos da escola elementar de novos temas, que anteriormente só eram ensinados em níveis mais avançados. Assim, SMSG incluiu no seu programa para o primário geometria informal, probabilidade, álgebra e teoria dos números. O enfoque se situava no conteúdo, com ênfase na estrutura. O conceito de conjunto aparecia como conceito unificador e palavras como "propriedade numérica do conjunto", "comutativa"; "pertinência" encontravam lugar na linguagem da escola primária.

Em 1974, Morris Kline publica o livro "O fracasso da matemática moderna", onde são feitas sérias críticas a como se desenvolvia o movimento da reforma do ensino da matemática. Outros matemáticos também se levantaram contra os exageros vigentes, todavia o lucro com a venda dos livros textos, (originados dos projetos e que muitas vezes não haviam sido testados experimentalmente), foi um dos fatores primordiais para a disseminação das idéias. Também, os professores foram muito estimulados e, às vezes, até forçados pelo sistema escolar (representantes governamentais e professores universitários) a se reciclarem nos novos métodos.

Situação atual

De 1980 em diante, se intensificaram as preocupações com o resultado do ensino da matemática e foi sendo criada uma disciplina, considerada ainda hoje por Gaulin, como uma disciplina nascente, que é a Educação Matemática. Os pesquisadores não formaram ainda um consenso sobre qual é realmente a definição de sua área de abrangência, todavia sabe-se que Educação Matemática envolve não só didática da matemática e metodologia, mas Psicologia, Lingüística, Epistemologia, Sociologia, Didática em geral, Política, enfim, Educação Matemática abrange um espectro amplo de disciplinas.

Nesta década já foram realizadas nove conferências internacionais de Educação Matemática de grande porte, bem como inúmeros encontros americanos (CIEM); diversos grupos e associações de pesquisa; bancos de dados bibliográficos já foram implantados nos USA em conexão com bancos franceses e cada vez mais se intensifica o intercâmbio entre os professores e pesquisadores.

No Brasil

A repercussão do movimento de mudanças se fez sentir no Brasil no começo da década e com o apoio do governo para as reformas de currículo, com a nítida influência bourbakista.

Em 1961, no Recife foi publicado pelo Prof. Waldecyr C. Araujo Pereira o primeiro livro sobre matemática moderna intitulado "Matemática Dinâmica com Números e Cores".

As primeiras publicações para o secundário são do Professor Oswaldo Sangiorgi, do Grupo de Estudos de Matemática de São Paulo.

Em 1955, foi realizado o Primeiro Congresso Nacional de Ensino organizado pela Professora Martha Dantas, da Bahia. Outros congressos aconteceram em 1957 (RS); 1959 (RJ); 1962 (PA, organizado pelo Prof. Jorge E. F. Barbosa e pelo grupo de Lógica e Fundamentos do Departamento de Análise da UFF). Com a revolução de 64, não houve mais a possibilidade de realização de congressos e vários grupos de estudos se formaram, que trabalharam sem interseções entre eles GEMEG (do Estado da Guanabara); GEM (de São Paulo); GEMPA (de Porto Alegre) e outros, destacando-se o grupo da Bahia, liderado pelo Professor Omar Catunda.

Em Niterói, no começo dos anos 70, foram iniciadas no Centro Educacional de Niterói (CEN), experiências lideradas pela Professora Teresa Regina Werneck Richa. A vinda da Professora Lucienne Felix ao CEN é acrescida a ida do Professor Arago de Carvalho Backx para estudar com ela e Papy, na Bélgica. Também Dienes, Papy e Gaulin vêm a Niterói, Porto Alegre e São Paulo.

Após sua volta em 1971 ao CEN, o professor Arago de Carvalho Backx deu continuidade durante mais de 8 anos às experiências baseadas nos métodos belgas.

Ainda no começo da década de 70, surgiram os grupos da Universidade do Paraná, com interesse em Lógica e Geometria e o grupo da Unicamp, liderado pelo Professor Ubiratan D'Ambrósio.

Em 1976 é fundado no Rio o GEPEM, Grupo de Estudos de Pesquisas em Educação Matemática, liderado pela Professora Maria Laura Mouzinho Leite Lopes.

Em 1980, aconteceu o Primeiro Encontro Nacional de Professores de Educação Matemática da Unicamp e daí para cá encontros regionais têm acontecido cada vez com mais freqüência. Surgiram novos grupos (Fundão, RJ; G-Rio, RJ Momento SP; Gemani, Nova Iguaçu, RJ; CECI – Centro de Ciências, RJ) e o Primeiro Curso de Mestrado em Educação Matemática na UNESP – de Rio Claro.

Em fevereiro de 1987, o Primeiro Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) em São Paulo, buscouagregar os professores brasileiros e sugeriu a criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática que finalmente foi oficialmente criada no Segundo ENEM em janeiro de 1988, em Maringá.

Nota-se, portanto, uma grande preocupação com os rumos que a Educação Matemática vai tomando no Brasil, preocupação essa, não só quanto aos conteúdos programáticos (o que ensinar?), mas com as pesquisas em Etnomatemática realizadas no Brasil. Considerações a níveis pedagógico e sociológico, começaram a surgir decorrentes da realidade brasileira. Parece-nos que finalmente surge uma preocupação de se analisar as necessidades reais do alunado brasileiro, principalmente da escola básica, à luz da psicologia, sociologia e de outras disciplinas, que não somente a da Matemática.

BIBLIOGRAFIA

a) UNESCO – L'Enseignement des Sciences Fondamentales (Mathematiques) – série, Volumes 1 e 2. Paris 1966 e 1981

b) KLINE, M. – O Fracasso da Matemática Moderna – Editora Ibrasa, São Paulo – 1976

c) REVUZ, A. – Matemática Moderna, Matemática Viva – Editora Fundo de Cultura, Rio de Janeiro – 1967

d) Cadernos Pedagógicos do CEN – Niterói, ano 7, nº 11 – 1980

Professora ANA MARIA M. R. KALEFF
Departamento de Geometria – UFF
Rua São Paulo, s/n – Valonguinho
24000 – Niterói
Rio de Janeiro

O ENSINO DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO PARA ALFABETIZANDOS ADULTOS

Newton Duarte
Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

O texto apresenta uma experiência de ensino das operações de adição e subtração com alfabetizandos adultos. Tal experiência teve por fundamento dois pressupostos pedagógicos matemáticos: 1) o cálculo no ábaco como uma das etapas mais importantes no processo histórico que gerou o cálculo escrito pode ser uma etapa igualmente importante no processo ensino-aprendizagem desse cálculo escrito 2) a relação entre a adição e a subtração, enquanto operações inversas entre si, é de fundamental importância para o processo ensino-aprendizagem dessas operações. A partir dessa experiência de ensino, o texto aborda questões como: a superação dos métodos tradicionais e escolanovistas; a relação entre teoria e prática; a necessidade de direção (pelo educador) e da recriação (pelo educando) do conhecimento socialmente acumulado e outras questões importantes para a reflexão pedagógica de um modo geral.

Introdução

Venho desenvolvendo um trabalho na área de ensino de Matemática com alfabetizandos (vide DUARTE, 1985a, 1985b, 1985c). Sendo quase inexplorado esse campo, tenho encontrado alguma dificuldades em debater, com outros educadores, os resultados parciais e provisórios a que tenho chegado. Na busca de superar essa dificuldade, optei por divulgar tais resultados através de publicações, esperando que isso suscite um debate mais amplo, do qual surjam sugestões e críticas que possam contribuir para a pesquisa que venho desenvolvendo.

Este artigo não se dirige apenas àqueles que trabalham com o ensino de Matemática e/ou com ensino de adultos, mas também àqueles que estão estudando e debatendo questões como aquelas sobre a superação dos chamados tradicionais e escolanovistas, sobre a relação entre a forma e o conteúdo do processo ensino-aprendizagem, sobre a dimensão técnica e política da educação, etc. A reflexão sobre esses temas pode ser enriquecida através de contribuições de cada área específica de ensino. Não é possível, no espaço de um artigo, analisar de modo mais detalhado todos esses temas através da seqüência de ensino apresentada. No entanto, procuro fornecer alguns elementos para essa análise. Creio que seria muito proveitoso, não só para o meu trabalho como também para a reflexão pedagógica de um modo geral, que educadores de diversas áreas se desvencilhassem daquele receio para com a palavra "matemática" e procurassem analisar cada pequeno procedimento aqui descrito, na sua relação com uma concepção pedagógica e social.

Neste trabalho apresento a Segunda Unidade do Programa desenvolvido com os alfabetizandos do Segundo Projeto de Alfabetização de Funcionários da UFSCar (PAF-2). Esta unidade se refere ao ensino das operações de adição e subtração, enquanto a Primeira Unidade pode ser conhecida através das publicações já citadas.

Primeiramente trato sinteticamente dos pressupostos pedagógico-matemáticos que nortearam esta Segunda Unidade; depois descrevo a seqüência de passos adotada e por fim analiso alguns aspectos implícitos.

Pressupostos pedagógico-matemáticos

A seqüência de passos baseou-se em dois pressupostos pedagógico-matemáticos:

1) O cálculo no ábaco como uma das etapas mais importantes no processo histórico que gerou o cálculo escrito pode ser uma etapa igualmente importante no processo ensino-aprendizagem desse cálculo escrito.

Os gregos e os romanos possuíam sistemas de numeração impróprios para o cálculo escrito. Calcular era uma tarefa quase que totalmente dependente do ábaco e a escrita era utilizada apenas para o registro das operações realizadas e dos resultados obtidos.

Os hindus possibilitaram o desenvolvimento de um sistema de numeração que depois foi difundido pelos árabes e que, em essência, é o sistema utilizado atualmente em nossa sociedade. Tal sistema de numeração incorpora os mesmos princípios do ábaco e isso possibilita que realizemos os cálculos por escrito com uma facilidade desconhecida para os gregos e os romanos.

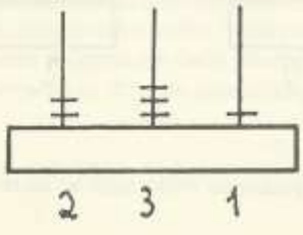
HOGBEN (1946:52-310) explica:

"O novo vocabulário numeral dos hindus permitiu executar no papel as operações efetuadas no ábaco e de maneira semelhante (...) Efetuar mentalmente ou 'de cabeça', na linguagem da fisiologia moderna, significa que o cérebro recebe, das pequenas variações de tensão dos músculos da órbita e dos dedos (órgãos de contagem), a mesma seqüência de mensagens nervosas que acompanham o trabalho no ábaco. Por exemplo, 'vão dois' quer dizer que esgotamos por duas vezes as contas de uma coluna e temos pois, de colocar duas contas na coluna vizinha da esquerda, para nos lembrarmos do fato. Isto só é possível, porque o emprego do 0 (zero) ou sunya, para representar a coluna vazia, faz o número de algarismos igual ao número de colunas do ábaco."

Assim como na história da humanidade o sistema de numeração hindu-arábico permitiu realizar por escrito adições e subtrações seguindo os mesmos princípios do cálculo que se fazia no ábaco, a aprendizagem do cálculo escrito pode apoiar-se no cálculo através desse instrumento, possibilitando ao educando a compreensão da origem de cada procedimento operatório.

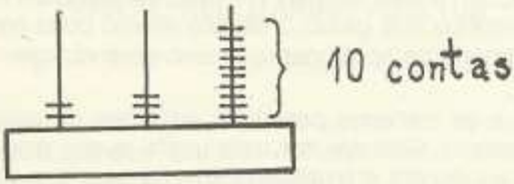
Para representar no ábaco, por exemplo, o número duzentos e trinta e um, utilizam-se três colunas. A primeira coluna da direita teria uma conta; a segunda coluna, três contas com cada uma correspondendo a dez da primeira coluna; é a terceira coluna, da direita para a esquerda, teria duas contas, com cada uma correspondendo a dez da segunda e, conseqüentemente, cem da primeira.

Em nosso sistema de numeração esse número é escrito assim: 231. O algarismo 2, pela sua posição, assume um valor correspondente a 2 centenas ou 20 dezenas ou ainda 200 unidades; o algarismo 3 assume um valor correspondente a 3 dezenas ou 30 unidades e o algarismo 1 assume um valor correspondente a uma unidade.

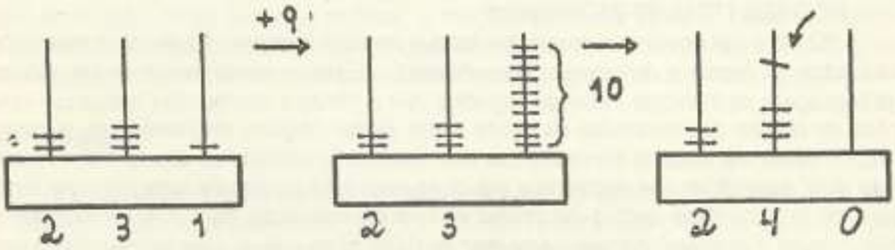


Como se pode notar, seja no ábaco ou seja através do sistema de numeração são utiizados o princípio de valor posicional e a relação de correspondência um-para-dez. Isso mostra que o sistema de numeração e o ábaco baseiam-se nos mesmos princípios.

Vejamos agora algumas das conseqüências disso no que diz respeito ao cálculo escrito. Se adicionarmos nove unidades ao número tomado como exemplo, obteremos um total de dez contas na coluna das unidades.



Com base na relação de correspondência um-para-dez e no valor posicional, retiramos essas dez contas da coluna das unidades e correspondendo a essas dez, é adicionada uma conta às da coluna das dezenas.

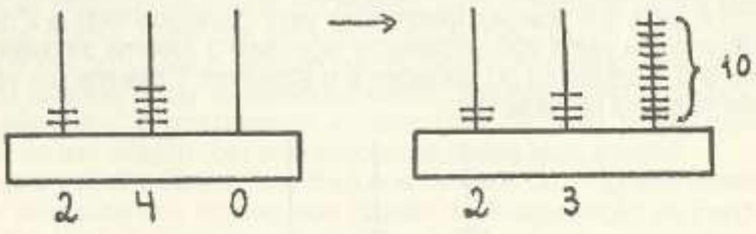


Eis aí a justificativa do procedimento chamado "vai-um" do algoritmo da adição.

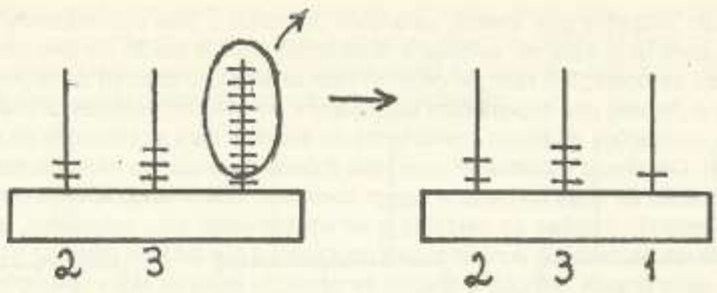
231	→ 9 + 1 = 10 →	1 231	→	1 231
+ 9	"vai-um"	+ 9 0		+ 9 240

O mesmo ocorre com o oposto de "vai-um", que é o "empresta-um".

Se de 240 queremos subtrair nove unidades, retiramos uma conta da coluna das dezenas e a trocamos por dez que são colocadas na coluna das unidades.



Dessas dez, podemos então subtrair as nove unidades.



É o que acontece no algoritmo da subtração;

$$\begin{array}{r} 240 \\ -\quad 9 \\ \hline \end{array} \rightarrow \text{troca-se uma dezena por dez unidades.} \rightarrow \begin{array}{r} 3\ 10 \\ 2\cancel{4}0 \\ -\quad 9 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3\ 10 \\ 2\cancel{4}0 \\ -\quad 9 \\ \hline 231 \end{array}$$

Como se pode ver, o ábaco mostra, de uma forma bastante visível, as origens dos procedimentos operatórios da adição e da subtração e mostra, ainda, aquilo que é o segundo pressuposto pedagógico-matemático dessa Unidade.

2) A relação entre a adição e a subtração, enquanto operações inversas entre si, [1] é de fundamental importância para o processo ensino-aprendizagem dessas operações. Já mostrei que procedimentos operatórios como o "vai-um" e o "empresta-um" nada mais são do que o mesmo movimento com sentidos opostos. É, pois, de fundamental importância para o domínio do cálculo escrito, a compreensão dessa relação entre operações inversas entre si.

Além dessa importância para o cálculo, existe a importância para o raciocínio de um modo geral do educando. PIAGET (1975:247), chama a isso de reversibilidade do raciocínio. Vejamos como ele descreve a ausência desse tipo de raciocínio:

"Pensar de maneira irreversível é não saber passar de uma destas operações para a outra, é portanto, em poucas palavras, não saber manejar as operações como tais: é substituir um mecanismo operatório móvel e de direção dupla pelas percepções estáticas e sucessivas de estados que é impossível sincronizar e, conseqüentemente, conciliar."

Essa relação entre a adição e a subtração enquanto operações inversas entre si já vinha sendo trabalhada desde a Primeira Unidade, através de certos exercícios de representação de números no ábaco. (DUARTE, 1985c, sétimo passo).

É por considerar tão importante essa relação que não concordo com a proposta de outros trabalhos onde se ensina primeiramente a adição e a multiplicação. (NICOLAI, 1984: 10 e LAMPARELLI, 1984: 11)

O ensino

Na seqüência de passos adotada procurei com que os educandos captassem através do seu fazer aqueles pressupostos descritos anteriormente. Uma observação: o tempo requerido para percorrer, com os educandos, cada passo da seqüência, é variável de acordo com as características próprias de cada situação (horas diárias disponíveis, período fixado para o trabalho de ensino, ritmo de aprendizagem dos educandos, etc.).

Primeiro passo: adição e subtração no ábaco (sem "vai-um" e sem "empresta-um")

Foram utilizados dois ábacos para cada educando e para o professor. Os educandos realizaram uma série de adições e subtrações com o auxílio de dois ábacos. Não escreveram as operações nem no caderno nem na lousa. O objetivo deste passo foi desenvolver o domínio dos movimentos (das mãos e do cérebro) contidos na realização de adições e subtrações no ábaco, como forma de preparar para a realização de operações por escrito. Os alunos trabalharam com dois ábacos para que no início da adição ficassem registradas as duas parcelas a serem somadas. Trabalhando apenas com um ábaco e não estando escritas as parcelas a serem somadas e/ou subtraídas, eles teriam que guardá-las de memória durante toda a operação, o que poderia dificultar o cálculo.

Foi dada grande atenção à relação de oposição entre as duas operações; após a realização de cada adição era realizada a sua oposta, a subtração.

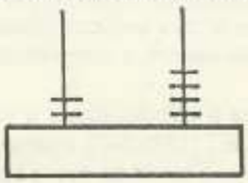
---

[1]Normalmente, a adição, a multiplicação e a potenciação são chamadas operações diretas enquanto que a subtração, a divisão e a radiciação são chamadas operações inversas. Neste artigo utilizarei o termo operações inversas para designar a relação entre a edição e a subtração, na medida em que uma é inversa à outra.

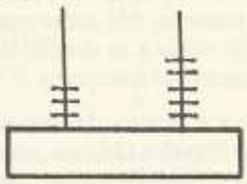
As propriedades das operações foram trabalhadas de forma empírica. Por exemplo, na adição 24 + 35, a propriedade comutativa (a ordem das parcelas não altera a soma), pode ser trabalhada adotando-se diferentes ordens para realizar a adição, constatando-se que o resultado não se altera.

Para dar uma idéia da dinâmica adotada, descrevo como realizei, com os educandos, as operações: 35 + 24 = 59.
59 - 24 = 35

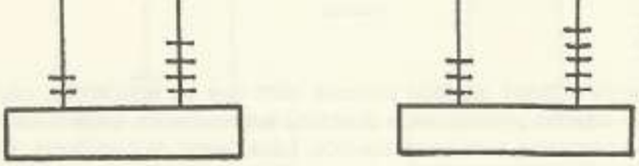
a) solicitei aos educandos que representassem num ábaco o número 24:



b) solicitei que representassem em outro o número 35:



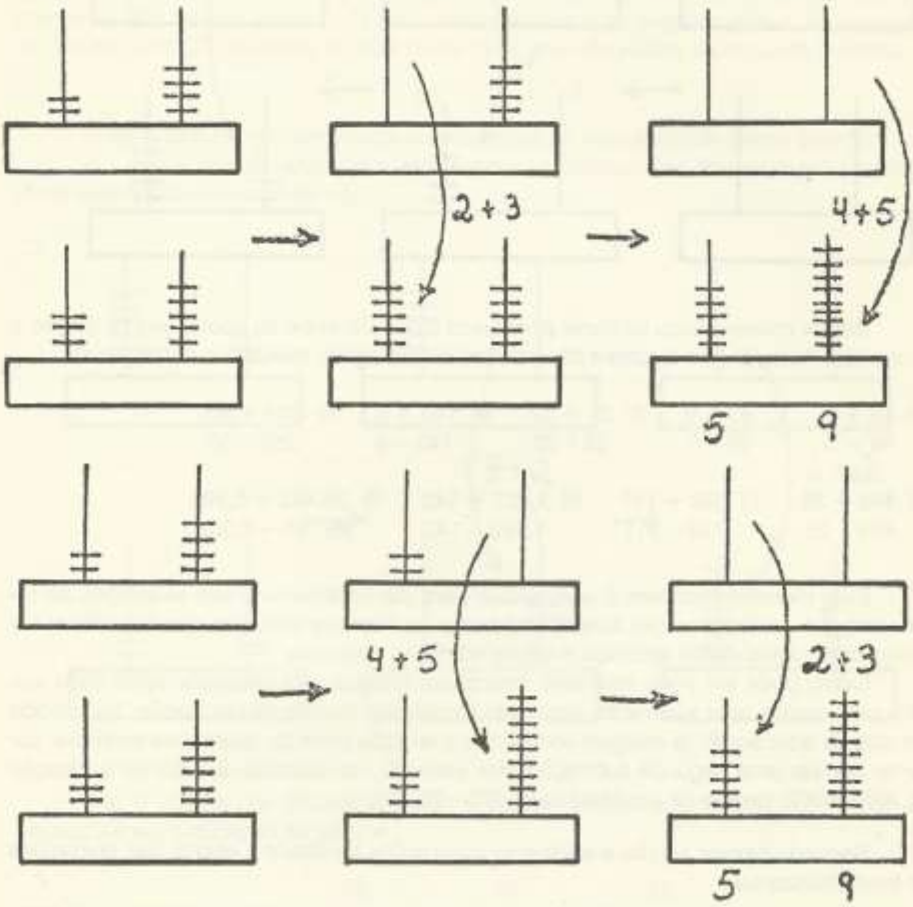
c) solicitei que colocassem os ábacos alinhados da seguinte maneira:



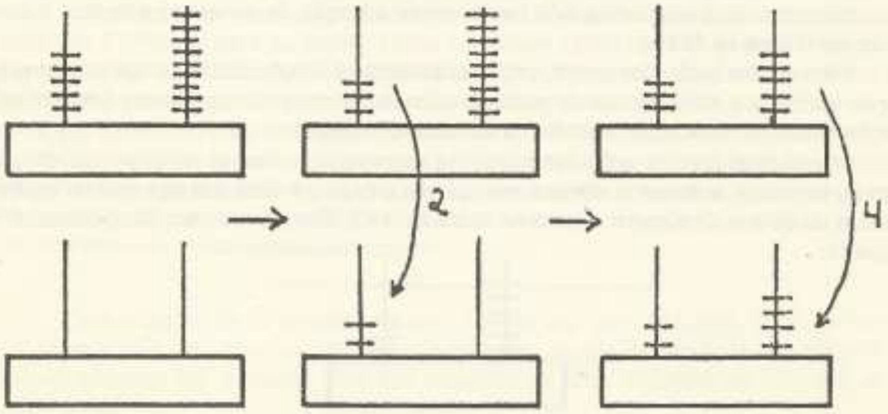
Orientei para que a coluna das unidades de um ábaco ficasse alinhada à coluna das unidades de outro (o mesmo com a das dezenas). Isto prepara para a futura montagem do algoritmo.

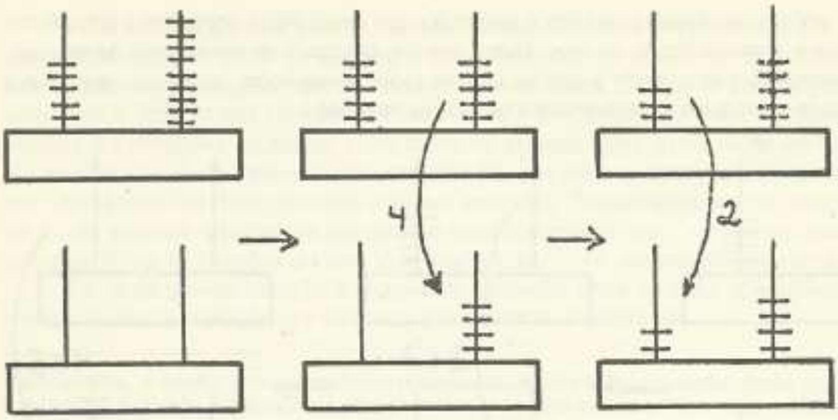
d) solicitei que eles "juntassem" aquelas quantidades em um ábaco só.

e) após todos terem realizado a operação, um deles disse como tinha feito. Aproveitei para ir representando no meu ábaco grande, colocado de frente para os educandos, as parcelas e realizando a adição. Depois repeti a operação, somando em outra ordem, para demonstrar a propriedade comutativa da adição.



f) num dos ábacos estava, portanto, representado o número 59. Para a realização da operação oposta, solicitei que os educandos tirassem 24 desse 59, colocando o 24 no ábaco que havia ficado vazio e verificando quanto restara no outro ábaco.





Dessa maneira ficou bastante acentuada a relação entre as operações de adição e subtração. A seguir listo algumas das adições e subtrações realizadas neste passo:

1) 43 + 5	2) 90 + 6	3) 21 + 32	4) 143 + 6	5) 201 + 50
48 − 5	96 − 6	53 − 32	149 − 6	251 − 50

6) 462 + 26	7) 602 + 111	8) 1.021 + 142	9) 20.403 + 6.362
488 − 26	713 − 111	1.163 − 142	26.765 − 6.362

Este momento também é aproveitado para dar continuidade aos exercícios de representação de números (no ábaco) realizados na Primeira Unidade. Por isto utilizei números com várias casas decimais e vários números com zero.

Como pode ser visto nos nove exercícios listados, era realizada, após cada adição, pelo menos uma subtração, enquanto movimento oposto dessa adição. Na medida em que os educandos já estejam dominando a relação entre as operações inversas, pode-se realizar uma segunda subtração. Por exemplo, no exercício 9, além da subtração 26.765 - 6.362, realiza-se a subtração 26.765 - 20.403.

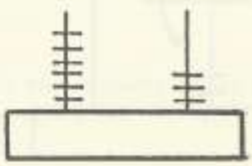
Segundo passo: adição e subtração (operações no ábaco e escrita das operações na forma horizontal).

Neste passo foram combinados os sinais de +, −, e = (depois descreverei como isso foi feito) e as adições e subtrações passaram a ser escritas na lousa (pelo professor) e no caderno (pelos educandos).

A escrita teve, neste momento, a função de apenas registrar as operações a serem realizadas ou já realizadas, não tendo, ainda, a função de servir aos cálculos. Estes foram realizados no ábaco.

Para a introdução dos sinais, procurei salientar a função dos mesmos na comunicação escrita e a necessidade de padronização dos símbolos matemáticos também em função dessa comunicação. A dinâmica adotada foi a seguinte:

a) combinei com os educandos que iria escrever um número na lousa, sendo que nem eu nem eles leríamos o número em voz alta e cada um teria que representar aquele número no ábaco. O número escrito na lousa foi o 63. Sua representação no ábaco, é a seguinte:



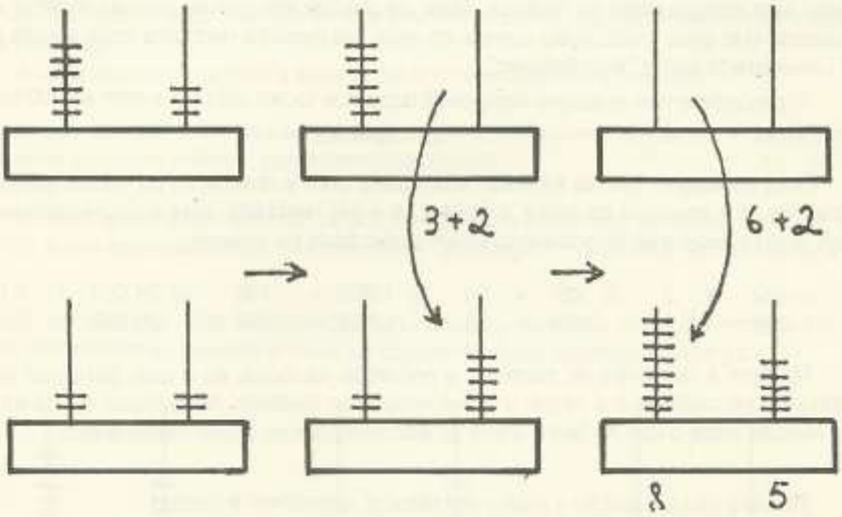
b) após todos terem feito a representação no seu ábaco, pedi que eles dissessem que número era aquele e representei o número no ábaco grande, aproveitando a oportunidade para fazer com que os que erraram explicitassem e analisassem seu raciocínio.

c) escrevi outro número, à direita do 63, conservando um intervalo (para posterior colocação do sinal +). Foi combinado que também esse número não seria, num primeiro momento, lido em voz alta e cada um o representaria num segundo ábaco. Esse segundo número foi o 22. Na lousa, os dois números ficaram dispostos da seguinte maneira:

63 22

d) após todos terem terminado, representei o 22 num segundo ábaco grande.

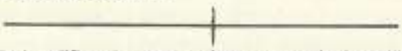
e) solicitei que os educandos alinhassem as colunas dos ábacos e juntassem as duas quantidades num ábaco só.



f) fiz a adição nos ábacos grandes e escrevi o resultado na lousa, deixando um espaço para a colocação do sinal =

63 22 85

g) expliquei, então, que assim como escrever os números 63 e 22, na lousa, havia possibilitado que eles fossem representados, no ábaco, sem necessidade de comunicação oral, havia também a necessidade de se utilizar alguma forma de comunicar, por escrito, "o que era para fazer com aqueles números". Perguntei se algum deles conhecia o sinal que é utilizado para se somar e eles sugeriram vários tipos de sinais. Expliquei então que, em princípio, não seria errado adotar algum daqueles sinais, na medida em que isto é uma questão de convenção, ou seja, de se combinar um sinal comum a todos. O sinal em si mesmo não é certo nem errado. O que faz com que seja errado adotarmos qualquer sinal para as operações de adição e subtração é a necessidade de comunicação. Por esta necessidade é que utilizamos, para a adição, o sinal +, já convencionado. Expliquei ainda que, em outras épocas, outros sinais foram adotados e quando esse sinal apareceu ele era representado assim: [2]



Com o tempo ele foi simplificado para a forma que hoje utilizamos. Com isso procurei mostrar que os símbolos matemáticos não têm aquela dimensão quase mágica que muitas pessoas lhe atribuem, mas são resultado de uma necessidade concreta de comunicação.

A seguir escrevi o sinal entre o 63 e o 22:

$$63 + 22 \quad 85$$

Só faltava combinar um sinal para mostrar que 85 era o resultado daquela adição. Introduzi o sinal = :

$$63 + 22 = 85$$

h) solicitei que eles escrevessem essa expressão matemática no caderno. Orientei para que o sinal + fosse o mais corretamente possível, para não gerar, depois, confusão com o sinal x (multiplicação). Este detalhe pode parecer insignificante, mas sendo o sinal um instrumento de comunicação, escrevê-lo incorretamente prejudica a eficácia desse instrumento. Alguns educadores poderão considerar "autoritária" tal atitude. Ela seria autoritária se fosse uma imposição sem justificativa, se o educando tivesse que aceitar sem compreender os motivos. Mas, na medida em que se procura mostrar a necessidade que gera a utilização correta do sinal, de maneira nenhuma essa atitude pode ser considerada como "autoritarismo".

f) procedimentos anàlogos àqueles já expostos foram utilizados com a subtração

$$85 - 22 = 63.$$

Essa linguagem escrita foi então exercitada com a realização de várias adições e subtrações. Eu escrevia na lousa a operação a ser realizada, eles a escreviam no caderno, realizavam-na no ábaco e escreviam o resultado no caderno.

1) 604 + 2	2) 525 + 34	3) 1.023 + 136	4) 24.001 + 5.697
606 − 2	559 − 34	1.159 − 136	29.698 − 5.697

No item 4, ao invés de escrever a operação na lousa, eu a ditei, para que eles a anotassem no caderno e a seguir a resolvessem no caderno. A finalidade é a de exercitar a relação entre o que se fala e o que se escreve com os sinais matemáticos.

Terceiro passo: adição e subtração (ábaco, algoritmos e dedos)

Neste passo a escrita passou a ser utilizada para o cálculo. Já tendo sido treinados no ábaco os movimentos de raciocínio necessários aos algoritmos de adição e subtração e já tendo sido introduzida parte da simbologia, tornou bastante simples a introdução dos algoritmos.

---

[2]Sobre a evolução dos sinais vide DANTZIG, 1970:78-79, e MALBA TAHAN, 1983:29-36.

Além da utilização do ábaco para auxiliar a compreensão do cálculo pelo algoritmo, também utilizei com os educandos o procedimento de contar nos dedos. Esse procedimento tem a função de auxiliar o educando quando ele ainda não memorizou os fatos básicos da adição. Fatos básicos são as adições de duas parcelas em que ambas têm apenas uma casa decimal, isto é, as parcelas vão de zero a nove. Sua memorização é importante para a agilidade nos cálculos. O terceiro passo, a memorização dos fatos básicos, ainda não foi exercitada intensivamente porque entendo que ela se fez com muito mais eficiência quando os educandos já estão realizando adições através dos algoritmos, ainda que utilizando meios auxiliares como a contagem nos dedos. A memorização dos fatos básicos mostra-se então para o educando como uma necessidade para o aperfeiçoamento do cálculo. De forma alguma considero desnecessária a memorização no aprendizado da Matemática. Mas entendo que ela deva ser percebida pelo educando enquanto uma necessidade decorrente de um processo.

A escola tradicional não errou por utilizar a memorização, mas por torná-la um procedimento desvinculado das necessidades que o geraram. A escola nova, tentando superar essa falha, acabou por cair em outro unilateralismo: a abominação da memorização e do treino, que passaram a ser considerados desnecessários e repressivos.

A compreensão e o treino (que visa à memorização, à automatização) não podem ser vistos separadamente no processo de aprendizagem. Quando o educando está resolvendo uma adição utilizando-se dos dedos e do ábaco, isso está ao mesmo tempo desenvolvendo sua compreensão do algoritmo e treinando-o na memorização dos fatos básicos. Evidentemente que em alguns momentos dá-se maior destaque à compreensão e em outros ao treino. Mas quando se procura compreender algo, isso está contribuindo para o seu treino e quando se treina algo, isso está contribuindo para uma compreensão maior e mais segura. O treino será tão mais eficiente quanto mais se compreender o que se está treinando. E compreender-se-á com muito mais profundidade e facilidade aquilo que foi bem treinado.

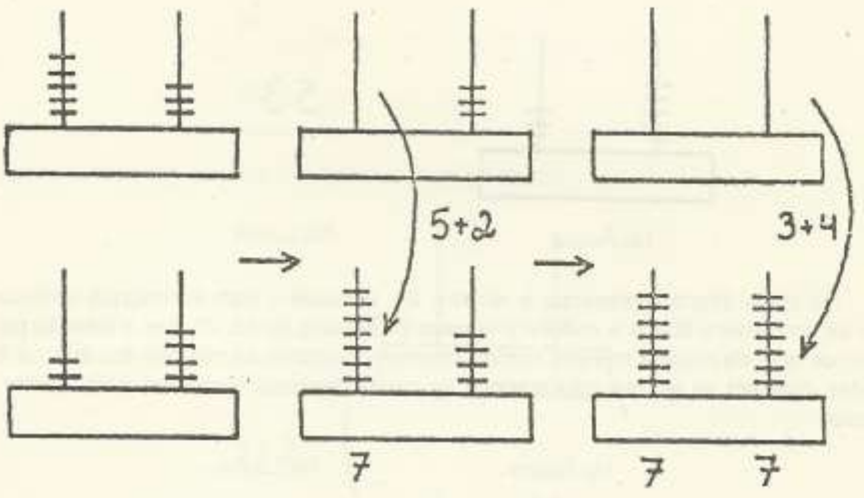
Embora o procedimento de contar nos dedos não fosse estritamente necessário neste passo, pois o ábaco já é suficiente para o auxílio nos cálculos, utilizei os dedos com os educandos como uma maneira de prepará-los para o quarto passo, onde o ábaco não é utilizado.

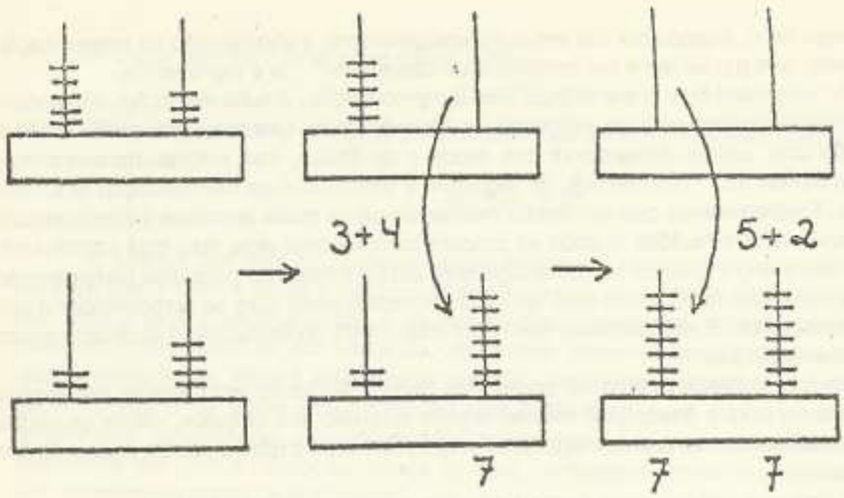
A dinâmica adotada para a introdução dos algoritmos foi a seguinte:

a) solicitei oralmente aos educandos que escrevessem a adição 53 + 24 na forma introduzida no passo anterior, isto é, horizontalmente;

b) após todos terem anotado tal adição nos seus cadernos, escrevi-a na lousa, solicitando a um dos educandos que me fosse "orientando" na escrita nos números e do sinal;

c) solicitei que eles representassem cada um daqueles números em um ábaco, depois alinhassem as colunas e então juntassem as duas quantias em um só;





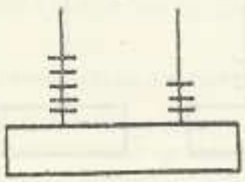
d) fiz a operação com os ábacos grandes;

e) solicitei que colocassem o sinal de igualdade e o resultado;

f) após todos terem feito, fiz o mesmo na lousa:

53 + 24 = 77

g) então expliquei que iríamos "armar" a mesma conta na forma vertical. Esvaziei os dois ábacos grandes e num deles representei o número 53. Escrevi depois esse número na lousa.

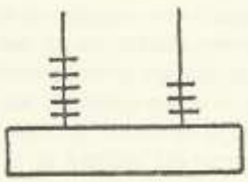


53

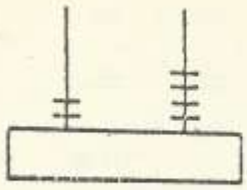
No Ábaco — Na Lousa

No outro ábaco representei o número 24, coloquei-o com as colunas alinhadas com as do primeiro ábaco e escrevi o número 24 debaixo do 53. Chamei a atenção para o fato de que, da mesma maneira como vínhamos colocando as colunas dos ábacos alinhadas, também na escrita colocaríamos as casas decimais alinhadas, para facilitar o cálculo:

No Ábaco — Na Lousa



53
24



Como o sinal já era conhecido, coloquei-o ao lado dos números.

$$
\begin{array}{c}
53 \\
+ \\
24
\end{array}
$$

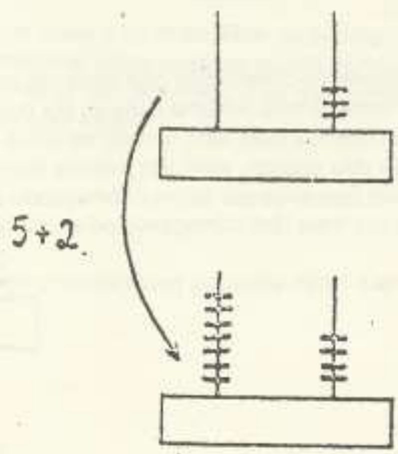
Mostrei, na conta escrita horizontalmente, o sinal = e perguntei se alguns deles teriam alguma idéia de como se costuma fazer na forma vertical. Deram várias sugestões, algumas bastante válidas como:

$$
\begin{array}{c}
53 \\
+ \\
24 \\
\hline
=
\end{array}
$$

Expliquei que tal modo de escrever não seria errado, mas como não é utilizado em nossa sociedade, ele não cumpre a função de comunicação. Coloquei então o traço utilizado costumeiramente:

$$
\begin{array}{c}
53 \\
+ \\
24 \\
\hline
\end{array}
$$

Juntei as contas das colunas das dezenas num só ábaco.

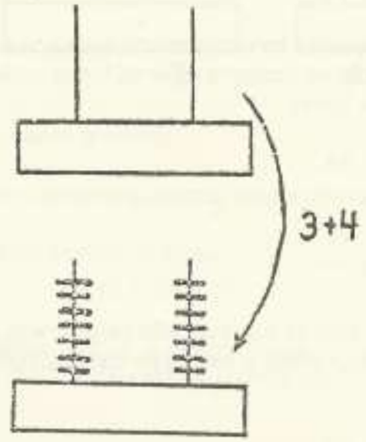


Apontando, no algoritmo já armado, a adição 5 + 2, fiz a adição, agora nos dedos e escrevi o 7 na coluna das dezenas.

$$\begin{array}{r} 53 \\ + \\ 24 \\ \hline 7 \end{array}$$

Expliquei que, no ábaco, quando se soma as duas parcelas, elas somem e fica apenas o resultado, sendo que quando se resolve a conta por escrito as parcelas continuam registradas e se escreve abaixo o resultado. Expliquei ainda que o 7 foi escrito na direção do 5 e do 2 para ficar mais fácil de perceber que ele está na mesma casa.

Somei, então, no ábaco, as unidades:



Fiz o mesmo com os dedos e no algoritmo:

$$\begin{array}{r} 53 \\ + \\ 24 \\ \hline 77 \end{array}$$

Depois fiz a mesma operação começando pela casa das unidades. Expliquei que o resultado não se altera se começarmos por uma casa ou por outra, mas que mais para a frente iriam surgir casos em que fica mais fácil, quando se opera por escrito, iniciar pelas unidades. Essa situação se deu quando, num dos passos posteriores, surgiu a adição com vai-um, onde é possível operar-se por escrito começando pela casa das dezenas, ou das centenas, etc., mas fica mais fácil começando pelas unidades. No ábaco isso não acontece.

Procedimentos análogos foram adotados para montar o algoritmo da subtração:

$$\begin{array}{r} 77 \\ - \\ 24 \\ \hline \end{array}$$

A seguir, mostro uma série de adições e subtrações que foram realizadas com os educandos:

1) 214	257	2) 1.042	1.396	3) 2.503	2.935	4) 6.045	9.649
+	−	+	−	+	−	+	−
43	43	354	354	432	432	3.604	3.604

5)26.032	36.747
+	−
10.715	10.715

O uso no nosso país è colocar o sinal + ou − à esquerda dos nºs, como:

```
 214       257
+ 43     −  93
```

A dinâmica adotada para cada conta foi a seguinte:
a) eu escrevia a conta na lousa, na forma vertical;
b) os educandos as resolviam no ábaco;
c) eles armavam o algoritmo;
d) resolviam a conta, por escrito, usando os dedos, se necessário;
e) eu a resolvia nos ábacos grandes e na lousa (usando os dedos).

Quarto passo: adição com vai-um e subtração com empresta-um

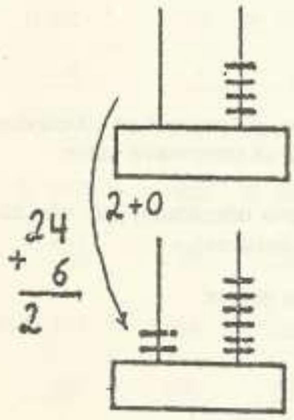
Neste passo, mais do que nunca, ficaram salientadas a importância do ábaco para se compreender o cálculo escrito e a importância de se trabalhar a relação entre as operações inversas.

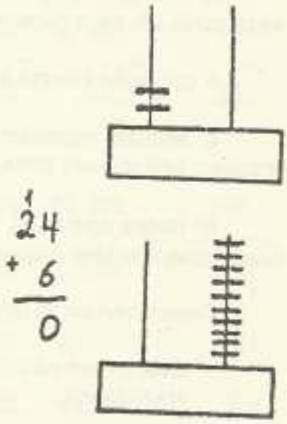
Iniciei assim:

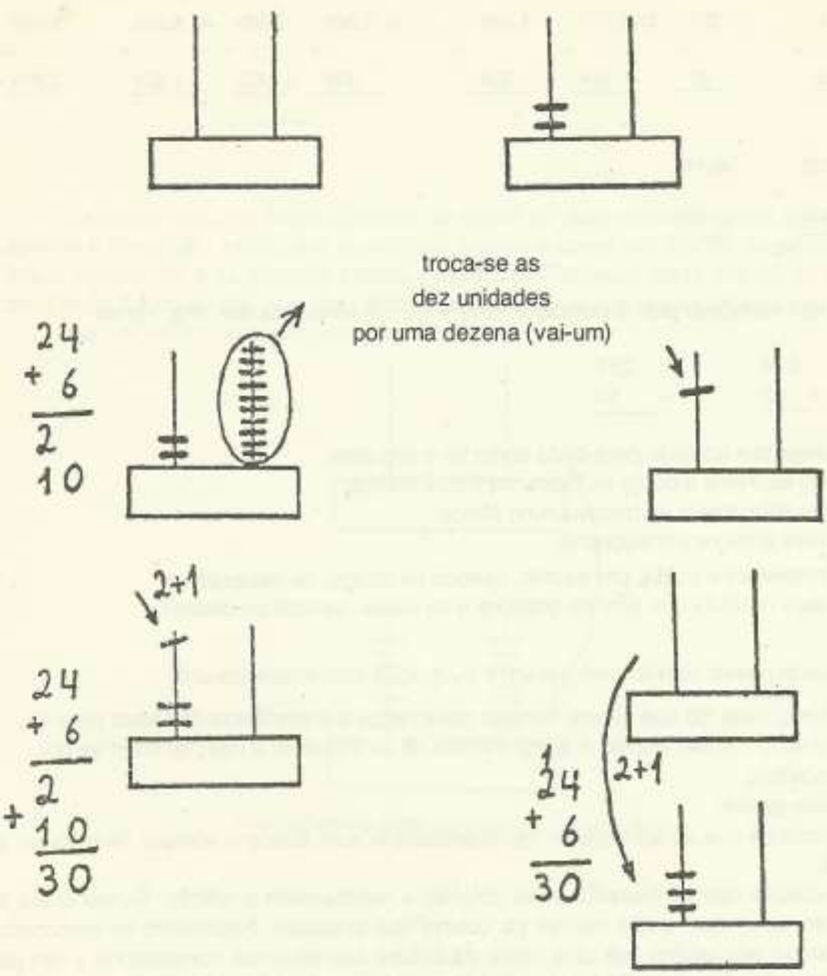
a) solicitei que os educandos representassem num ábaco o número 24 e noutro o número 6;

b) solicitei que alinhassem suas colunas e realizassem a adição. Surgiu então a questão de se chegar a dez contas na coluna das unidades. Facilmente foi recordado pelos próprios educandos que uma conta da coluna das dezenas corresponde a dez da coluna das unidades, e então foram retiradas as dez contas e colocada uma na coluna das dezenas.

Armei o algoritmo na lousa e fui resolvendo ao mesmo tempo que operava no ábaco. Fiz a conta tanto começando pelas dezenas quanto começando pelas unidades, para mostrar que as duas maneiras são possíveis, mas que começando pelas unidades fica mais fácil, quando se opera por escrito.







Como se pode observar, no ábaco é indiferente somar começando pelas dezenas ou pelas unidades, No caso do cálculo escrito, não é errado começar pelas dezenas, mas é prático começar pelas unidades, principalmente em contas onde as parcelas vão até as casas de unidade de milhar etc.

c) a seguir, apaguei o algoritmo na lousa e solicitei que os educandos fizessem essa conta em seus cadernos.

A operação inversa foi feita da seguinte forma:

a) estando representado o número trinta em um ábaco, solicitei que os educandos tirassem seis desses trinta, para colocar no outro ábaco, que se encontrava vazio;

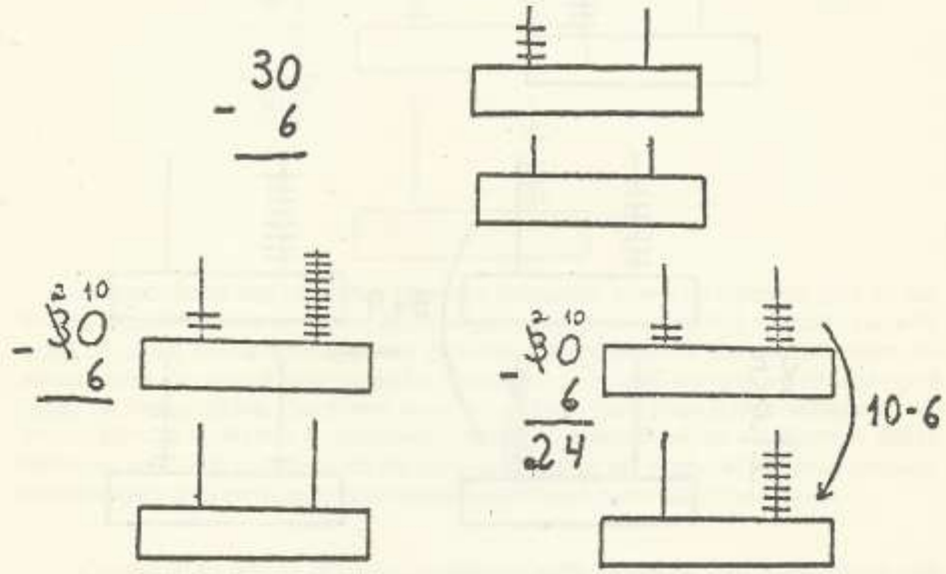
b) nessa operação, de início, eles encontraram alguma dificuldade, pois não sabiam como tirar seis daqueles trinta (representados por três dezenas).

Desenvolvi então uma conversa semelhante à descrita abaixo:

– Quanto tem na coluna das unidades?
Nada (zero).

– Quanto tem na coluna das dezenas?
Três.
– Cada bolinha dessas vale por quantas das unidades?
Por dez.
– De onde vamos tirar seis?
Das unidades não dá porque a coluna está vazia. Das dezenas também não dá porque cada uma vale dez e tirando uma já passa de seis.
– Naquela conta que fizemos antes, o que aconteceu quando juntamos 6 bolinhas com 4 bolinhas aqui nas unidades?
Somamos dez bolinhas. Tiramos as dez e colocamos uma nas dezenas.
- E se agora nós fizermos o caminho de volta, isto é, quisermos tirar aquelas seis que colocamos?
– Tiramos uma das dezenas, trocamos ela por dez que colocamos na coluna das unidades. Dessas dez tiramos as seis e ainda sobram quatro nessa coluna.

Depois que essa subtração foi feita no ábaco, armei o algoritmo na lousa e operei utilizando simultaneamente o ábaco, os dedos e o algoritmo.

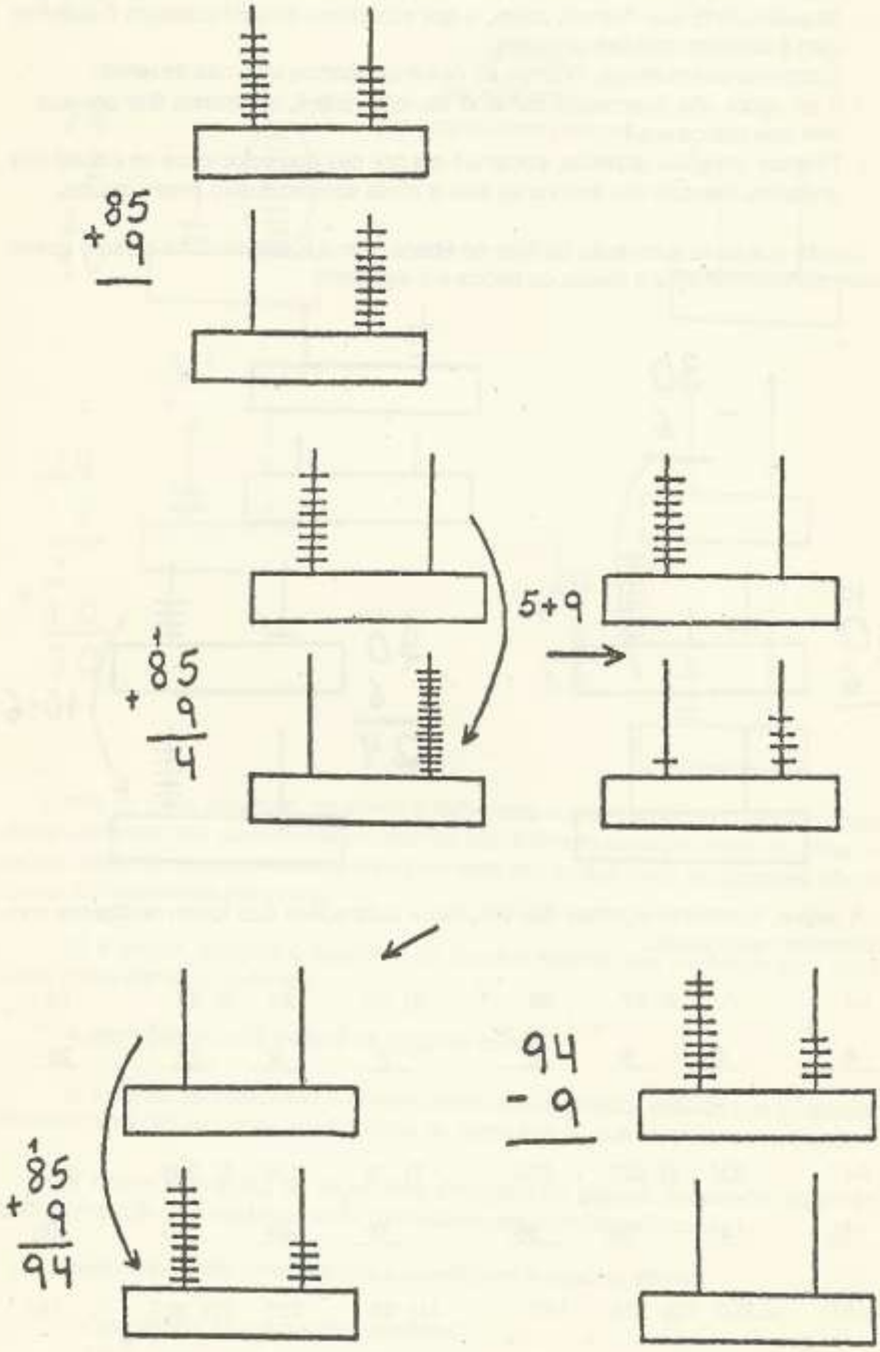


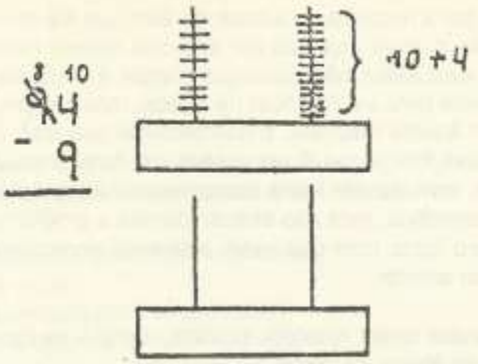
A seguir, apresento algumas das adições e subtrações que foram realizadas com os educandos neste passo:

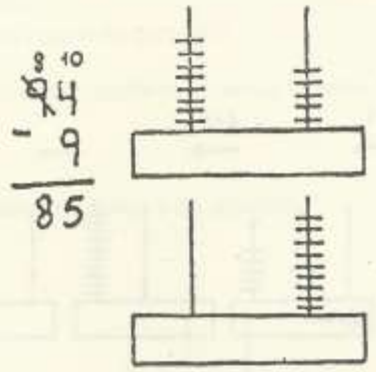
1) 62 + 8	70 − 8	2) 57 + 6	63 − 6	3) 85 + 9	94 − 9	4) 48 + 25	73 − 25
5) 647 + 185	832 − 185	6) 537 + 98	635 − 98	7) 73 + 49	122 − 49	8) 303 + 59	362 − 595
9) 1.187 + 409	2.256 − 409	10) 125 + 67	192 − 67	11) 58 + 67	125 − 67	12) 307 + 854	161 − 854

13) $\begin{array}{r} 235 \\ + \; \underline{907} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 1.142 \\ - \; \underline{907} \end{array}$

Vejamos, por exemplo, o exercício nº 3 dessa lista: 85 + 9 e 94 – 9.







A importância dos pequenos números colocados acima do algoritmo está no fato de que ali, assim como no ábaco, estão exteriorizados os raciocínios implícitos na resolução da conta. Existe entre algumas pessoas o preconceito de que colocar esses números acima da conta é sinal de pouca inteligência, pois demonstra que a pessoa não é capaz de memorizá-los. Considero esse preconceito muito prejudicial, pois aqueles números, além de facilitarem a compreensão dos raciocínios implícitos no algoritmo, possibilitam ao educando conferir onde ele poderia ter errado na resolução da conta, possibilitando também uma certa segurança indispensável para quem está aprendendo.

Quinto passo: adição com três ou mais parcelas, subtração com empresta-um indireto.

Neste passo o objetivo principal foi a realização de certos tipos de adições e subtrações considerados difíceis. Os educandos não utilizaram o ábaco neste passo, na medida em que o objetivo principal era o de treinar ao máximo os procedimentos do cálculo escrito. No entanto, para não se perder de vista a compreensão desses procedimentos (após os educandos terem resolvido cada conta) eu a resolvia utilizando simultaneamente o ábaco, os dedos e o algoritmo na lousa. A introdução de adições de três ou mais parcelas se deu da seguinte forma:

a) escrevi, na lousa, na forma horizontal, a seguinte adição:

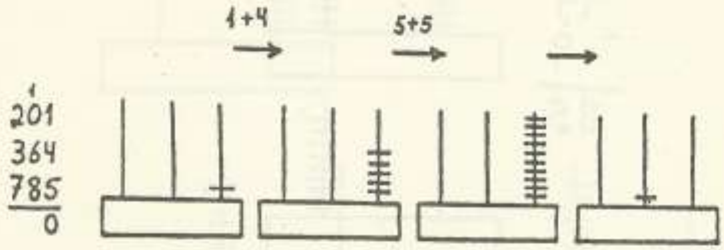
$$201 + 364 + 785$$

b) solicitei, então, que eles armassem a conta na forma vertical ("em pé") e a resolvessem. Devo esclarecer que quando solicito aos educandos que armem uma conta e a resolvam, fico percorrendo a sala para verificar como cada um está fazendo. Quando vejo que algum está fazendo algo errado, procuro formular perguntas que façam com que ele analise os passos do próprio raciocínio e verifique onde e porque errou.

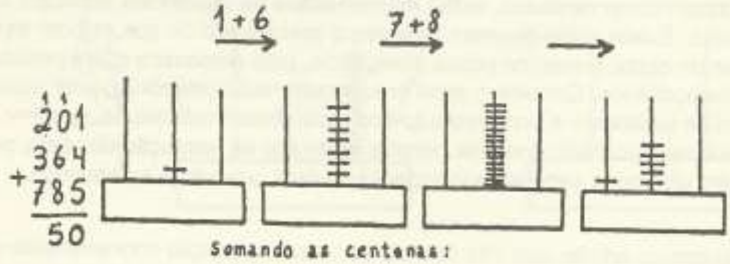
Evito ao máximo dar a resposta ao educando sem que ele tenha compreendido o que aconteceu. Às vezes quando vejo que por diversos fatores (nervosismo, esquecimento, etc.) algum dos educandos não consegue chegar à resposta certa a uma pergunta, então dou a resposta para ele não ficar na dúvida, mas procuro detalhar todos os passos que me levaram àquela resposta. Evidentemente que isso é preciso ser feito dentro do tempo disponível. Por vezes é necessário dar a resposta a algum educando que ficou mais para trás, sem que ele tenha compreendido totalmente o raciocínio realizado naquela questão específica, para não atrasar demais a programação. Depois, nos outros exercícios, procuro fazer com que esse educando compreenda o que ele não compreendeu no exercício anterior.

c) Após os educandos terem resolvido a conta, armei-a na lousa e a resolvi utilizando simultaneamente um ábaco, os dedos e o algoritmo.

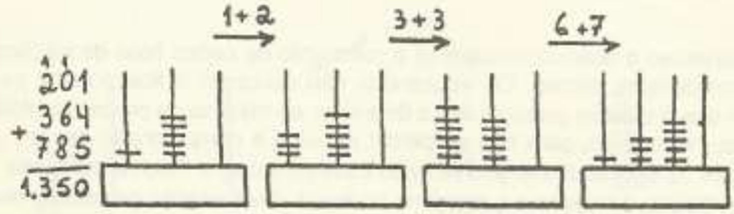
Somando as unidades:



Somando as dezenas:



Somando as centenas:



A seguir, listo algumas adições, desse tipo, realizadas com os educandos:

1) 1.063 + 22 978
2) 15.047 + 67.898 + 8.175
3) 6.937 + 4.098 + 976

Quanto às subtrações deste passo, iniciei-as da seguinte maneira:

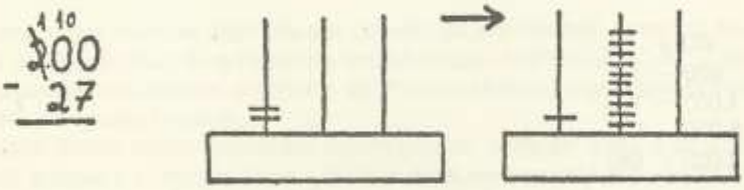
a) armei, na lousa, a seguinte subtração:

$$\begin{array}{r} 200 \\ -\ 27 \\ \hline \end{array}$$

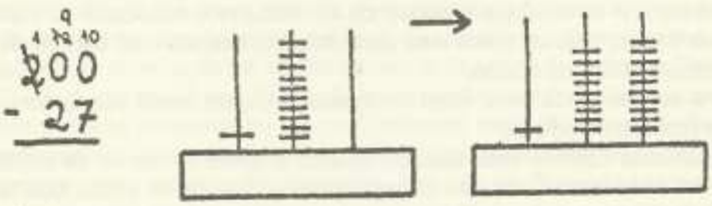
b) fui resolvendo-a utilizando o ábaco, os dedos e o algoritmo e desenvolvendo, com os educandos, uma conversa semelhante à descrita abaixo:

- Dá para tirar sete da coluna das unidades?
  Não, ela está vazia.
- Para quem a unidade pede emprestado?
  Para a dezena, mas ela também está vazia.
- E para quem a dezena pede emprestado?
  Para a centena.
- Quanto tem na coluna da centena?
  Duas
- Se tirarmos uma das centenas, quantas teremos que colocar nas dezenas?
  Dez.

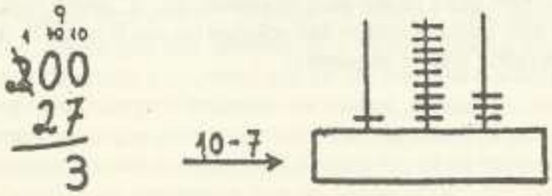
Fiz esse movimento no ábaco e no algoritmo.



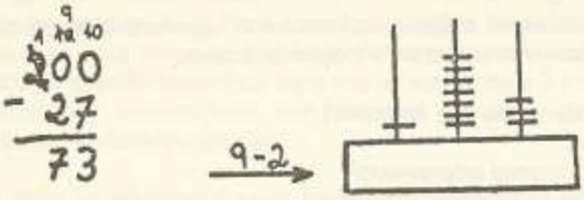
- E agora? A dezena já pode emprestar para a unidade?
  Pode. É só tirar uma dezena e colocar dez bolinhas na coluna das unidades.



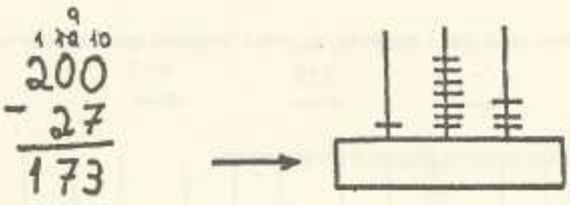
- Tirando sete das unidades, quanto sobra?
  Três.



–Quanto temos na coluna das dezenas?
Nove.
–Tirando 2, quanto sobra?
Sete.



–Quanto ficou na coluna das centenas?
Um.



Relaciono algumas das subtrações desse tipo realizadas com os educandos:

1) 300 – 94
2) 600 – 148
3) 4.000 – 136
4) 6.000 – 231
5) 2.000 – 683

Sexto passo: tabuada de adição (memorização dos fatos básicos da adição)

As adições do quinto passo (adições de várias parcelas) mostram que fica mais fácil de se calcular quando se conhece de cor os fatos básicos da adição. O uso dos dedos pode ser um bom recurso para auxiliar nessa memorização, ao contrário do que muitos pensam. À medida que o educando vai adquirindo habilidade no cálculo através do uso dos dedos, isso vai tendo uma certa influência positiva no sentido da memorização dos fatos básicos da adição.

Para auxiliar ainda mais essa memorização, este sexto passo concentra-se no estudo da tabuada da adição.

Inicialmente fizemos esta tabuada usando a forma horizontal de escrita. Especial destaque foi dado tanto à tabuada do zero como ao fato de se iniciar toda tabuada com uma das parcelas sendo zero. Considero isso importante para dar continuidade àquele trabalho iniciado na Primeira Unidade, de levar o educando a superar a dificuldade inicial em trabalhar com o zero.

A seguir a tabuada da adição foi montada em uma tabela. Procurei fazer com que os educandos preenchessem essa tabela aleatoriamente, isto é, preenchendo o resultado de cada quadradinho sem seguir a ordem das colunas ou das linhas. Os dois modelos da tabuada de adição utilizados são os seguintes:

FORMA HORIZONTAL:

$0 + 0 = 0 \quad 1 + 0 = 1 \;\cdots\; 9 + 0 = 9$
$0 + 1 = 1 \quad 1 + 1 = 2 \;\cdots\; 9 + 1 = 10$
$0 + 2 = 2 \quad 1 + 2 = 3 \;\cdots\; 9 + 2 = 11$

$0 + 9 = 9 \quad 1 + 9 = 10 \;\cdots\; 9 + 9 = 18$

TABELA

+	0	1	2	..
0	0	1	2	
1	1	2	3	
2	2	3	4	

Analisando alguns pontos

Numa mesa-redonda realizada por ocasião da VIII Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPEd) (PUC-SP – maio/85) tive a oportunidade de debater o trabalho da Primeira Unidade e uma primeira versão do texto sobre a Segunda Unidade.

Nesse debate foram levantados alguns pontos, entre os quais o de que eu teria trabalhado apenas a compreensão e o domínio da técnica operatória e não teria trabalhado a disponibilidade para as operações, isto é, não teria dado condições ao educando de identificar as situações da vida cotidiana em que essas operações são necessárias e que, em conseqüência disso, o educando seria levado a saber calcular mas não saberia onde e quando utilizar essa ferramenta.

Estas questões estão ligadas à relação entre teoria e prática. Vejamos: na Primeira Unidade deste trabalho, o ábaco e o sistema de numeração surgiram como uma resposta, a nível teórico, a certas necessidades práticas. Esses dois "instrumentos teóricos" (o ábaco e o sistema de numeração) já continham em si os germans de novos "instrumentos teóricos", isto é, os algoritmos de adição e subtração. Isso possibilitou que nessa Segunda Unidade fosse desenvolvido um conhecimento matemático a partir daquele já adquirido anteriormente, sem que fosse necessário fazer, a todo momento, uma ligação direta com necessidades práticas. No processo realizado na Segunda Unidade, idéias foram sendo geradas a partir de outras que, na Primeira Unidade , estavam diretamente ligadas a objetos e situações concretas. Isso ocorre com a Matemática, onde o surgimento de novas teorias muitas vezes se dá movido pelas próprias teorias já existentes, sem a intervenção direta de uma necessidade prática imediata. Como diz Vieira Pinto (1979): "conhecimento das operações entre as idéias adquire interesse pelo rendimento que produz enquanto instrumento, organon ou método, para descobrir novas propriedades dos corpos, novas leis dos fenômenos e sistematizar os seres em forma racional. Este propósito é cumprido a tal ponto que se faz possível a antecipação do pensamento à realidade, representada pela invenção de objetos, máquinas, dispositivos e a previsão dos acontecimentos, o que vem a ser o domínio da natureza pela razão humana. Se por um lado a natureza domina a razão, pois a cria e lhe dá os conteúdos ideativos originais, os dados do saber e as categorias que os sistematizam, por outro lado, deve-se dizer que a razão domina a natureza porque se vale das idéias que representam adequadamente as propriedades das coisas para alterar os processos de interação entre estas, penetrar na profundidade dos fenômenos, produzir objetos e reações artificiais, e sobretudo para violar a dependência que o pensamento de início se encontra da relação estrita de simples apreensão dos dados materiais imediatos, o que tem lugar mediante a criação de novas idéias a partir das já criadas." (p.69, grifos nossos).

Ou ainda como diz Vazquez (1968): "... as relações entre teoria e prática não podem ser encaradas de maneira simplista e mecânica, isto é, como se toda teoria se baseasse de modo direto e imediato na prática (...) O conhecimento de certa legalidade do objeto permite, com efeito, prever determinadas tendências de seu desenvolvimento e, desse modo, antecipar com um modelo ideal uma fase de seu desenvolvimento ainda não alcançada. Ao produzir este modelo ideal, a teoria evidencia sua relativa autonomia, já que sem esperar que se opere um desenvolvimento real, efetivo, pode propiciar uma prática inexistente ao antecipar-se idealmente a ela. Sem esse desenvolvimento autônomo de seu próprio conteúdo, a teoria seria, no máximo, mera expressão de uma prática existente, e não poderia cumprir, ela mesma, como instrumento teórico, uma função prática." (p. 233 e 238-9, grifos nossos).

É, portanto, necessário que o processo de aprendizagem da Matemática desenvolva essa capacidade de se trabalhar com níveis cada vez maiores de abstração. Evidentemente, é também necessário tomar os devidos cuidados para que não se caia numa distorção própria da concepção que diz que o conhecimento matemático não tem nada a ver com a realidade cotidiana.

Trabalhar com as técnicas operatórias da adição e da subtração num nível mais abstrato, sem necessariamente fazer, a cada pequeno momento, a ligação direta com fatos da realidade cotidiana, não levou os educandos adultos, que participaram dessa experiência, a deixarem de ter a disponibilidade para essas operações. No dia-a-dia desses participantes, essas operações estão tão presentes, que cada conta realizada em sala de aula tinha para eles uma significação muito grande, sem necessidade de que eu os remetesse a uma situação prática. Esses educandos adultos, mesmo antes de dominarem a técnica operatória do cálculo escrito, já sabiam, pela sua própria experiência de vida, para que servem a adição e subtração.

Um outro ponto levantado foi o de que eu teria conduzido os educandos ao domínio das técnicas operatórias de uma forma paternista, dizendo como eles deveriam agir, como deveriam, por exemplo, colocar os ábacos, depois fazendo no meu ábaco, não dando assim chance aos educandos de se depararem com obstáculos cuja superação os levassem a recriar a técnica operatória. Eu estaria entregando a eles um conhecimento pronto e acabado sem que eles fossem sujeitos da sua aprendizagem.

Pretendo, em textos a serem ainda elaborados, explorar minuciosamente essa questão da recriação. Fornecerei aqui apenas alguns dos elementos mais significativos, que já possibilitam uma primeira abordagem.

A recriação precisa ser um processo muito bem dirigido onde sejam fornecidas pelo professor as condições básicas que possibilitem ao educando chegar ao domínio do conhecimento necessário dentro do tempo disponível. Dito de outro modo: para que o educando possa recriar algo no seu processo de aprendizagem, é imprescindível programar condições concretas que viabilizem esse recriar num espaço relativamente reduzido de tempo, que é aquele previsto para as atividades escolares. Deixar o educando "à solta", sem certas condições e procedimentos básicos para um recriar, não possibilita (a não ser em casos excepcionais e por outras razões) a recriação do conhecimento. O educando adulto, pela experiência de vida que tem, intui a necessidade dessas condições e, por vezes, chega a expressá-la. A elaboração e sistematização dessas condições básicas do processo ensino-aprendizagem não pode ser confundida com atos de paternalismo, autoritarismo ou imposição. Essa confusão, no entanto, tem sido feita, freqüentemente, inclusive por educadores que têm se dedicado a desenvolver uma ação pedagógica mais consistente. É preciso compreender que o momento em que o educando se depara com uma dificuldade e reconhece a necessidade de superá-la é um momento importante no processo de recriação do conhecimento humano. Este processo, porém, não se reduz a esse momento. É imprescindível, como foi dito, possibilitar determinadas condições básicas para que o educando não retroceda com a indefinição em Que, de repente, se vê envolvido, e possa concentrar sua atenção naquilo que é essencial, naquele momento, para a recriação do processo de raciocínio que a humanidade criou através dos séculos.

Por exemplo: para que os educandos redescobrissem os vários procedimentos da técnica operatória da adição, solicitei que eles apresentassem um número em cada ábaco; depois colocassem os dois ábacos numa posição tal que as colunas ficassem alinhadas, e, finalmente, juntassem as duas quantidades num ábaco só. Nesse momento, cada um juntava à sua maneira. Vejamos porque eu pedia que eles alinhassem as colunas dos ábacos: não fornecendo esse tipo de condição, os educandos poderiam ver-se prejudicados pela disposição espacial dos ábacos na mesa e isso desviaria sua atenção do principal, naquele momento, que eram os procedimentos operatórios da adição. Isso não é paternalismo, não é autoritarismo, não é imposição, mas é identificar tanto as condições em que o educando se encontra naquele processo quanto discernir o que ele precisa fazer sozinho, bem como no que ele precisa ser orientado. E ainda: o ato de realizar no ábaco grande a operação proposta não é um momento de imposição de modo de fazer do professor. É um momento que leva os educandos a uma reflexão sobre o modo como cada um tinha feito a operação no seu ábaco e sobre os porquês dos erros e dos acertos. Vejamos: eu sempre pedia que algum dos educandos dissesse como se achava que eu deveria fazer no ábaco grande e depois ia questionando as razões de cada procedimento. Esse era, inclusive, o momento de repensar todo o processo que fizeram individualmente nos seus ábacos.

Outro questionamento feito foi o da relação entre o cálculo mental utilizado pelo alfabetizando adulto na sua vida cotidiana e o cálculo escrito ensinado na escola. Eu teria deixado de trabalhar, na Segunda Unidade, o cálculo mental dos educandos, ensinando-lhes técnicas operatórias do cálculo escrito que poderiam ser muito diferentes do modo como aqueles educandos já calculavam mentalmente. E isso estaria significando uma justaposição de um conhecimento a outro.

Pretendo também analisar detalhadamente essa relação entre o cálculo mental e o escrito em outro texto a ser elaborado. Por hora destaco o seguinte: a) ao efetuar uma operação no ábaco, o educando já está manifestando como ele calcula mentalmente e inclusive compreendendo melhor esse seu cálculo mental; b) quando ele compreende que os fundamentos de uma técnica operatória do cálculo escrito são os mesmos fundamentos de uma técnica diferente utilizada no cálculo mental, uma coisa não lhe parece como justaposta à outra; e c) o educando adulto precisa aprender a técnica operatória mais utilizada na sociedade em que ele vive, por uma questão de comunicação. Ele precisa dominar o instrumento vigente na sociedade letrada onde vive. Possibilitar-lhe esse domínio é uma das funções da democratização do saber sistematizado.

Referências bibliográficas

DANTZIG, Tobias. **Número:** a linguagem da ciência. Rio de Janeiro, Zahar, 1970.

DUARTE, Newton. "O compromisso político do educador no ensino de matemática". ANDE, São Paulo, 5(9): 51-4. 1985b.

—— "O ensino de matemática na alfabetização de adultos". **Cadernos de Educação Popular.** Rio de Janeiro, n.8. 1985c.

—— "Recriando o ábaco e o sistema de numeração". Educação & Sociedade, São Paulo, 7(20): 141-57, jan./abr. 1985a.

HOGBEN, Lancelot. Maravilhas da matemática – influência e função da matemática nos conhecimentos humanos. Rio de Janeiro, Globo, 1946.

LAMPARELLI, Lídia C. Atividades matemáticas – 1ª série do 1º grau. 2.ed. São Paulo, CENP, 1984.

NICOLAI, Ronaldo. "Alfabetização em matemática". Jornal **Educação Democrática** São Paulo, n4. 1984. p.8-11.

PIAGET, Jean & SZEMINSKA A.A gênese do número na criança. e.ed. Rio de Janeiro, Zahar, 1975.

PINTO, Álvaro Vieira. Ciência e existência. 2.ed. Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1979.

TAHAN, Malba. As maravilhas da matemática. Rio de Janeiro, Bloch, 1983.

VAZQUEZ, A. Sanchez. A filosofia da praxis. Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1968.

Recebido em 2 de outubro de 1985

Newton Duarte é pesquisador do Programa de Educação de Adultos do PPGE (Programa de Pós-Graduação do CECH) da Universidade Federal de São Carlos.

N. do A. – Aproveito a oportunidade para fornecer o endereço àqueles leitores que quiserem entrar em contato comigo: Universidade Federal de São Carlos, Programa de Educação de Adultos, Caixa Postal 675, São Carlos, SP, CEP 13560.

SÔBRE UMA PROPRIEDADE MÉTRICA DO PARALELOGRAMO

L.A. Medeiros
Instituto de Matemática - UFRJ
Caixa Postal 68.530 - CEP 21944
Rio de Janeiro - RJ

INTRODUÇÃO

A idéia de escrever o presente artigo, originou-se de uma conferência que o autor teve oportunidade de pronunciar na Universidade Santa Úrsula, no primeiro semestre de 1988. Tal ciclo de conferências vem sendo organizado pela Diretoria do GEPEM. O autor agradece, duplamente, à Professora Estela Kaufman Fainguelernt pelo convite para fazer a mencionada conferência e para escrevê-la em forma de artigo. Ei-lo !

A escolha do tema presente, motivou-se na idéia de analisar um resultado simples da Geometria Euclidiana Plana, com consequências profundas em tópicos mais avançados da Matemática. É evidente que a Geometria de Euclides é rica em conceitos e propriedades, com consequências posteriores notáveis. Entre outras, é esta uma das razões para que seu ensino seja feito com muito cuidado na escola secundária.

O assunto do presente artigo surgiu na década de 30, quando a Análise Matemática teve um grande impulso com os trabalhos de matemáticos europeus, entre eles, menciona-se o livro de Stefan Banach, Teorie des Opérations Linéaires, Hafner Publishing Company - N.Y. 1932. Neste livro, ele introduz a noção de espaço normado completo, hoje conhecida sob a denominada de espaço de Banach, local apropriado ao estudo de vários problemas da Matemática e de suas múltiplas aplicações. Anteriormente eram conhecidos os espaços vetoriais dotados de produto escalar. Restava relacionar os espaços normados, àqueles com produto escalar. A resposta decisiva foi dada por Von Neuman, usando uma propriedade do paralelogramo. O objetivo do presente artigo é descrever a idéia de Von Neuman. No final do artigo há uma coleção de trabalhos relacionados com o presente assunto, para orientação do leitor.

1. MOTIVAÇÃO

Considere-se o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, constituído pelos pares de números reais. Seus objetos serão denotados por $x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2)$, $z = (z_1,z_2)$, etc. Costuma-se denominar o $\mathbb{R}^2$ de plano real. De modo semelhante, o corpo dos números reais é denominado reta real.

Dados dois vetores $x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2)$ do $\mathbb{R}^2$, examina-se a função $(.|.)$ que a cada par de vetores x, y do $\mathbb{R}^2$, associa o número real $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2$, isto é:

(1) $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2$

Examinando (1), conclui-se que a função $(.|.)$ é linear em cada variável ao fixar-se a outra.

Por isto, diz-se que $(.|.)$ é uma FORMA BILINEAR.

Outra propriedade, decorrente da comutatividade da multiplicação em $\mathbb{R}$, é que $(x|y) = (y|x)$.

Por este motivo, diz-se que a forma bilinear $(.|.)$ definida por (1) é SIMÉTRICA. Quando $x = y$, deduz-se de (1) que:

(2) $(x|x) = x_1^2 + x_2^2$

Portanto, $(x|x) > 0$ sendo $(x|x) = 0$ se e somente x for o vetor nulo. Diz-se, por este motivo, que a forma bilinear, simétrica $(.|.)$, é ESTRITAMENTE POSITIVA.

É fundamental observar-se que $(.|.)$ está definida no produto cartesiato $\mathbb{R}^2 x \mathbb{R}^2$. A diagonal deste espaço vetorial é constituída pelos pares $(x,y), x,y \in \mathbb{R}^2$, tais que $x = y$. Resulta que (2) é a restrição de $(.|.)$ à diagonal do $\mathbb{R}^2 x \mathbb{R}^2$, isto é, a forma quadrática associada à forma bilinear $(.|.)$.

O que foi feito no $\mathbb{R}^2$ com a definição de $(.|.)$ por meio de (1), repete-se "mutatis mutandis" para o $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4 \ldots \mathbb{R}^n$

Estas propriedades da função $(.|.)$ definida no $\mathbb{R}^n$, em geral, dão origem a uma definição geral da noção de PRODUTO ESCALAR.

DEFINIÇÃO 1 - Considere-se um espaço vetorial real E. Denomina-se produto escalar em E, a uma forma $a(.,.)$ definida em E x E com valores reais, bilinear, simétrica, estritamente positiva.

De modo explícito, $a(.,.)$ satisfaz às condições:

i) BILINEAR

$a(\alpha x + \beta y, z) = \alpha a(x,z) + \beta a(y,z)$

para $\alpha,\beta \in \mathbb{R}, x,y,z \in E$. Análoga propriedade para a segunda variável da forma:

ii) SIMÉTRICA

$a(x,y) = a(y,x)$ para todo par $x,y \in E$.

iii) ESTRITAMENTE POSITIVA

$a(x,x) > 0$ e $a(x,x) = 0$ se e somente se $a = 0$, sendo 0 o vetor nulo de E.

EXEMPLO 1 - No $\mathbb{R}^2$, considerando-se $a(x,y) = (x|y)$ definida por (1) obtem-se um produto escalar.

EXEMPLO 2 - Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}, \text{ com } \alpha > 0 \quad \text{e } \alpha\gamma - \beta^2 > 0$$

Define-se a função $a(.,.)$ no $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ do modo seguinte:

(3) $a(x,y) = (Ax|y)$,

sendo:

$$Ax = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\alpha x_1 + \beta x_2 \;,\; \beta x_1 + \gamma\, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Define-se:

$$(Ax|y) = ((\alpha x_1 + \beta x_2 \;,\; \beta x_1 + \gamma x_2) \mid (y_1, y_2))$$

Resulta:

(3 bis) $a(x,y) = \alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_1 + \beta x_1 y_1 + \gamma x_2 y_2$

A forma $a(.,.)$ definida por (3), escrita explicitamente por intermédio de (3 bis), satisfaz às condições da Definição 1. Portanto $a(.,.)$ é um produto escalar no $\mathbb{R}^2$.

Conclui-se, que dada uma matriz (a_{ij}), dois por dois, isto é, $1 \leq i,j \leq 2$, simétrica, $a_{11} > 0$ e determinante positivo, então, por intermédio de (3), ela define um produto escalar no $\mathbb{R}^2$.

Uma questão que surgiria imediatamente é analisar a recíproca desta propriedade. De modo preciso, indagar-se-ia quais as propriedades das matrizes associadas às formas $a(.,.)$ definidas em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, satisfazendo às condições da Definição 1.

De fato, considere uma base (e_1, e_2) do $\mathbb{R}^2$, de modo que

$$x = (x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2 \;, y = (y_1, y_2) = y_1 e_1 + y_2 e_2.$$

Daí, obtem-se:

(5) $a(x,y) = a(x_1e_1 + x_2e_2 + y_2e_2)$

Da condição (i) da Definição 1, resulta:

(6) $a(x,y) = a(e_1,e_1)x_1y_1 + a(e_1,e_2)x_1y_2 + a(e_1,e_2)x_2y_2 + a(e_2,e_2)y_2y_2$

Da condição (ii) da Definição 1, obtem-se:

(7) $a(e_1,e_2) = a(e_2,e_1)$

Portanto,

(6 bis) $a(x,y) = a(e_1,e_1)x_1y_1 + a(e_1,e_2)x_1y_2 + a(e_1,e_2)x_2y_1 + a(e_2,e_2)y_2y_2$

Com o objetivo de tomar menos pesada a notação, convenciona-se usar:

$a(e_i,e_j) = a_{ij}$, para $1 \leqslant i,j \leqslant 2$. Portanto (6 bis) toma a forma:

(7) $a(x,y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{12}x_2y_1 + a_{22}y_2y_2$

Daí, deduz-se que associada à forma $a(.,.)$ definida no $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, satisfazendo às condições da Definiçao 1, encontra-se a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{sendo} \quad a(x,y) = (Ax|y)$$

Resta examinar a condição (iii) da Definição 1. De fato, tem-se de (7):

(8) $a(x,x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$

A condição (iii) exige que $a(x,x) > 0$ se $x \neq 0$. Logo

(9) $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 > 0$

para todo vetor $x \neq 0$. Como $x \neq 0$, suponha-se $x_2 \neq 0$. Dividindo-se ambos os membros de (9) por x_2, fazendo-se $\xi = \dfrac{x_1}{x_2}$ obtem-se, de (9),

(10) $a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi + a_{22} > 0$,

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Sabe-se, do estudo do trinômio do segundo grau, que (10) é verdadeiro quando

$a_{11} > 0$ e $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, ou

(ii) $a_{11} > 0$ e $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$

Conclui-se que $a(.,.)$ é uma função produto escalar no $\mathbb{R}^2$, se e somente se a matriz A, associada a $a(.,.)$, for simétrica, $a_{11} > 0$ e $\det A > 0$.

É oportuno observar que o produto escalar do Exemplo 1 é obtido quando A for a matriz identidade, isto é:

$$a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j, \; a_{ij} = 1 \text{ se } i = j.$$

O resultado dos Exemplos 1 e 2, vale para o caso em que $E = \mathbb{R}^n$ com as modificações necessárias.

Retorne-se a (2) dada por $(x|x) = x_1^2 + x_2^2$. Fazendo-se uma figura no plano, $\mathbb{R}^2$, deduz-se do teorema de Pitágoras que $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ é o comprimento do vetor x do $\mathbb{R}^2$. Note-se que ele é exatamente $\sqrt{(x|x)}$. O comprimento do vetor x, que se representa por $\|x\|$, é denominado, também, a norma de x, dada por:

(12) $\|x\| = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Sabe-se que a norma definida por (12) no $\mathbb{R}^2$, por meio do produto escalar $(x|y) = x_1y + x_2y_2$, possui as propriedades, decorrentes das propriedades de $(x|y)$:

- $\|x\| > 0$ e $\|x\| = 0$ se e somente se $x = 0$, vetor nulo do $\mathbb{R}^2$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Estas propriedades, motivam a seguinte definição geral:

DEFINIÇÃO 2 - Seja E um espaço vetorial real. Denomina-se uma norma em E, uma função $\|.\|$ definida em E com valores reais; satisfazendo às seguintes condições:

i) $\|x\| > 0$ e $\|x\| = 0$ se e somente se $x = 0$, sendo 0 o vetor nulo de E.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \; \|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E$.

iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, para todo par $x,y \in E$.

Observe-se que se um espaço vetorial E for dotado de um produto escalar $a(x,y)$, então ele induz em E uma norma definida por:

$$\|x\| = \sqrt{a(x,x)}.$$

Uma norma em um espaço vetorial E não induz, em geral, um produto escalar em E. O problema a resolver, seria encontrar um axioma a ser incorporado aos da Definição 2, para que uma norma induzisse um produto escalar. O § a seguir é dedicado a este problema.

2. IDENTIDADE DO PARALELOGRAMO - Seja E um espaço vetorial real, dotado de produto escalar $a(x,y)$. É suficiente raciocinar nos subespaços de dimensão dois de E. Considere-se $x,y \in E$. Tem-se, por definição:

$$\|x + y\|^2 = a(x + y, x + y) \ ; \ \|x - y\|^2 = a(x - y, x - y)$$

Efetuando-se os cálculos, obtem-se:

$$(1) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \ \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Conclui-se que um espaço vetorial E foi dotado de produto escalar $a(x,y)$, então a norma $\|x\| = \ a(x|x)$, por ele introduzida, satisfaz a identidade (1), denominada IDENTIDADE DO PARALELOGRAMO. Geometricamente ela afirma que em um paralelogramo, a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais é igual à soma dos quadrados dos comprimentos de seus lados.

EXEMPLO 1 - Considere um subespaço de dimensão dois de E, o qual identifica-se ao $\mathbb{R}^2$. Considera a norma

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Por um cálculo simples, conclui-se que ela satisfaz à identidade (1).

EXEMPLO 2 - Ainda no mesmo espaço do EXEMPLO 1, considere-se norma:

$$\|x\| = |x_1| + |x_2|$$

Trata-se de uma norma, porém não é válida a identidade (1).

As normas anteriores são casos particulares da norma:

$$\|x\|^p = |x_1|^p + |x_2|^p \quad , \quad 1 \leqslant p < +\infty$$

A do Exemplo 1 é o caso $p = 2$ e do Exemplo 2 é o caso $p = 1$. Apenas o caso $p = 2$ satisfaz a identidade do paralelogramo. Consulte-se observações no final deste artigo.

Seja E dotado de produto escalar $a(x,y)$ e $\|x\|^2 = a(x,y)$. Um cálculo simples, prova que:

$$(2)\quad 4a(x,y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$$

Será demonstrado, a seguir, que em um espaço vetorial real E, a(x,y) definida por (2) é uma boa definição do produto escalar, se a norma de E satisfaz à identidade do paralelogramo.

PROPOSIÇÃO 1 (Fréchet - Von Neuman) - Seja E um espaço vetorial real dotado de uma norma $\|.\|$, satisfazendo à identidade do paralelogramo. Então:

$$(3)\quad a(x,y) = \frac{1}{4}\left[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right]$$

é um produto escalar em E.

DEMONSTRAÇÃO

É suficiente verificar-se que a função a(.,.) definida por (3) satisfaz às condições da definição de propriedade escalar, Definição 1, § 1.
De fato, a(x,y) = a(y,x) facilmente constatada da definição (3). Conclui-se que a(x,y) é simétrica.
Tem-se $a(x,x) = \frac{1}{4}\|2x\|^2 = \|x\|^2$ pela propriedade (ii) da definição de norma, cf. Definição 2, § 1. Logo, a(x,y) é estritamente positiva. Sendo a(x,y) simétrica, para completar a demonstração é suficiente provar que ela é linear na primeira coordenada.

Realmente, pela identidade do paralelogramo, tem-se:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Substituindo-se membro a membro, vem:

$$\|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 + \|x - y + z\|^2 - \|x - y - z\|^2 = 2(\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2)$$

Da definição (3) e desta última identidade, vem:

$$4a(x + y,z) + 4a(x - y,z) = 8a(x,z) \quad \text{ou}$$

$$(4)\quad a(x + y,z) + a(x - y,z) = 2a(x,y)$$

Note-se que $a(0,z) = \|z\|^2 - \|z\|^2 = 0$, por (3) e pela (ii) da Definição 2, § 1.

Logo, fazendo-se x = y em (4), obtem-se:

$$a(2x,z) = 2\,a(x,z)$$

Retomando-se a (4), obtem-se:

$a(x + y,z) + a(x - y,z) = a(2x,z)$

Tomando-se $x + y = x$, $x - y = y$ resulta $2x = x + y$, logo:

$a(x,z) + a(y,z) = a(x + y,z)$
provando que $a(x,y)$ é aditiva na primeira coordenada.

Sendo simétrica, implica ser a forma aditiva na segunda coordenada.

Resta apenas, demonstrar a homogeneidade na primeira coordenada, isto é, $a(\lambda x,z)=\lambda a(x,y)$ para todo número real λ.

Considere-se o conjunto S definido por:

$$S = \{\lambda \in \mathbb{R} \; ; \; a(\lambda x,y) = \lambda a(x,y)\}$$

É suficiente provar que $S = \mathbb{R}$. Tem-se $S \subset \mathbb{R}$. Portanto, devemos provar que $\mathbb{R} \subset S$. Tem-se que $0 \in S$. De $a(0,y) = 0$, vem $a(x + (-x),y) = 0$, logo $a(-x,y) = -a(x,y)$, provando que $-1 \in S$. Sendo $a(x,y)$ aditiva $\lambda,\mu \in S$, $\lambda \pm \mu \in S$ resultando que $\mathbb{Z} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, os inteiros, pertencem a S. Considere-se $\lambda,\mu \in \mathbb{Z}, \mu \neq 0$. Obtem-se $a(\frac{\lambda}{\mu} x,y) = \lambda a(\frac{x}{\mu},y)$. Sendo $\mathbb{Z} \subset S$, obtem-se, multiplicando-se ambos os membros por μ, vem $a(\frac{\lambda}{\mu} x,y) = \frac{\lambda}{\mu} a(x,y)$, provando que S contém os racionais $\mathbb{Q}$. Para provar que S contém os irracionais, note-se que as funções $\alpha \longrightarrow \|\alpha x + y\|$, $\alpha \longrightarrow \|\alpha x - y\|$ são contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, fixados $x,y \in E$. Seja λ irracional e $(\lambda_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de racionais convergindo, em $\mathbb{R}$, para λ. Obtem-se:

$$a(\lambda x,y) = a(\lim\lambda_n x,y) = \lim a(\lambda_n x,y) =$$
$$= \lim\lambda_n a(x,y) = \lambda a(x,y)$$

Portanto S contém os números reais, concluindo-se que $a(x,y)$ é homogênea. Logo, $a(x,y)$ definida por (3) é um produto escalar.

Q.E.D.

OBSERVAÇÕES

1. Com apropriadas mudanças, o que foi dito acima vale para o caso de espaços vetoriais com escalares complexos.

2. Há várias outras propriedades métricas do plano que implicam na existência do produto escalar associado a uma norma. Por exemplo, há uma condição motivada pelo teorema de Pitolomeu sobre quadriláteros. De modo análogo há outra usando propriedades do triângulo isósceles. Outro aspecto geométrico associado às normas que induzem produto escalar, é a regularidade à superfície da esfera unitária. Como é sabido, dada uma norma $\|.\|$ em E, a esfera unitária é $\{x \in E ; \|x\| < 1\}$ e sua superfície, ou sua fronteira, é $\{x \in E ; \|x\| = 1\}$. É útil consultar Schoenberg [8]. Seria educativo fazer os gráficos das esferas unitárias no $\mathbb{R}^2$, relativas às normas dos Exemplos 1 e 2.

3. No Exemplo 2, as normas aí definidas, dependiam de p em $[0, +\infty[$. Que acontece quando $p = +\infty$? Demonstra-se que

$$\lim_{p \to \infty} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p} = \max (|x_1| , |x_2|),$$

para todo $x = (x_1, x_2)$.

De fato, suponha-se que $\max (|x_1|, |x_2|) = M$

Note-se que M será $|x_1|$ ou $|x_2|$. Tem-se $|x_1| \leq M$ e $|x_2| \leq M$. Logo $|x_1|^p + |x_2|^p \leq 2M^p$. Portanto:

$$(5) \lim_{p \to \infty} p \quad (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p} \leq M$$

Para fixar idéia, suponha-se que $M = |x_1|$. Semelhante argumento vale quando $M = |x_2|$. Para cada $\varepsilon > 0$, tem-se $M - \varepsilon < |x_1|$, isto é, $(M - \varepsilon)^p < |x_1|$ e com mais forte razão $(M - \varepsilon)^p < |x_1|^p + |x_2|^p$. Daí conclui-se que:

$$M - \varepsilon \leq \lim_{p \to \infty} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$$

Válido para todo $\varepsilon > 0$. Resulta que:

$$(6) \ M \leq \lim_{p \to \infty} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$$

De (5) e (6) conclui-se que:

$$\lim_{p \to \infty} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p} = M = \max (|x_1|, |x_2|)$$

Tem-se uma nova norma no $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\|x\|_\infty = \text{máx } (|x_1|, |x_2|)$$

Q.E.D.

Seria educativo fazer o gráfico das esferas unitárias das normas do Exemplo 2, com $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Brezis, Haim - Analyse Fonctionale - Masson Paris, France 1953.

[2] Day, M.M. - Some characterizations of inner product spaces - Trans.Amer.Math. Society, 62(1-147) 320-337.

[3] Fichin, F.A. - Note on the existence of escalar products in normed linear spaces - Ann. of Math. (2) 45 (1944) 362-366.

[4] Fréchet, M - Sur la definition axiomatique d'une classe d'espaces véctoriels distancés applicables vectoriellement sur l'espace de Hilbert Ann. of Math. (2) 36(1935) 705-718.

[5] Jordan, P. and Von Neuman J. - On inner products in linear metric spaces. Ann. of Math.(2) 36 (1935) 719-723.

[6] Kakutani, S. - Some characterization of Euclidian space, Jap. J. Math. 16(1939) 93-97.

[7] Lorch, E.R. - On some implications which characterize H. spaces - Ann.of Math. 49 (1948) 523-532.

[8] Schoenberg I.J. - Aremark in N.N. Dky characterization of inner product spaces, and a conjecture of L.M. Blumental, Proc. Anner Math. Soc. 3 (1952) 961-964.

PROBLEMAS, IDÉIAS E SUGESTÕES

Cristina Loureiro e Leonor Moreira

Transcrito da Revista Educação e Matemática, Ano I, nº 1, Jan/87, da Associação de Professores de Matemática de Portugal

MANDARIM TAMBÉM TEM EXAME

No ano 855 da nossa era, vivia, na China, o imperador Yang Souen. Tendo vagado um lugar importante e havendo dois mandarins interessados no cargo, o imperador decidiu que ocuparia o lugar o mandarim que resolvesse o seguinte problema.

O chefe de uma quadrilha de ladrões dizia para os seus homens:

– Se cada um de nós ficar com quatro das peças de tecido que roubamos, sobram duas peças.

Mas se cada um de nós quiser ficar com cinco, faltam quatro peças.

Quantos eram os ladrões?

Nível de Escolaridade – Básico

Notas Metodológicas – Os alunos do Ensino Básico só podem chegar à solução por tentativas.

- Sugere-se o trabalho em grupo, seguido de discussão alargada ao grupo/turma.
- Se as crianças não esboçarem qualquer estratégia de abordagem, certifique-se de que compreenderam o enunciado do problema. Em caso afirmativo, sugira que experimentem com um número qualquer de ladrões e que calculem o número de peças de tecido que satisfaz cada uma das condições do problema.
- Sugira que organizem os resultados das diferentes tentativas.
- Aos grupos que derem o trabalho por acabado, sugira, primeiro, que testem a "solução" e, depois, proponha-lhes o problema de desenvolvimento.
- Na discussão alargada, proponha a seguinte apresentação.

Nº de ladrões	1	2	3	4	5	**6**	7
Nº de peças no primeiro caso	6	10	14	18	22	**26**	30
Nº de peças no segundo caso	1	6	11	16	21	**26**	31

- Ponha à discussão a existência de outras soluções. Para os alunos deste nível de escolaridade, a convicção de que a solução é única pode surgir da análise do quadro de valores obtidos. Veja-se que: – o número de peças de tecido aumenta com o núme-

ro de ladrões, em qualquer dos casos;
– entre 1 e 5 ladrões, a diferença entre o número de peças, num e noutro caso, decresce até acabar por se anular no ponto crítico 6 (solução);
– a partir de 6 ladrões, a diferença entre o número de peças começa a aumentar e pode-se prever que será cada vez maior.

Desenvolvimento – Inventar um problema com estrutura idêntica pode ser uma tarefa interessante. Sugira aos alunos que, partindo de um dado número de ladrões, construam um problema semelhante.

ARRUMAÇÕES DIFÍCEIS

Dispomos de uma colecção de objectos. Se os colocarmos em filas de 4 sobram 2; se os colocarmos em filas de 5 sobram 3. Por quantos objectos é formada a colecção?

Nível de Escolaridade – Secundário

Notas Metodológicas – Algumas soluções deste problema poderão ser obtidas por tentativas, utilizando uma certa quantidade de objectos ou através de representação no papel. No entanto, um problema com mais de uma solução tem a vantagem de criar a necessidade de organizar e relacionar os dados de forma a que se consigam obter todas as soluções possíveis. Assim, a resolução lógica e organizada, com a conseqüente utilização de um ou mais algoritmos, apresenta-se como altamente vantajosa em relação à resolução por tentativas que, quando muito, poderá fornecer algumas soluções.

A utilização de três incógnitas, das relações entre elas e a organização de dados em tabela são outros aspectos positivos do interesse formativo deste problema.

Proposta de Resolução

Nº de objetos: n
Nº de filas de 4: x
Nº de filas de 5: y

$4x + 2 = n \qquad x = \frac{5y + 1}{4}$

$5y + 3 = n$

Para obter os pares de soluções inteiras de equação deve atender-se a que $5y+1$ seja múltiplo de 4.

y	5y + 1	x
1	6	
2	11	
3	16	4 - - -> n= 18
4	21	
5	26	
6	31	
7	36	9 - - -> n= 38

Qualquer solução do problema poderá ser obtida a partir da expressão $n = 18 + 20K, k \in N$. A razão de ser do factor 20 tem que ver com o facto deste ser m.m.c. (4,5).

UMA DOSE DE HUMOR EM SUA REFLEXÃO

Valderez F. Fraga, Ma.

Coordenadora de Educação e Desenvolvimento Humano
Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Este instrumento é parte de um módulo de Avaliação de Desempenho do Professor pelo Aluno, dedicado especialmente a professores de 3º grau, da área de Tecnologia. Um significativo grupo desses professores, com os quais tive a satisfação de trabalhar, incentivou-me a desenvolver uma sistemática de avaliação que permitisse tanto ao aluno realizar auto-análise e autocrítica, quanto oferecesse ao professor dados e percepções que o levassem a refletir sobre seu próprio desempenho docente, qualidade de planejamento e de apresentação de sua disciplina, bem como de suas atitudes pedagógicas.

Para isto, a fundamentação dos instrumentos assentou-se em Objetivos Afetivos e Micro Ensino, o que gerou interesse na participação por parte do aluno, facilitando respostas ou colocações sinceras e úteis ao professor envolvido no processo, incentivou o respeito recíproco professor/aluno, o diálogo franco e ético e, ainda, o interesse dos demais professores pela problemática ensino X aprendizagem como um todo, a partir das verificações obtidas.

Este instrumento, em específico, embora algumas peculiaridades do contexto para o qual foi elaborado (por exemplo, uma escola de Engenharia que mantém tradicionalmente um sistema de orientação acadêmica e humana, o Sistema de Aconselhamento), poderá ser utilizado por qualquer grupo de professores.

Professores da área de Tecnologia, em geral, costumam ressentir-se da escassez de instrumentos disponíveis e úteis à sua realidade e necessidades, o que aparece menos freqüentemente entre os professores da área de Ciências Humanas.

Os demais instrumentos que integram o conjunto citado representam necessariamente o resultado de encontros de grupos de professores que participaram de sua elaboração. Não se trata, pois, de um módulo de instrumentos de avaliação elaborado a priori, mas originado em cada contexto, procurando respeitar diferenças individuais, interesses e necessidades de cada realidade a ser tratada.

A razão pela qual o instrumento "Uma Dose de Humor em sua Reflexão" foi selecionado para divulgação mais ampla deve-se a características especiais que permitem seu emprego isoladamente, como incentivo à análise e à reflexão dos professores sobre o que cada um faz ou desejaria fazer, visando o aperfeiçoamento de suas atividades docentes.

Este instrumento emprega duas estratégias que precisam ser bem compreendidas:

1. as respostas restritas às alternativas Falso e Verdadeiro são intencionais. Visam desenvolver um nível ótimo de necessidade de:
   a) discutir as questões propostas com seus pares;
   b) levantar as percepções dos alunos, a fim de checar com a auto-análise e a autocrítica própria de cada professor.

2. O conteúdo pedagógico do Instrumento cobre os assuntos: aula, conteúdo, interação, planejamento, avaliação, objetivos.

Alguns ítens correspondentes a uma das categorias acima foram intencionalmente colocados no contexto de categoria diversa. Essa abordagem é fundamentada em Administração de Conflitos, a partir de Eventos Críticos. Essa abordagem apresenta a vantagem de facilitar o tratamento de cada problemática dentro do contexto em que normalmente ocorre. Ex.: Item 4-1 Aula refere-se a VI Objetivos, questionando se os **objetivos** de sua Disciplina estariam claros para os alunos, pelo fato de ser **a situação aula** fácil de identificar algum problema e a mais adequada para tratar do assunto.

Encaminhar a:

Profª Valderez F. Fraga
CTA – ITA – IDV – CEDH
12225 – São José dos Campos – SP

INTRODUÇÃO

Não é fácil a vida de professor. Todo mundo tem um número incrível de expectativas em cima de sua atuação, inclusive você.

Nossa proposição é a de que você deva brindar-se com uma **Auto-análise bem humorada**, já que você vive se colocando na berlinda.

Este questionário é só seu; digamos que represente a **Voz da Consciência do Professor.** Que diálogo você teria com ela?

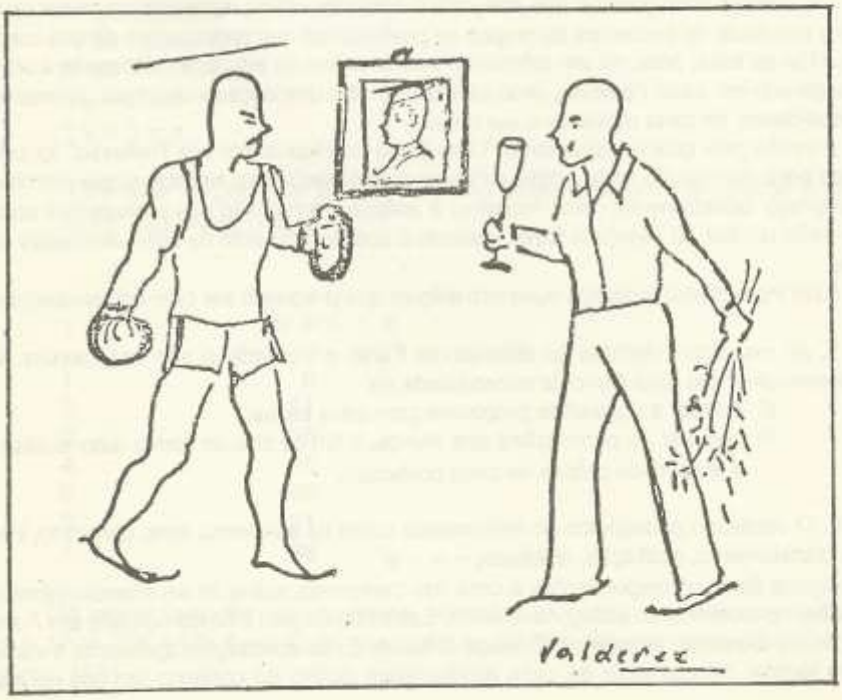
Vejamos: Seis tópicos são apresentados a você sobre sua Disciplina.

I – Aula	IV – Planejamento
II – Conteúdo	V – Avaliação
III – Interação	VI – Objetivos

Marque os que revelarem a sua realidade e, após cada tópico, analise-se de acordo com as instruções.

Mentirinhas não valem, heim?

... Mas trate-se com cordialidade. Por ser um professor, pelo menos isto você merece.



I – AULA

1. Tenho procurado conversar com meus alunos sobre a necessidade desta disciplina para a formação dos mesmos. F V

2. Tenho procurado incentivar discussões sobre o conteúdo desta disciplina em classe. F V

3. Tenho administrado eficientemente cada hora/aula desta disciplina. F V

4. Meus alunos já me disseram que deixo claro os objetivos desta disciplina. F V

5. Os levantamentos junto aos meus alunos têm por objetivos:
   - facilitar a auto-análise e a autocrítica do aluno F V
   - desenvolver a disciplina consciente F V
   - inteirar-me sobre as dificuldades dos alunos F V
   - checar a atmosfera em que se desenvolvem as minhas aulas F V
   - traçar correlações entre o desempenho acadêmico da turma e suas percepções sobre esta disciplina. F V
   - receber "feedback" sobre o meu desempenho F V
   - aprimorar a disciplina e o meu desempenho F V
   - ajudar o aluno a obter sucesso em suas atividades acadêmicas F V
   - melhorar o relacionamento em sala F V

6. Os alunos podem encontrar oportunidades para criatividade nesta disciplina. F V

7. Procuro variar as situações de ensino em sala. F V

8. Tenho criado situações para que o aluno desenvolva:
   - criatividade F V
   - iniciativa F V
   - rapidez F V
   - precisão F V
   - liderança F V
   - auto-disciplina F V
   - sistemática de trabalho F V
   - espírito de equipe F V

9. Identifico tópicos e unidades desta disciplina, considerados pelos alunos como:
   - difíceis F V
   - fáceis F V
   - estimulantes F V
   - cansativos F V
   - monótonos F V
   - superficiais F V
   - aprofundados F V
   - irrelevantes F V

10. Tenho trabalhado sobre estas verificações F V

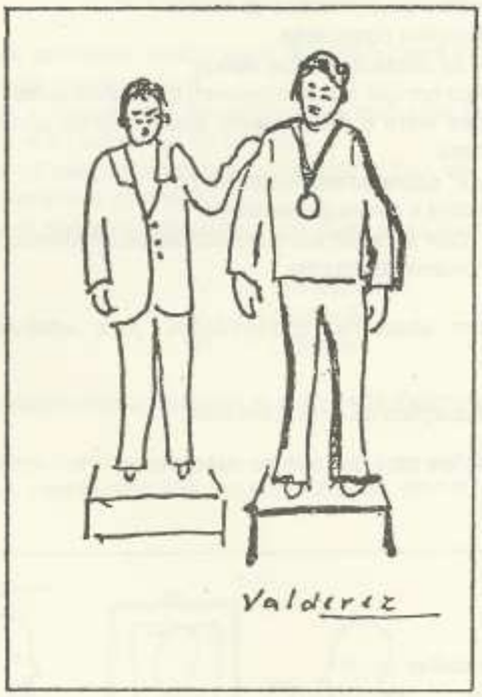
11. Os exemplos que apresento em aula são:
    - atualizados F V
    - significativos ao contexto e ao conteúdo F V
    - esclarecedores F V

12. A atmosfera em minhas aulas é saudável, pois os meus alunos me confirmaram isto:
    - ambiente tranqüilo F V

- estimulante – não tumultuado F V
- descontraído – sem excesso F V
- participativo – sem monopólios F V
- integrador – sem acomodação F V

AULA – INSTRUÇÕES

Se você obteve entre 33 e 39 pontos, somando todos os "V" de questões e itens, você é um verdadeiro campeão. Resta desejar que seus alunos o mereçam.



Se você obteve 20 pontos, sua aula deve estar entre as muito significativas na instituição. Regozije-se.

Se você obteve 15 pontos e incluiu as questões 2, 3, 4, 6, 7 e 10, sua aula deve ser bastante boa. Vá em frente.

Se você não marcou nem 4 das questões citadas acima, analise com cuidado os aspectos em que coloca mais ênfase no seu trabalho, pois ele poderá necessitar de um redirecionamento.

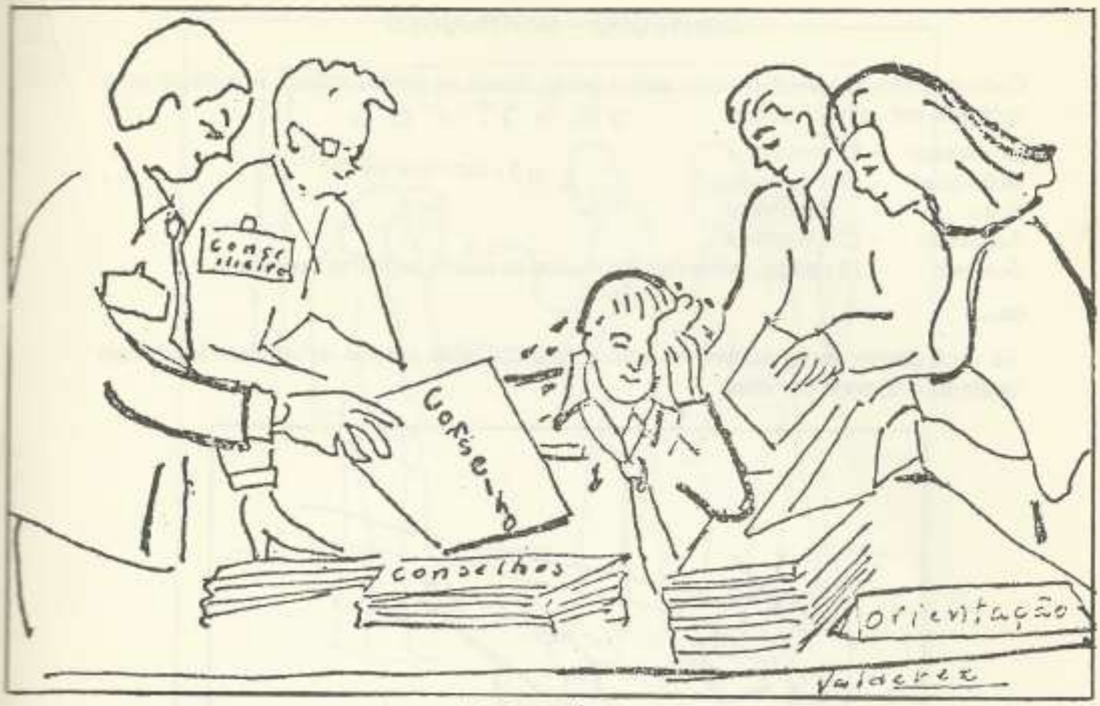
MAS...

Não desanime. Observe esta chance.

Se você somou pelo menos 5 pontos nos itens das questões 8 e 9, sorria, você promete.

E se você somou pelo menos 5 pontos nos itens da questão 5, então você é "aquele exemplo" que os seus colegas estão esperando.

Se você não obteve nada disto, entre na lista dos ACONSELHADOS, sua aula merece.



II CONTEÚDO

1. O conteúdo selecionado para esta disciplina é coerente com os objetivos da mesma. F V
2. Esta disciplina como **um todo** – conteúdo programático, abordagem teórico, prática, participação do aluno e do professor está em consonância com o curso em que está inserida. F V
3. A forma como esta disciplina está sendo oferecida permite sua integração ao currículo proposto. F V
4. O grau de dificuldade das unidades que compõem esta disciplina é adequado ao nível de graduação desta escola. F V
5. Há seqüência lógica nos conteúdos apresentados nesta disciplina. F V
6. Os pré-requisitos para esta disciplina foram cumpridos pelo menos em nível aceitável. F V
7. A quantidade de conteúdo e as atividades propostas nesta disciplina são adequadas ao tempo disponível. F V
8. A quantidade de unidades e os tópicos propostos não interferem na adequação quanto ao aprofundamento dos mesmos. F V
9. Tenho procurado manter-me alerta quanto à obsolescência de conteúdos. F V
10. Tenho oferecido oportunidades para que meus alunos trabalhem o conteúdo desta disciplina em sala. F V
11. Conheço as principais dificuldades encontradas por meus ex-alunos nesta disciplina. F V

CONTEÚDO – INSTRUÇÕES

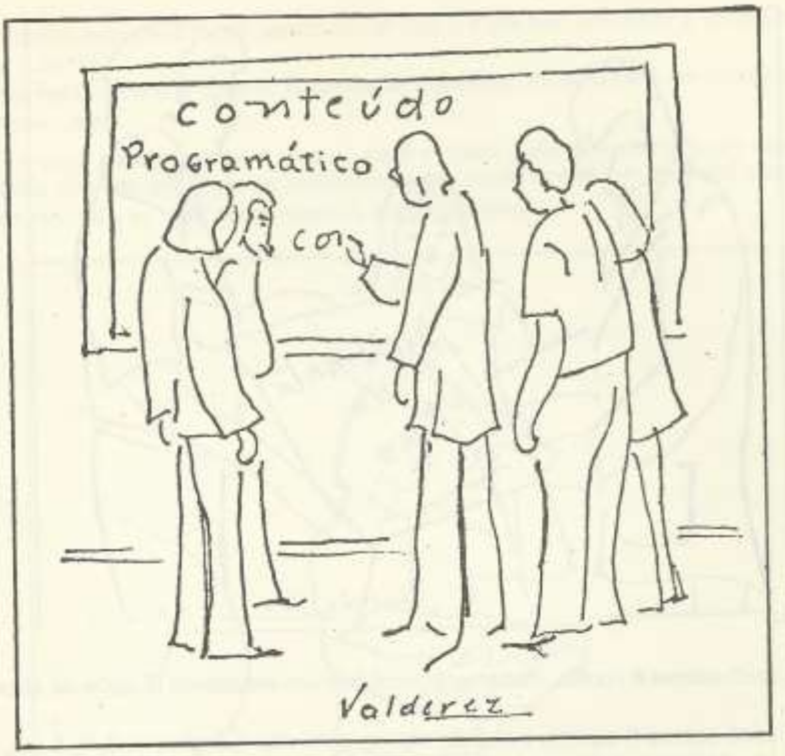
Cada questão que você marcou vale 1 ponto. Some os pontos obtidos e verifique se o conteúdo está em condições:

Excelentes	–	11 pontos
Muito boas	–	9 a 10 pontos
Boas	–	7 a 8 pontos
Aceitáveis	–	5 a 6 pontos
Sofríveis	–	5 pontos, incluindo pelo menos as quatro primeiras questões;

ou...

Se você obteve menor número de pontos, seu conteúdo precisa de um "salvador", com urgência e só pode ser você.

... Mas, dê uma olhadinha por aí, garanto que você vai encontrar alguns colegas que também já descobriram isto e, então, a comissão curricular de seus sonhos poderá vir a realizar-se: imagine-se cercado de professores motivados e sorridentes, oferecendo-se para ajudá-lo a fazer uma operação plástica no seu "conteúdo", tornando-o belo, flexível e coerente, sem dor.



III – INTERAÇÃO

1. Devido à escassez de tempo para conversar com meus alunos, tenho procurado aplicar instrumentos de levantamento de dados junto a eles.
2. Tenho procurado conversar informalmente com meus alunos nesta disciplina, com os objetivos de:
   - conhecê-los melhor
   - obter "feedback" sobre o meu desempenho
   - perceber diferenças individuais
   - inteirar-me sobre necessidades, dificuldades e aspirações quanto a esta disciplina.
3. Tenho sido aberto ao questionamento dos alunos em sala de aula.
4. Tenho estado disponível para atender a consultas acadêmicas de meus alunos.
5. Tenho estado disponível para conversar com meus Aconselhados.
6. Ofereço oportunidades para que o aluno exercite sua responsabilidade.

INTERAÇÃO – INSTRUÇÕES

Compute um ponto para cada questão, exceto a questão 2 cujos itens valerão um ponto cada.

Se você obteve 9 pontos, quando resolver mudar de atividade profissional pense no ITAMARATI. Será um sucesso.

Se você obteve 8 pontos, certamente você tem um verdadeiro fã clube de alunos à sua volta.

Se você obteve 6 pontos, incluindo alguns itens das questões 2, 3, 4, 5 e 6, sua seriedade diante da função de educar merece respeito.

Se você marcou alguns pontinhos, mais a questão 1, você está no bom caminho para conhecer melhor os seus alunos e dar-se uma chance para elevar seu moral.

Mas se você não fez nada disto, tem só um pontinho aqui, outro ali..., então...

IV – PLANEJAMENTO

1. Planejo minha disciplina tendo em mente o restante do curso quanto a:
   - integração com as demais disciplinas F V
   - tempo disponível do aluno para atender a solicitações e compromissos com esta disciplina e com as demais F V
   - grau de relevância desta disciplina para o curso como um todo, de acordo com a proposição do mesmo. F V

2. Planejo minha disciplina discutindo o planejamento preliminar:
   - com os meus colegas na mesma discipina F V
   - com os colegas que ministram discipinas afins em meu Departamento F V
   - nas reuniões de ensino dos departamentos, quando a disciplina é ministrada em outra divisão. F V

3. Ao planejar esta disciplina, tenho utilizado a memória de meu curso do semestre anterior, a fim de aperfeiçoar abordagens, estratégias, técnicas, etc. F V

4. Meu plano inclui um Roteiro de curso para distribuir aos meus alunos. F V

PLANEJAMENTO – INSTRUÇÕES

Compute um ponto para cada item das questões 1 e 2 e um ponto para cada uma das restantes.

Você é recordista dos 8 pontos ou só não o é por não aplicar-se a você o terceiro item da questão 2?

Se você marcou 6 pontos, incluindo as questões 3 e 4, você é um pioneiro. Acredite no seu futuro.

Se você fez menos de 3 pontos, você merece mais consideração de sua parte. Você teria que ser um gênio de criatividade para poder conseguir uma boa aula sem a fase anterior. Não se trate desta maneira, é masoquismo.

V – AVALIAÇÃO

1. O conteúdo das avaliações é coerente com o conteúdo oferecido nesta disciplina. F V

2. A abordagem do conteúdo nas avaliações é, em pelo menos 70%, muito familiar aos alunos. F V

3. O número de avaliações permite bom grau de confiabilidade quanto ao aproveitamento do aluno. F V

4. As questões das avaliações oferecem diversificações suficientes de abordagens pa-

ra atender, em grau aceitável, as diferenças individuais dos alunos. F V

5. O conhecimento adquirido pode ser medido nas avaliações propostas para esta disciplina. F V

6. A abordagem das avaliações, nesta disciplina, não irá surpreender os alunos. F V

7. O raciocínio do aluno diante do conteúdo desta disciplina pode ser checado nas avaliações da mesma. F V

8. Ao elaborar os instrumentos de avaliação desta disciplina, tenho sempre em mente objetivos e metas da mesma, bem como o balanceamento dos conteúdos oferecidos. F V

9. Discuto, freqüentemente, as avaliações com meus alunos. F V

10. Os instrumentos de avaliação desta disciplina vêm representando um desafio incentivador para os alunos. F V

A V A L I A Ç Ã O – INSTRUÇÕES

Você marcou os 10 pontos?... E além disto ainda leva a sério prazos para notas e boletins? Então você é a encarnação do **espírito** de Avaliação. Seria uma honra conhecê-lo.

Se você obteve 8 pontos, você pode candidatar-se a oferecer uma palestra sobre sua metodologia de trabalho docente, e a palestra será muito boa, acredite.

Se você obteve 6 pontos, e dentre eles as questões 1, 2, 3, 6 e 9, sem dúvida seus alunos o consideram um professor confiável.

Se você marcou "V" às questões 4, 7 e 10, você é um renovador. Aproveite seu idealismo e trabalho. Suas aspirações merecem sua atenção.

Se você percebeu, porém, que não seria muito honesto de sua parte marcar as questões 1, 3 e 5, **ainda bem que você é honesto.**

VI – O B J E T I V O S

1. Os Objetivos Gerais formulados para esta disciplina são claros e esclarecedores, pois já os discuti com meus colegas e/ou alunos. F V

2. Os Objetivos Específicos formulados para esta disciplina esclarecem aos alunos **o que é esperado deles** e o **que será oferecido a eles**, durante o semestre. F V

3. Junto aos objetivos, o Roteiro de Curso para os meus alunos contém uma Tentativa de Cronograma. F V

4. O conjunto de objetivos e conteúdo programático desta disciplina é coerente com a Ementa, pois já discuti este ponto no Departamento. F V

5. Os objetivos desta disciplina vão além do conteúdo, cobrindo o desenvolvimento de atitudes coerentes com a tradição de Disciplina Consciente desta Escola. F V

O B J E T I V O S – INSTRUÇÕES

Digamos que você tenha obtido os cinco pontos. Esteja certo de que todas as instituições de ensino apoiariam a multiplicação de professores da sua qualidade.

E se marcou as questões 1, 2 e 4, você é o professor que você próprio desejaria ter.

Se você marcou a 3, você, além de aspirar a organização de seu próprio trabalho, é colaborador com seu aluno e aprecia jogo limpo.

Se você não está muito afinado com estas questões, um diapasão poderá ajudá-lo.

É claro que o ensino precisa funcionar como uma orquestra. O difícil é que o maestro do grande grupo será a consciência de cada um.

A N E X O S

A abordagem dos instrumentos a seguir visa estimular:

a Avaliação do Desempenho do Professor e
da Disciplina pelo Aluno

Através da auto-análise e da autocrítica do
próprio Aluno e

do exercício da análise crítica do Aluno e do Professor, sobre as situações de Ensino/Aprendizagem em que ambos estiveram envolvidos.

ANÁLISE DE PROCEDIMENTOS E ATITUDES DO PROFESSOR – PELO ALUNO

MARQUE CADA ITEM ABAIXO PARA INDICAR:

P – algo que o Professor faz e que o ajuda
D – o que o Professor deveria fazer para ajudá-lo
N – algo que o Professor faz e que o atrapalha

Disciplina ....

Data ....

Se desejar, assine ....

Nº	QUESTÕES	CONCEITOS		
		P	D	N
01	Citar o assunto da aula e explicar do que se trata			
02	Dar exemplos			
03	Repetir as explicações com outras palavras			
04	Fazer perguntas em sala			
05	Ouvir e responder as perguntas dos alunos			
06	Aproveitar perguntas para esclarecer e ampliar assuntos			
07	Dar exercícios (práticos ou teóricos) em sala			
08	Dar exercícios para casa e corrigí-los			
09	Anotar pontos-chave no quadro-negro			
10	Oferecer textos básicos e esquemas			
11	Indicar bibliografias			
12	Pedir pesquisa sobre o assunto			
13	Fazer uma síntese ao final da aula			
14	Comentar problemas de provas de forma impessoal e ética			
15	Escrever comentários nas provas			
16	Revisar os conteúdos antes das provas			
17	Orientar sobre forma e conteúdo de trabalhos escritos			
18	Organizar discussões sobre tópicos diversos			
19	Procurar manter ambiente descontraído			
20	Ouvir as opiniões contrárias, incentivando fundamentação para as mesmas			
	TOTAL DE RESPOSTAS			

CEDH-ITA 1988

NA SUA OPINIÃO:

1. O que o Professor desta Disciplina poderia fazer para:
   a) aperfeiçoar o Curso

   b) melhorar o desempenho do Aluno

   c) melhorar o desempnho próprio

2. O que você, aluno, poderia fazer para:
   a) melhorar o seu próprio desempenho

   b) colaborar com o desempenho de seus colegas

   c) contribuir para o bom desempenho do Professor

SUGESTÕES PARA DEPOIMENTO DO ALUNO

1. Liste outros aspectos de Avaliação que você, Aluno, gostaria de comentar.

2. Escolha até três aspectos e ofereça ao seu Professor depoimentos honestos, baseados em suas dificuldades reais, visando contribuir para o aperfeiçoamento da Disciplina.

AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DO PROFESSOR PELO ALUNO
AUTO-ANÁLISE E AUTOCRÍTICA DO ALUNO

1. Os objetivos da disciplina foram claros para você?

   Sim ——— Não ———

   Por que?

2. A abordagem dada ao conteúdo desta Disciplina atendeu às suas expectativas iniciais?

   Sim ——— Não ———

   Por que?

3. Você poderia citar de um a três exemplos de tópicos (ou unidades) que tenha achado:

a) muito complexos:
   i.
   ii.
   iii.

b) monótonos:
   i.
   ii.
   iii.

c) estimulantes:

i.

ii.

iii.

d) muito úteis:

i.

ii.

iii.

4. Na sua opinião, a abordagem às aulas desta Disciplina tem estimulado o desenvolvimento de: (marque quantas desejar)

a. criatividade	______	e. disciplina consciente*	______
b. autodisciplina	______	f. organização	______
c. precisão	______	g. iniciativa	______
d. espírito de grupo	______	h. outras:	

Positivas

Negativas

5. Na sua opinião, o que o professor poderia ter feito para melhorar o desempenho dos alunos?

6. O que você poderia ter feito para melhorar o seu próprio desempenho?

7. A atmosfera das aulas desta Disciplina foi: (marque quantas desejar)

a. tranqüila	______	f. participativa	______
b. tumultuada	______	g. rígida	______
c. descontraída	______	h. produtiva	______
d. tensa	______	i. monótona	______
e. amistosa	______	j. estimulante	______

8. Em sua opinião, quais foram os aspectos mais positivos e mais negativos do sistema de avaliação adotado nesta Disciplina?

9. Que assuntos poderiam ter sido tratados, mas não o foram?
E quais os que poderiam ter sido melhor tratados?

10. Comente o que desejar sobre a parte teórica da Disciplina e as atividades de Laboratório.

Obrigado pela colaboração   Assine se desejar

RESENHA BIBLIOGRÁFICA

João Bosco Pitombeira de Carvalho
Infinite Processes, Background to Analysis
A. Gardiner, Springer NY/82

Onde encontrar o exemplo de Schwartz (veja Courant, R. Differential and Integral Calculus, vol II, PP. 341-342, Interscience, 1970) de que, se tentarmos calcular a área de uma superfície generalizando a idéia que funcionou bem para curvas – a de aproximação por uma poligonal – não chegaremos ao resultado esperado? E que o jogo de Euclides, do qual o algoritmo de Euclides é um caso particular, permite demonstrar que certos pares de segmentos (por ex., o lado e a diagonal do quadrado) não são comensuráveis? Onde encontrar uma exposição sucinta e acessível dos problemas envolvidos com a definição do conceito de função ou uma discussão clara, interessante, e sem pressa de frações com representação decimal infinita? Uma introdução simples às frações contínuas, relacionando-as com o último tópico que mencionamos? Além disso, tudo exigindo a participação efetiva do leitor, por meio de exercícios com sugestões detalhadas, de estudo obrigatório para a plena compreensão do texto e muito bem escolhido? Quem já se deteve para pensar por quê $(-1)^{1/3}$ é diferente de $(-1)^{2/6}$, o que mostra que a regra geralmente aceita para trabalhar com expoentes fracionários tem que ser mais bem compreendida? Tudo isso se encontra no livro agora resenhado!

A listagem de todos os problemas acima, aparentemente desconexos, pode fazer supor que o livro é uma colcha de retalhos, um amontoado de resultados avulsos, sem nenhum fio condutor. Nada disso: por trás de tudo que o autor faz, está a intenção de familiarizar o estudante, no início de seus estudos universitários, preferivelmente antes de fazer um curso de cálculo ou ao mesmo tempo em que o segue, com os conceitos básicos da Análise, ou seja, com os processos de limite.

Citemos o autor:

"Como o título sugere, este livro foi concebido como um prólogo ao estudo de Por que o Cálculo funciona... é de fato um re-exame crítico dos processos infinitos que surgem na Matemática Elementar: a parte II re-examina os números racionais e irracionais, a parte III examina nossas idéias de comprimento, área e volume, e a parte IV examina a evolução do conceito moderno de função."

Eis o índice do livro:

Métodos construtivos e não construtivos em Matemática.
Comensurabilidade, Máximo Divisor Comum e o Jogo de Euclides.
Lados e Diagonais de Polígonos Regulares
Números e Aritmética, uma revisão rápida
Decimais infinitas (primeira parte)
Decimais infinitas (segunda parte)
Noves repetidos
Frações e decimais periódicas
A propriedade fundamental dos números reais
A aritmética das decimais infinitas
Reflexões sobre temas recorrentes
Frações Contínuas

Parte III – Geometria

Números e Geometria
O Papel da Intuição Geométrica
Comparando Áreas
Comparando Volumes
Curvas e Superfícies

Parte IV – Funções

O que é um Número?
O que é uma Função?
O que é uma Função Exponencial?

Na Parte I, segundo o próprio autor, é exposto como em torno de 1800 os matemáticos começaram a perceber que a falta de precisão em sua compreensão e sua manipulação dos processos infinitos envolvidos no Cálculo (infinitesimal) intuitivo era uma fonte de erros e de confusão, que portanto o Cálculo intuitivo necessitava ser reformulado de maneira clara e precisa, que a necessidade de revisar nossa compreensão de uma parte da Matemática, como o Cálculo intuitivo, não nos deveria realmente surpreender; mas que a maneira puramente aritmética em que de fato o Cálculo intuitivo foi reformulado (em torno de 1870), é um pouco surpreendente. O autor apresenta problemas que levaram os matemáticos a se interrogarem sobre o que realmente estavam fazendo, como por exemplo as soluções da equação da corda vibrante, obtidas por D'Alembert e por Bernouilli, e as manipulações puramente simbólicas com séries de potências infinitas. Encontramos aí, como exercício, dado com um roteiro detalhado que o torna factível, a maneira como Euler calculou o valor da série $\sum(1/n^2)$. Vemos aí um dos pontos que considero altamente favoráveis no livro: o autor se recusa a dar as coisas de graça ao leitor, é necessário trabalhar, embora com uma orientação honesta e detalhada.

Em seguida, Gardiner apresenta as noções sobre números inteiros que serão usadas subseqüentemente. Introduz o Teorema de Pitágoras e a noção de máximo divisor comum, e ensina como calculá-lo, usando o jogo de Euclides, que é uma generalização do algoritmo de Euclides. A existência de máximo divisor comum é imediatamente relacionada com a comensurabilidade de dois segmentos de comprimentos inteiros, o que é um exemplo de versão grega do algoritmo de Euclides, o processo de "antanaireses" (veja V. der Waerden, Geometry and Algebra in Ancient Civilizations; Springer, N. York, 1983, pp 138-139 e, do mesmo autor, Science Awakening., Oxford University Press, N. York, 1971, pp. 126-127). Aplica após isso este processo para demonstrar que existem segmentos incomensuráveis (sem usar o teorema de Pitágoras) e mostra, da mesma maneira, que o lado e a diagonal do pentágono regular são incomensuráveis. Compare com as obras citadas de Van der Waerden para um tratamento claro e mais rico do assunto.

Após isso, é feita uma rápida revisão dos sistemas numéricos, explicando o funcionamento de nosso sistema decimal. Ataca então o autor o problema da existência de números cuja representação decimal é infinita. Já tinhamos tido contacto com um processo informal, geométrico, de limite, ao demonstrar que certos segmentos são incomensuráveis. Agora, passamos a estudar mais detalhadamente os processos infinitos, em um contexto aritmético, ao atacar a pergunta: "O que é um número decimal com uma quantidade infinita de algarismos? Um exercício com a série harmônica alternada faz o leitor trabalhar com sucessões crescentes (e decrescentes) limitadas superiormente (inferiormente).

Como exemplo de outro exercício, temos o Exercício 4, (página 93).

Os exercícios 1 (i) e 2 sugerem que o seguinte é verdade: para qualquer valor positivo $x < 1$, as potências x^n, rapidamente se aproximam de zero quando n cresce. Além disso, estas potências x^n diminuem de tal maneira que eventualmente se tornam menores do que 1/N, onde N é qualquer número inteiro positivo escolhido arbitrariamente. O leitor deverá demonstrar agora que isso é verdade. (São dadas em seguida sugestões de como proceder.

É estudado o que quer dizer um número como 0,9999..., e atacado o estudo das frações décimais periódicas, que são cuidadosamente analisadas, resolvendo-se problemas como o seguinte:

Qual a relação exata entre

a fração inicial m/n e:

o comprimento do bloco que se repete em sua representação, e

os algarismo que ocorrem no bloco que se repete?

O que determina o comprimento do bloco que se repete?

O tratamento apresentado não é o mais sucinto ou elegante (compare com o tratamento muito elegante de E. L. Lima no número 10, pp. 23 e seguintes da Revista do Professor de Matemática), mas chama constantemente a atenção para o fato de que estamos lidando com processos infinitos, quando trabalhamos com números decimais infinitos.

O leitor está agora pronto a atacar o capítulo sobre a propriedade fundamental dos números reais, enunciando como segue:

"A qualquer seqüência infinita de números reais que crescem mas que são todos iguais a ou menores do que um certo número real K, sempre corresponde um número real $a \leqslant K$, para o qual a sequência infinita parece estar se dirigindo."

Os termos usados na frase acima recebem então seus significados precisos. Um dos exercícios de aplicação deste princípio é calcular o limite, quando n cresce indefinidamente, de $(1+1/n)^n$.

Há em seguida uma introdução ao estudo das frações contínuas não só com motivação aritmética mas também geométrica, relacionando-as com o que foi feito para demonstrar a não comensurabilidade de lados e diagonais de certos polígonos.

Passamos agora à segunda parte, que estuda Geometria. Em primeiro lugar, o autor se detém sobre a relação entre os números e a Geometria, citando a posição dos pitagóricos e dos matemáticos gregos sobre isso. Em seguida, fala um pouco sobre a importância da intuição geométrica, e os cuidados que se deve ter com ela. Passa então a estudar como comparar áreas, num capítulo muito bem estruturado e importante. Parte dos conceitos intuitivos de área, e mostra pouco a pouco como eles necessitam de ser sofisticados, concluindo, por fim, após discutir os vários problemas envolvidos no conceito de área, quando tentamos definir a área de regiões limitadas por curvas, e os problemas em tentar definir a integral de uma função como sendo a área sob o seu gráfico. Como ele diz, nosso objetivo era simplesmente sugerir algumas das razões para excluir deliberadamente as noções geométricas na reconstrução do Cálculo – uma característica notável da versão do Cálculo adotada em torno de 1870. Faz também ver que a noção de subconjunto do plano é muito mais geral do que se pensa, examinando detalhadamente, no exercício 7, alguns subconjuntos e perguntando quais seriam suas áreas. Neste capítulo é também atacado o problema do que é a tangente a uma curva, em um longo exercício, com várias partes e sugestões, e que também estuda a noção de continuidade de uma função.

Já que o autor se permite desvios de seu objetivo (lidar com processos infinitos) para citar resultados como o terceiro problema de Hilbert, é pena que não tenha sugerido, nos exercícios, como atacar o Teorema de Pick, que permite calcular a área de um polígono com vértices no reticulado do plano. A primeira figura do capítulo dá esperanças de que isso aconteça, mas frustradas!

No capítulo subseqüente, Gardiner ataca o problema de como definir o volume de um sólido, partindo de casos bem simples, e chegando à conclusão de que aí também somos obrigados a introduzir processos infinitos. Compara várias tentativas de definir volumes, citando os resultados de Arquimedes, Cavalieri, etc., e refere-se à teoria de integração de Lebesgue. Isso parece prematuro, mas é, em verdade, bem natural em sua discussão, e não deveria amedrontar o leitor.

O capítulo seguinte estuda as analogias, relações e diferenças entre os conceitos de curva e de superfície; apresentando como exercício o resultado de que se aproximarmos a área de um cilindro por uma superfície formada por poliedros convenientes, teremos resultados diferentes conforme a escolha das faces do poliedros.

A última parte traça o desenvolvimento gradual do conceito de função desde suas origens em problemas puramente geométricos e físicos do início do século dezessete até a emergência eventual do conceito moderno de função no século dezenove. Distingüimos a idéia geométrica e a idéia algébrica de uma função, e examinaremos suas respectivas fraquezas e qualidades e veremos como a interação frutífera entre elas resolve os problemas de seus defeitos individuais, dando origem ao conceito moderno de função. Terminaremos com uma discussão detalhada de uma classe particular de funções – as funções exponenciais.

O autor mostra como o conceito de função evoluiu lentamente, e como os problemas geométricos sobre curvas (calcular tangentes e áreas limitadas pelas curvas) evoluiram, graças à Geometria Analítica, transformando-se em relações algébricas entre as coordenadas variáveis x e y. Mostra também o relacionamento entre as idéias de uma curva geométrica ou gráfico e a idéia de uma relação algébrica, fórmula, ou expressão ligando duas ou mais variáveis. Discute o momento decisivo quando as dificuldades encontradas no estudo das séries de Fourier forçaram os matemáticos a uma análise mais cuidadosa do conceito de função e apresenta exemplos não intuitivos de funções de que é impossível traçar o gráfico, ou que não têm derivada em nenhum ponto.

O último capítulo trata das funções exponenciais, e parte da definição comumente dada para a exponencial com expoente fracionário, mostrando o que pode acontecer, que restrições temos é necessidade de impor à base, até chegar ao conceito geral da função exponencial x^y. O estudo é bem pausado, mostrando como variam os gráficos das funções quando mudamos os expoentes, mesmo mantendo-os racionais. No entanto, parece-nos ser um dos capítulos menos satisfatórios do livro, talvez por pretender ser muito ambicioso, tentando fazer o leitor compreender até a existência de logaritmos de números negativos. Segundo o autor, uma carta de um professor comentando as dificuldades do conceito de exponencial foi a motivação inicial para o livro. No entanto, este capítulo dá a impressão nítida de último capítulo, escrito já sem paciência, quando a única motivação do autor é ver-se livre da tarefa de escrever.

Por que usar este livro?

Freqüentemente, no primeiro curso de Cálculo, deparamo-nos com alunos que nunca tiveram o menor contacto com o conceito de limite, com qualquer processo infinito (a única exceção é a 'regra' bem conhecida, não compreendida, de como achar a soma dos termos de uma progressão geométrica (infinita com razão menor do que 1). É totalmente inútil apresentar a estes alunos os conceitos sutis do Cálculo, pois eles não têm nenhuma vivência que lhes permita assimilá-los. O Cálculo se torna para eles mais um conjunto de regras a memorizar, como já fizeram tantas vezes na Escola Secundária.

A motivação de Gardiner não é estudar os processos infinitos por eles mesmos, mas sim usá-los para ilustrar a sutileza e a significância do salto dos processos finitos para os infinitos e a maneira como processos infinitos podem ser tratados matematicamente de maneira segura.

Boas, em sua resenha deste livro (American Mathematical Montlhy 90-2, 1983), discorda da apresentação histórica dos conceitos, dizendo que normalmente percebemos a significância de conceitos matemáticos relacionando-os com outros, e não mostrando sua evolução histórica.

No entanto, estas duas maneiras de encarar os conceitos matemáticos não são contraditórias. Ao contrário, são complementares e se enriquecem mutuamente. A percepção da evolução histórica de uma parte da Matemática não é obstáculo à sua compreensão e utilização. Ao contrário, o aluno que está tendo dificuldades para compreender certos conceitos usados no Cálculo talvez se sinta menos preocupado ao saber que eles são fruto de muitos anos de trabalho, que evoluiram lentamente até chegar à sua forma atual, e que quase certamente não serão a última palavra sobre o assunto. Um belo exemplo de como fazer isso, colocando os conceitos do Cálculo dentro de sua evolução histórica, é o livro de Otto Toeplitz, The Calculus, A Genetic Approach, The University of Chicago Press, 1963. Como dito no prefácio de Kothe, Toeplitz tenta apresentar as grandes descobertas com sua dramaticidade, preservar as origens dos problemas, conceitos e fatos. Mas não deseja que seu método seja chamado 'histórico'. O historiador... tem que registrar tudo o que aconteceu, bom ou ruim. Eu, ao contrário, desejo selecionar e utilizar da história da Matemática, somente as origens das idéias que demonstraram ser boas. Nada está mais afastado de meu desejo do que dar uma história do Cálculo Infinitesimal. Eu próprio, quando aluno, fugi correndo de um tal curso. Não estou interessado na História por ele mesmo, mas na gênese, em seus pontos notáveis, de problemas, fatos de demonstrações".

Concordo integralmente com a opinião de Toeplitz, embora achando que um curso de História do Cálculo pode ser interessante (veja, por Exemplo, os livros de C. H. Edwards Jr., The Historical Development of the Calculus, Springer, N. York, 1979; e de M. Baron, Origins of the Infinitesimal Calculus, Oxford: Pergamon Press, 1969). O que Gardiner faz neste livro é Matemática genuína. Não se trata de um destes livros que se apregoam para "liberal arts students", e dão algumas pinceladas de Matemática de mistura com história (veja, por exemplo, Morris Kline, Mathematics in Western Culture, aliás um excelente livro, embora exagerado, como todos os livros de divulgação de Kline), mas se trata de um livro de Matemática. Ela será ou utilizada pelo estudante em seus estudos de Cálculo e de Análise, ou lhe dará experiência em trabalhar com conceitos sutis e delicados, aumentando consideravelmente sua maturidade matemática.

Uma comparação com o livro de Teoplitz citado acima mostra também alguns dos problemas do livro de Gardiner. Toeplitz pode facilmente ser usado como esqueleto para um curso, pois é de fato um curso de Cálculo. Já o livro de Gardiner dificilmente serviria para isso. Por um lado, a abertura do livro só faz sentido para quem já tiver sentido um pouco as dificuldades do Cálculo. Omití-la tiraria a motivação para a parte mais elementar, sem Cálculo, que vem depois. Além disso, pelo menos parte do tratamento de certos problemas mais sérios levantados posteriormente (comprimento de curvas, áreas de regiões do plano, etc.) também só farão sentido, para quem já estudou Cálculo. Em particular, o último capítulo, sobre funções exponenciais, fica muito prejudicado para quem não conhece a possibilidade das definições "eficientes" que se baseiam na definição da função logaritmo pela integral.

Assim, embora o livro seja muito interessante, de muito bom gosto, e exigindo trabalho produtivo por parte do leitor, não se presta para texto de um curso de Cálculo. Como usá-lo, então?

O livro é excelente como leitura paralela em um curso de Cálculo. Ao longo do curso, poderão ser selecionados capítulos, parágrafos ou problemas que ilustrem bem os problemas nas noções que estiveram sendo tratadas nas aulas segundo o livro texto. Desta maneira, julgo que o livro de Gardiner é muito bom, e pode contribuir muito para melhorar a compreensão dos conceitos do Cálculo e da Análise.

Em particular, julgo tratar-se de um livro particularmente recomendado para uso em um curso de licenciatura em Matemática, onde os alunos não se aprofundarão em Análise, mas deveriam receber uma boa introdução ao Cálculo, uma das ferramentas mais poderosas do arsenal da Matemática.

Principalmente porque Gardiner usa conceitos e noções elementares, de Matemática de primeiro e segundo grau, para motivar a introdução dos conceitos de limite que encontramos no Cálculo e na Análise e para preparar o aluno, tanto conceitual como tecnicamente, para lidar com eles. A maior parte dos licenciandos, em suas atividades como professores, após terminar seus estudos universitários, demonstra total incapacidade de relacionar a Matemática elementar, que usarão em suas aulas, com a mais avançada a que foram expostos na Universidade. Esta última fica em um compartimento estanque, e nada contribui para melhorar sua atuação como professores. Este livro muito poderia contribuir para derrubar esta separação, e mesmo para fazer com que o futuro professor perceba a sutileza e as dificuldades inerentes a certos conceitos que usará constantemente comprimento de arco, áreas de regiões do plano, o conceito de número real, etc.

De qualquer maneira, mesmo que o professor decida não usar este livro em seu curso, como leitura para os alunos, certamente suas aulas muito lucrarão se ele ler o livro. Isso só poderá melhorar suas aulas, enriquecendo-as com exemplos, motivações e uma visão mais ampla do Cálculo, de seus conceitos e de sua evolução.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE NÚMEROS CRUZADOS DO BOLETIM 22

Anna Averbuch
Franca Cohen Gottlieb

[1] 2	[2] 5	2		[3] 1	[4] 2
[5] 7	4		[6] 2	1	1
5		[7] 1	3	0	
	[8] 1	1	1		[9] 5
[10] 6	2	5		[11] 3	2
[12] 2	4		[13] 8	7	5

Horizontais

1) $42 \xrightarrow{.1} 42 \xrightarrow{.2} 84 \xrightarrow{.3} \boxed{252} \xrightarrow{.4} 1008$

3) 10 - 8 - 5; 101 - 22 - 12

$$\left\{\begin{array}{l}(10)_{10} = (101)_3 \\ (5)_{10} = (12)_3\end{array}\right. \qquad (8)_{10} = (22)_3$$

5) $32 \xrightarrow{+21} 53 \xrightarrow{+21} \boxed{74} \xrightarrow{+21} 95 \xrightarrow{+21} 116$

6) 15 - 7 -3; $\boxed{211}$ - 105 - 52

$$\begin{cases} 15 = 7.2 + 1 & 211 = 105.2 + 1 \\ 7 = 3.2 + 1 & 105 = 52.2 + 1 \end{cases}$$

7) 118 - $\boxed{130}$ - 242 - 454 - 766 - 1178

+ 12   + 112   + 212   + 312   + 412

8) 35 - $\boxed{111}$ - 339 - 1023 - 3075 $\{ a_n = 3\,(a_{n-1} + 2)$

10) 3125 - $\boxed{625}$ - 125 - 25 - 5

:5   :5   :5   :5

11) 30 - $\boxed{32}$ - 34 - 36 - 38

+ 2   + 2   + 2

12) 16 - $\boxed{24}$ - 36 - 54 - 81 $\left\{ an = \dfrac{3a_{n-1}}{2} \right.$

13) 7 - 35 - 175 - $\boxed{875}$ - 4375

.5   .5   .5

Verticais

1) 135 - 155 - 195 - $\boxed{275}$ - 425

+ 20   + 40   + 80   + 160

2) 45 - $\boxed{54}$; 37 - 73; 15 - 51

$$\begin{cases} a_n = 10\,x + y \\ a_{n+1} = 10\,y + x \end{cases}$$

3) 11 - 6 - 3; 1011 - $\boxed{110}$ - 11 $\begin{cases} (11)_{10} = (1011)_2 & (6)_{10} = (110)_2 \\ (3)_{10} = (11)_2 \end{cases}$

4) 29 - 10; 62 - $\boxed{21}$; 101-34 $10 = \dfrac{29 + 1}{3}$

$$34 = \frac{101 + 1}{3}$$

6) 123 - 132 - 213 - $\boxed{231}$ - 312 - 321

{ Cada número é formado por uma das permutações dos algarismos 1, 2, 3

7) 145 - 135 - $\boxed{115}$ - 85 - 45

- 10   - 20   - 30   - 40

8) 62 - $\boxed{124}$ - 496 - 2976 - 23.808

.2 .4 .6 .8

9) 550 - $\boxed{525}$ - 475 - 400 - 300

\- 25 - 50 - 75 - 100

10) 63 - 65 - 62 - $\boxed{64}$ - 61 - 63

\+ 2 - 3 + 2 -3 + 2

11) 23 - 29 - 31 - $\boxed{37}$ - 41 { números primos