BOLETIM GEPEM

27

HOMENAGEM À MEMÓRIA DO
PROFESSOR JOSÉ CARLOS DE MELLO E SOUZA

ÍNDICE

"ORAÇÃO DE UM NETO"

Um Fio de Ouro percorre a história da humanidade ininterruptamente: é a obra dos melhores homens nas sucessivas idades.

De extremo a extremo continua a percorrê-la e, quando passa por perto de nós, percebêmo-lo como a luz clara e esplendente, irresistivelmente penetrante, que projeta a verdade, quando concebida pelos grandes espíritos.

A Terra, mãe da natureza e das flores, recebe teu corpo, mas tua alma não será cinza, será luz; teu coração não será pó, será árvore que agasalha.

Tu, que viveste repartindo a bondade, infinitamente repartindo, viverás nas flores, nos ventos e nas saudades.

Não morre quem nos outros vive, não morre quem nos vivos vive.

Senhor, vós que tanto já nos destes, dai-nos uma coisa mais: um coração agradecido.

Obrigado, Senhor pela benção de ter convivido com tamanho exemplo de caráter, dignidade, simplicidade, coração, juventude e fé.

Luiz Paulo, neto do Prof. Mello e Souza

APRESENTAÇÃO

Este número do BOLETIM tem uma especial e grata missão: homenagear a memória do Professor José Carlos de Mello e Souza.

Nestes artigos se congregam alguns dos professores que tiveram o privilégio de conviver com o Professor Mello e Souza. Escreveram em sua homenagem, num testemunho de que continua viva a chama de seu convívio e seu exemplo. Quanto maior foi esse convívio, maior foi a admiração e o afeto que despertou.

Professor Mello e Souza sabia imprimir em sua atuação o interesse pelo ser humano, a seriedade e a dignidade do trato, a segurança que só a competência permite, alicerçado numa fé religiosa sempre revelada na sua serenidade contagiante.

Foi grande a sua contribuição na área educacional, nas múltiplas atividades das quais se encarregou.

O GEPEM deve muito de suas características, como espírito de coesão, tenacidade e dedicação ao trabalho do grupo que o compõe, ao exemplo dignificante e estimulador do PROFESSOR JOSÉ CARLOS DE MELLO E SOUZA. Seu idealismo, seriedade e altruismo incontestes estimularam professores que, também idealistas, desejavam batalhar por uma causa que transformaram no seu "leit-motive", a do aperfeiçoamento da Educação no Brasil, especialmente no tocante ao ensino da Matemática.

*"Não cessarão os frutos desta vida que continua em Deus."**

GEPEM
A Diretoria e o
Conselho Editorial

* Frase da Reverenda Madre Maria de Fátima Ramon Ramos, na Celebração Eucarística, em intenção do Professor Mello e Souza, em 23/11/90.

O ENSINO DE MATEMÁTICA NOS CICLOS BÁSICOS DAS UNIVERSIDADES:
Identificação dos Problemas e Tentativas de Soluções

Maria Laura Mouzinho Leite Lopes
UFRJ
Pós-Graduação USU — GEPEM

Uma das características marcantes da personalidade de José Carlos de Mello e Souza foi a sua preocupação com o ensino da Matemática em todos os níveis e seus esforços derradeiros voltaram-se para o ciclo básico das nossas Universidades.

Com a reforma de 1968, o ensino dessa disciplina, em quase todos os ciclos básicos dos cursos universitários, passou a ser responsabilidade dos professores do Departamento de Matemática.

A diversidade de qualificações dos alunos que deviam ser atendidas e o impacto do grande número deles que necessitavam de um embasamento matemático mais aprofundado tornaram ainda maiores os problemas que os professores do Departamento tinham que enfrentar.

O Professor Mello e Souza, como Chefe do Departamento durante longos anos e mais recentemente como Chefe de Gabinete do Reitor da Universidade Santa Úrsula, procurava, não apenas, identificar os problemas mas encontrar soluções.

Foi muito nesta direção que desenvolveu esforços para a criação do Curso de Mestrado em Educação Matemática, por saber que só a pesquisa nessa área poderia abrir horizontes e trazer para as salas de aula sugestões para a melhoria do desempenho de professores e alunos universitários nas disciplinas matemáticas.

Muito se tem discutido acerca do aumento da população estudantil e o conseqüente despreparo dos alunos que ingressam nas nossas universidades.

E, como corolário desse aumento de população, houve, também a ascensão de um grande número de professores aos postos universitários sem o devido tempo para uma grande preparação mais apurada.

O fracasso e a evasão dos alunos são, a mais das vezes, justificados pelas deficiências do ensino do 2º grau.

Há a ilusão de que o fluxo desses problemas pode ser interrompido no 2º grau; no entanto, fica esquecido que o maior desafio está no 1º grau e, mais precisamente, no 1º segmento do 1º grau. Contudo, enquanto não se resolve o problema na sua origem, pode-se tentar uma solução parcial, ao menos, para aqueles que têm a chance de entrar na Universidade.

Acredito que ao procurar soluções próprias e criativas para nossos problemas não se deve desconhecer o que existe em outros países. Foi com esse interesse que tive a oportunidade de analisar o Relatório da subcomissão matemática dos primeiros ciclos do Ensino Superior que integra o trabalho da Comissão de avaliação do Ensino Superior da França, presidida pelo Professor Laurent Schwartz.

O Relatório começa com o seguinte posicionamento:

"A Comissão procurou definir as dificuldades e as possibilidades que oferece o ensino da Matemática durante os dois primeiros anos do ensino superior longo,* considerando, por um lado, a evolução de técnicas e das perspectivas e, por outro lado, *a evolução do público estudantil* e as tradições do ensino". (o grifo é meu)

Mesmo num país com uma grande tradição educacional, como a França, há necessidade de atentar para a *evolução* do *público estudantil*.

De fato, está assinalado no Relatório que dado o aumento da população universitária muitos estudantes nem sempre são oriundos de meio culturalmente favorecido e que, portanto, são merecedores de uma acolhida especial para possibilitar sua ascensão ao nível desejado. Como conseqüência, é fundamental a escolha de *conteúdos* e dos *métodos* para livrar uma grande maioria do fracasso.

Tem-se a impressão de que os membros da Comissão estão falando de

*Na França o ensino superior longo corresponde ao nosso ciclo básico mais o profissional.

alunos brasileiros, quando afirmam que esses estudantes não são capazes de verbalizar ou de expor e defender de modo fundamentado o que aprenderam, viram ou intuiram. Ou ainda, trabalham pouco nas bibliotecas, não sabem procurar obras complementares para enriquecer suas notas de aulas, sem muitas vezes compreender o que escreveram mas que servirão para reproduzir nas provas questões baseadas nessas notas, o que leva ao não aprofundamento da matéria, pois, não fazem correlações entre os diferentes conceitos de uma disciplina e, muito menos, entre disciplinas. Tudo é estanque.

Para completar este quadro pessimista, falta-lhes a vontade de refletir sobre um problema desafiador e para exercitar-se em cálculo quando reconhecem a sua precariedade nessa habilidade.

A atual situação dos estudantes que ingressam nas nossas universidades, está adequadamente descrita pelas observações acima, emitidas naquele relatório.

Considero que não haveria interesse em reproduzir tal diagnóstico se os membros da Comissão Francesa face a tais problemas não apresentassem sugestões para a escolha de *conteúdos* e dos *métodos* declarados fundamentais para minorar o fracasso dos estudantes que demonstram tais deficiências.

Duas possibilidades são mencionadas:

i) ou bem se decide modificar só ligeiramente a organização dos estudos superiores e, deste modo, se dirigir a um *estudante fictício;*

ii) ou bem se decide atuar em função do *estudante real.*

As análises feitas acerca dessas possibilidades são bastantes esclarecedoras.

No caso i) "A experiência mostra então que, se for mantido o nível de exigência, chega-se a taxas de fracasso socialmente inaceitáveis. Se, por outro lado, quer-se manter uma taxa de sucesso aceitável, chega-se a ter de controlar os estudantes com provas técnicas que não correspondem ao grau de compreensão dos conceitos necessários para continuar em boas condições um segundo ciclo científico longo".

Há ainda um forte paralelo com a situação brasileira. Os ciclos básicos, quanto ao ensino de Matemática, não estão, em geral, preparando estudantes para prosseguirem em boas condições os estudos dos cursos profissionais, quando esses estudantes conseguem vencer as barreiras que lhe são impostas, tendo em vista a alta taxa de fracasso, mesmo com provas técnicas.

Não haverá, nesta hipótese, no caso das universidades brasileiras, a forte tendência de considerar o *aluno fictício* ainda que esforços tenham sido desenvolvidos para modificar a organização dos estudos universitários?

É necessário que uma avaliação criteriosa dos nossos ciclos básicos seja realizada e que não se restrinja a frios dados estatísticos para evidenciar que as mudanças devem ser mais profundas.

Na alternativa ii) "É então necessário modificar em profundidade a *orientação*, a *organização* e o *conteúdo* do ensino, de modo que a maioria dos estudantes, tendo escolhido o estudo que lhes convenha, possam manter o mínimo de autonomia, consigam dar um nível suficiente de sentido ao essencial do que aprenderam e sejam ativos na sua própria construção do saber".

Para tornar ativos os estudantes é preciso que saiam da rotina de aulas expositivas ou de exercícios tradicionais repetitivos, sendo-lhes dado oportunidade de expor suas dificuldades, participar de projetos, de debates científicos etc . . .

A própria Comissão reconhece que há dificuldades para alcançar estes objetivos e sou do mesmo aviso.

Afirma, porém, que a experiência de renovação dos ciclos básicos manteve um nível de estudos que permitiu o sucesso de um grande número de estudantes para concluir que é realizável.

Setencia, ainda, que a dificuldade reside em encontrar uma elite de professores com energia e entusiasmo, capazes de conseguir diminuir suas ambições de quantidade de conteúdos para conservar uma exigência de qualidade e aperfeiçoamento sobre os temas fundamentais.

Aqui está de maneira explícita e circunstanciada a máxima que costumo repetir:

É preciso saber muito para ensinar pouco, mas muito bem.

PAPEL DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO

Professora Moema Sá Carvalho
USU – GEPEM

Professor José Carlos de Mello e Souza, como Chefe do Departamento de Matemática da Universidade Santa Úrsula, além de Vice-Presidente e posteriormente Presidente do GEPEM, foi parte ativa e decisiva na criação dos Cursos de Pós-Graduação em Educação Matemática, resultantes de convênios entre essas duas instituições.

Sua visão e seu interesse pelo bom ensino da Matemática estão aí presentes, e sua memória nos conduz, no momento, à primeira aula sobre metodologia do ensino da Matemática, na Pós-graduação "lato-sensu" em 1982.

Que papel pode desempenhar a Matemática na Educação?

O que dizer sobre a Matemática, enquanto instrumento educacional: devemos enfocar, ou enfatizar, esse instrumento como

Ciência, Método, Linguagem, Técnica?

Em suas origens, a Matemática emerge como método de exploração de situações reais, a partir de experiência ou observações, com dados corretos, empíricos. Prossegue como linguagem, no estabelecimento de modelos interpretativos, resultados da necessidade de simplificação e comunicação e, como técnica, digamos, ao utilizá-los na prática. Vai adiante, adquirindo novo "status", no prosseguimento da composição do quadro de ciência, ao formalizar esses modelos em abstrações indispensáveis às generalizações e à reinterpretação em situações novas.

A generalização é um refinamento e, como diz Poincaré, "Toda generalização é uma hipótese a ser comprovada. Essa comprovação, quando matemática, difere da de outras ciências, nas quais a comprovação é uma verificação experimental, estatística. Em Matemática, a comprovação é feita pelo *princípio da recorrência,* ou *indução matemática".*

Esse princípio, digamos de passagem, não fica bem claro num primeiro contato escolar. Requer amadurecimento matemático e certamente, um tratamento cuidadoso.

Como enfocar, então, a Matemática, num procedimento educacional?

Tomemos Von Neumann, para prosseguirmos nessa ordem de pensamentos:

"As idéias matemáticas surgem do empírico (isto é, da experiência), se bem que a sua generalização seja longa e obscura. ... Quando uma disciplina se afasta muito de suas fontes, quando na segunda ou terceira geração ela conserva apenas indiretamente a idéia que nasceu da realidade, a distância se torna então maior e a disciplina fica exposta a sério perigo: o perigo da degeneração."

Com dois casos particulares, ilustremos a colocação que estamos assumindo para fixar as idéias, na síntese dos enfoques: ciência – linguagem – modelo – técnica.

Quando estudamos o índice de crescimento de uma população, ou observamos a dilatação de peças pela ação do calor, estabelecemos em cada caso um sistema de observação e coleta de dados. Procuramos buscar e evidenciar alguma correlação de causa-efeito existente, na compilação empírica dos dados. A seguir, procuramos construir um modelo que interprete essas observações e que nos permita prever resultados, caso exista uma correlação. Este é o papel do modelo matemático, num processo oportuno de abstração, permitindo a generalização.

No caso do crescimento de população, um modelo em $\mathbb{N}$ poderá ser satisfatório; como uma progressão aritmética, ou geométrica, por exemplo.

Dependendo do fenômeno em estûdo, precisamos recorrer a modelos em $\mathbb{R}$. É o que acontece, por exemplo, no caso da dilatação. Trata-se de grandezas variando com continuidade.

O recurso a gráficos é comum. O modelo gráfico dá apoio visual que é muitas vezes mais esclarecedor e de percepção imediata. Se se trata de uma proporção, por exemplo, o gráfico é uma reta, cuja leitura é trivial.

A reta, aliás, funciona, obviamente, como modelo geométrico para o próprio $\mathbb{R}$, modelo ao qual recorremos, quase que intuitivamente.

Acontece freqüentemente nos processos de matematização que os modelos originais, oriundos de uma determinada situação particular, além de permitirem ser explorados em toda sua potencialidade de aplicações diversificadas, permitem também, no processo de abstração, a extensão para estruturas mais gerais; estas, por sua vez, se tornam objeto de novos estudos e especulações. Ultrapassam assim a necessidade restrita da interpretação da situação de origem. Esse ciclo de observações e estudos, do empírico à elaboração de modelo abstrato, à generalização, à busca de analogias, de novas aplicações e especializações teóricas, é um ciclo característico da Matemática, percorrido no método peculiar à mesma, de construção de modelos interpretativos numa linguagem própria para as diversificações técnicas e a generalização.

Deverá esse ciclo se evidenciar em um procedimento educacional, considerando que a abstração é a sua "pedra de tóque"?

"A abstração não é a negação do concreto. Antes é a multiplicidade de concretos. É um multi-concreto". Comenta Lombardo Radici, numa oportuna observação.

Esse comentário poderá nos ajudar em nossas indagações.

Basta atentarmos um pouco, para que possamos construir uma linguagem de exemplos ilustrativos, tão rica quanto queiramos. Tomemos ao acaso apenas dois deles:

A Álgebra de Boole serve ao estudo das proposições, à esquematização de circuitos elétricos, à técnica de computadores etc. O Cálculo Diferencial e Integral, na sua ampla folha de serviços, cobre as mais diversas ciências.

À luz dessas observações, continuemos a refletir sobre o papel da Matemática na Educação.

Avaliemos se convém:

- Encaminhar gradativamente o aluno para a abstração;

- Abrir janelas para a percepção do aluno sobre o desenvolvimento e o papel histórico da Matemática, nas suas afirmações e incertezas;

- Empregar boa parte do tempo escolar para permitir que os conhecimentos do aluno evoluam, por meio de erros e acertos provenientes de sua própria experiência e, necessariamente, de sua intuição;

- Orientar o aluno para a construção de modelos triviais, alcançando o significado dos processos matemáticos.

Prosseguiremos, gradativamente, nosso questionamento.

Julgamos, ou não, fundamental na Educação, colocar-se o aluno em sintonia com a sua própria potencialidade? Afinal, o que se está propondo fazer é educar seres humanos, crianças hoje, jovens ou adultos amanhã, que deverão levar a tocha adiante, conscientemente se enriquecendo.

Se o ensino da Matemática pode representar algum papel no desenvolvimento da criança e na preservação ou aperfeiçoamento social, aí está um componente básico, que lhe dá o seu significado primordial. Ensino é, fundamentalmente, fator educacional; face ao indivíduo, face à sociedade. Não convém, portanto, que se dê ao estudante a chance de perceber as origens comuns do conhecimento?

O educando, ao perceber a motivação, a origem e as razões da necessidade da formalização nos processos matemáticos, não estará, na verdade, não só se colocando em sintonia com o pensamento da humanidade, como compreendendo melhor a Matemática, já que, de certa forma está "participando" de sua construção?

"Modus in rebus", não se trata, é claro, de esperar que a criança reconstrua a Matemática, que "reinvente a roda"; nem que se inteire completamente sobre a história da Matemática. Trata-se, isso sim, de ensejar que essa criança cresça a partir de sua própria experiência, percebendo o consenso a que se tem atingido em simplificações, comunicações, etc., com flashes oportunos. Sempre que pudermos, convém jogar uma luz para o alto, tendo em vista aspectos mais gerais, mais abrangentes. Mas alerta! São princípios, ou aspectos, gerais, atingíveis pela criança, por isso mesmo, conquistáveis por ela própria, em lugar de decorados ou impostos de cima para baixo. A informação, quando oportuna e dosada, não causa danos. O seu excesso, esse sim; o "pacote informativo" pode conduzir a precipitações, à sensação de que tudo já nasceu pronto, é imutável, ou de que foi construído aleatóriamente, cabendo apenas, a quem estuda, reconhecê-lo passivamente, compreendendo-o ou não.

Precisa ser evitado esse "tudo já nasceu pronto", sensação tão comum nos bancos escolares. Uma vez estabelecida essa sensação, é imperativo que se a repense, para que seja vislumbrado o fio condutor, ou fios condutores desse "tudo".

O natural das crianças é irem aos poucos se aproximando do desconhecido, ampliando as suas fronteiras de apreensão, num desvendar permanente que a elucida. O desconhecido é recebido com naturalidade e curiosidade. Em relação à Matemática escolar, porém, isso geralmente não acontece porque se vem colocando no "ensino" da Matemática uma muralha que impede essa conquista gradativa. Entrega-se em geral ao aluno, já prontos e formalizados, somente os resultados obtidos por longos caminhos de experiência, por vezes, com possibilidade de serem tão elucidativos e motivadores!

Ao aluno caberá apenas decorar esses resultados e os aplicar, com automatismo, em situações-problema que serão cobradas em supostas avaliações. Avalia-se um suposto domínio de uma técnica estranha.

Nessa interpretação deformada do que venha a ser um procedimento educacional, omite-se ao aluno, exatamente, o cerne dos processos matemáticos, o "caminho das pedras", da evolução desses processos. Omite-se o pensamento matemático e se deixa ao aluno apenas o bagaço dos algorítmos, próprios para serem entregues às máquinas.

Houve tempo, felizmente já superado, em que as crianças eram estimuladas a recitar a cantilena dos números naturais, sem terem o sentido prático dos mesmos. Embora o processo empírico da contagem, ao que parece, já tenha sido dominado e suficientemente explorado na escola, falta muito ainda para que essa simples conquista se expanda, atingindo o significado das quatro operações fundamentais.

Ainda em relação aos números naturais, cujas origens se perdem tão longe, que explicam o que dizia Kronoecker: "Os números naturais foram criados por Deus, tudo o mais foi criação do homem", seu conceito e sua representação histórica devem ser muito trabalhados, inclusive do ponto de vista histórico, antropológico. Da mesma forma, não dará outra visão às frações, a percepção de que, a certa altura da História, os números naturais já não eram suficientes para os modelos matemáticos de que necessitavam certos grupos humanos?

E os processos infinitos? Não lhes valerá um contato prático com sucessões, com dízimas, sentindo, numéricamente, o seu significado, antes de receberem o "pacote" de regras do cálculo de limite, de derivadas, etc.? Os conceitos de limite e continuidade terão muito a ganhar em estímulo e compreensão, se tiverem um tipo de tratamento, além de empírico, prático, também histórico, salientando as dificuldades do caminho percorrido até a precisão da atual conceituação.

É fácil dizer-se. Será fácil colocar-se em prática?

Creio que a experiência poderá confirmar que sim. Esse procedimento é mais válido do que aquele adestramento estéril em técnicas específicas, algorítmos e macetes.

Macetes e adestramentos não fazem sentido na cabeça do educando, mesmo sendo um jovem universitário. Cedem, por obediência ou comodismo, para passar nos exames, mas não usam com independência, em sua vida prática, coisa alguma do que lhes foi "ensinado".

Entra aí, fundamentalmente, a sensibilidade do professor, alicerçada, evidentemente, no seu devido preparo matemático e nas ciências da Educação — desnecessário dizer-se. O bom senso o ajudará nessa distinção entre o fundamental e o supérfluo, entre o oportuno e o prematuro.

Quando deveremos assumir essa postura no ensino da Matemática?

Sempre. Da pré-escola ao terceiro grau.

E quanto ao programa oficial, formal, a ser cumprido? Essa "camisa de força" para uns ou mero pretexto, para outros?

Precisamos ter em mente que o verdadeiro programa a ser cumprido tem compromisso com a formação e a integração do aluno no contexto social. Sua função seria balisar, digamos assim, um processo de "ensino-educação", não de um "ensino-informação". Programa é um meio, não um fim: oriente o professor numa opção de caminhos face o processo educacional a que se pretende; mas sempre deverá haver espaço para adaptações e interpretações devidas.

Quanto a cobranças posteriores, de provas ou competições, poderemos confiar nas cabeças que estamos ensejando que se formem, sem bloqueios, sufocos ou adestramentos alienadores. Situações novas não serão mistérios para seres educados com essa abertura, com a qual puderam adquirir a postura de ir em busca do "know why", antes do passivo "know how".

Se, no entanto, no âmbito escolar, os processos matemáticos se omitirem, dando lugar apenas a informações a serem arquivadas, o estudante estará sendo mutilado na sua possibilidade de enfrentar situações novas, deformado no seu desenvolvimento.

O papel da Matemática, portanto, na Educação, pode ser comparado ao de uma faca de dois gumes: de papel essencialmente formador, pode se transformar em papel perverso, alienador e mutilador.

Isto é um alerta de quem já viu muitas gerações prejudicadas em vários setores sociais, por uma suposta "educação"; mas que também, felizmente, tem testemunhado o reverso positivo dessa medalha; e que espera, pelo menos, ter provocado reflexões acerca da indissociabilidade da Matemática como Ciência, Método, Linguagem, Técnica e do seu papel a desempenhar na Educação.

BIBLIOGRAFIA sugerida nesse início de curso

BOUBAKI, N. Les Grand Courants de la Pensée Mathématique.

BRUNER. O Processo da Educação.

PIAGET, CHOQUET, DIEUDONNÉ, R. THON e outros. La Enseñanza de las Matemáticas Modernas.

POINCARÉ. La Science et la Hypothèse.

O PROFESSOR MELLO E SOUZA
DEPOIMENTO SOBRE SUA VISÃO E SUA SENSIBILIDADE NA ADEQUAÇÃO DO ENSINO DA MATEMÁTICA AO ALUNO

Anna Averbuch
Franca Cohen Gottlieb
USU – GEPEM

1. O INCENTIVADOR

O professor Mello e Souza era dono de uma enorme sensibilidade em relação aos problemas do ensino da Matemática e das dificuldades encontradas pelos alunos em sua aprendizagem.

Quando era Coordenador dos cursos da CADES (Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário) do MEC (Ministério da Educação e Cultura), organizou várias publicações, entre elas a revista "Escola Secundária". Em 1967 nos encomendou um artigo sobre "Técnica Moderna para o Ensino da Matemática" para incluir naquela revista. Relendo hoje aquele artigo ficamos surpresas como os problemas não mudaram e como opiniões que emitíamos baseadas unicamente em nossa vivência em sala de aula, são hoje reconhecidas como válidas apoiadas em inúmeras experiências de pedagogos, psicólogos ou sociólogos renomados. Da mesma forma encontramos experiências por nós feitas na época e que hoje em dia são bases para teses em Educação Matemática.

Em homenagem ao Professor Mello e Souza, nosso incentivador, publicamos alguns trechos daquele trabalho no artigo "Técnicas Modernas para o Ensino da Matemática" apresentado neste Boletim.

Ainda quando Coordenador dos cursos da CADES, o professor Mello e Souza incentivou a publicação das "Apostilas de Didática Especial da Matemática" e de monografias sobre o Ensino da Matemática.

As Apostilas foram elaboradas, em 1959, pelos professores Ceres Marques de Moraes, Júlio Cesar de Mello e Souza (o bem conhecido Malba Tahan, irmão do professor José Carlos) e Manoel Jairo Bezerra. Os assuntos tratados foram:

A Matemática: seu conceito; sua importância.
Finalidades da Matemática no Curso Secundário.
Interpretação do Programa de Matemática do Curso.
O Planejamento do Ensino em Matemática.
O Problema do Método no Ensino da Matemática.
Técnicas de Apresentação da Matéria e da Aprendizagem em Matemática.
O Material Didático no Ensino da Matemática.
Técnicas de Fixação da Aprendizagem da Matemática.
Jogos; Recreações e Curiosidades Matemáticas.
A Verificação da Aprendizagem em Matemática.

As monografias sobre o ensino da Matemática foram premiadas no Dia do Professor e são, entre outras, de autoria do Prof. Manoel Jairo Bezerra, "Material Didático", e da Professora Maria Edmée Jacques da Silva, "Didática da Matemática".

Conseguiu bolsa de estudos para que jovens professores se especializassem em Educação Matemática em Sèvres, França, onde havia um centro de estudos muito avançado no assunto. Foram beneficiados, entre outros, os Professores Manoel Jairo Bezerra e Anna Averbuch.

No 3º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, em 1959, no Rio de Janeiro, foi Vice-Presidente da 4ª Comissão: "Formação e Aperfeiçoamento do Professor Secundário". Sua atuação foi tão importante que nos Anais do Congresso consta o seguinte agradecimento:

"Ao Professor José Carlos de Mello e Souza. Quando lhe sugerimos o patrocínio do Congresso pela CADES, obtivemos uma acolhida que nos garantiu, de imediato, a sua realização. Foi ele a pedra angular de todas as atividades administrativas, presente também, a cada instante, em todos os setores técnicos do Congresso, colaborando de forma efetiva e eficiente na organização do temário e em quantos assuntos foi solicitado a cooperar. Afirmamos aqui, com o máximo de justiça, que a ele devemos ter sido possível realizar este Congresso, encampando as nossas idéias e imbuindo-se do mesmo espírito construtivo de todos em benefício de uma didática melhor da Matemática em nossa terra, ação que, de forma tão eficiente, vem levando a efeito na CADES.

Ao Professor José Carlos de Mello e Souza todo o nosso reconhecimento e nosso desejo que continue a auxiliar os nossos futuros Congressos".

2. O MESTRE

O Prof. Mello e Souza, formado em Engenharia, dedicou-se ao lado desta profissão à tarefa de Professor de Matemática desde jovem por real vocação. Iniciou sua carreira como professor do ensino secundário, em Colégios muito conceituados como o Colégio Pedro II, o Instituto de Educação, o Colégio Notre e Dame do Sion entre outros.

Passou em seguida à Universidade Santa Úrsula onde ocupou vários cargos. Como sempre muito preocupado com o ensino da Matemática, elaborou vários questionários, tanto para alunos como para professores, dos quais mostramos os que tinham por objetivos:

a) modificar a atitude dos alunos em relação à cola;

b) avaliar o professor mediante questionário por ele próprio, voluntariamente, distribuído aos seus alunos.

a) Questionário, relacionado com a cola, distribuído aos alunos

Caro amigo:

Entre os estudantes brasileiros, principalmente do 2º e 3º graus, está amplamente disseminado o hábito de cola. É um fato de imediata e fácil verificação. Cola-se com a mais tranqüila naturalidade, sem escrúpulos de qualquer ordem. No entanto, há países em que colar é um ato condenável, e, mesmo no Brasil, há escolas em que a cola é considerada pelos próprios alunos uma prática censurável.

Colar é tão vergonhoso como surrupiar, à socapa, a carteira do seu vizinho distraído.

Na USU, no Curso de Matemática, há turmas, em certas disciplinas, em que nenhuma fraude se verifica. O mesmo não podemos afirmar, porém, do curso de Matemática, como um todo.

Os professores do curso de Matemática desejam desenvolver uma ampla campanha visando a acabar com o feio hábito da cola de alguns de seus alunos, e isto desde o primeiro dia de aula e em todas as disciplinas.

Com tal propósito, preparamos um questionário, cujo objetivo é conhecer o que pensam nossos alunos, muitos dos quais futuros professores e educadores, sobre essa prática condenável.

Solicitamos, pois, o favor de sua resposta, a título de colaboração em nosso objetivo.

Não precisa assinar. Assine, se quiser. Responda, entretanto, com seriedade, sinceridade e honestidade.

Coloque o número de sua resposta dentro do espaço correspondente, na coluna à direita:

A — A cola, na sua turma, ocorre:

A1. nunca (1)
pouco (2)
com freqüência (3)
com muita freqüência (4) ( )

A2. em poucas disciplinas (1)
em várias (2)
em quase todas (3)
em todas (4) ( )

A3. apesar da fiscalização (1)
por negligência da fiscalização (2)
por falta de fiscalização (3)
com aquiescência de fiscalização (4) ( )

B — Sendo inegável, que há alunos que colam, pergunta-se:
POR QUÊ? (atribua valores de *0 a 4* aos motivos a seguir apresentados, conforme o menor ou maior peso dos mesmos)

B1. Por falta de conhecimentos básicos e por quererem passar a todo custo ( )

B2. Porque o professor não leciona a matéria satisfatoriamente e a exige ( )

B3. Porque o professor é demasiado exigente nas provas ( )

B4. Porque as questões são complicadas, difíceis e acima do nível da turma ( )

B5. Porque as provas são longas e cansativas ( )

B6. Porque as provas se acumulam em pequeno intervalo de tempo ( )

B7. Porque o aluno que não cola fica em situação inferior aos demais ( )

B8. Porque as provas não são consideradas instrumentos válidos para medir o preparo dos alunos ( )

B9. Porque já adquiriram o vício da cola e não conseguem se libertar dele ( )

B10. Porque consideram a cola uma demonstração de sua inteligência, vivacidade e capacidade de tirar vantagem em toda circunstância ("lei de Gerson") ( )

B11. Porque não se consideram desonestos pelo fato de colar ( )

B12. Porque precisam, a qualquer custo, levar bons resultados para casa ( )

B13. Porque não se interessam pela disciplina em que colam ( )

B14. Porque ____________________________________ ( )

B15. Porque ____________________________________ ( )

C — Se for proposto um CÓDIGO DE ÉTICA, em que a cola seja radicalmente condenada pela turma por ser considerada um ato desonesto e degradante, que fere gravemente o senso de moral de quem a pratica, agride seus valores éticos e o integra na grande onda de mentira, de fraude e corrupção que está afogando e aniquilando o país, VOCÊ:

Assinale com um X o ítem preferido entre os três abaixo:

C1. Será totalmente contra tal CÓDIGO DE ÉTICA por considerar que a *fraude*, a *mentira* e a *malandragem* já se incorporaram definitivamente ao modelo de ser do estudante brasileiro. ( )

C2. Acha que vale a pena tentar sua implantação, mas acha difícil alcançar-se êxito. ( )

C3. Considera a proposta válida e possível de ser aceita. ( )

D — Se prosperar a proposta do CÓDIGO DE ÉTICA, você considera desejável que fique exclusivamente com a própria turma o encargo de zelar pela correta aplicação das sanções que o mesmo estabelecer?

Assinale com um X uma das três propostas sugeridas:

Não ( )
Sim, dependendo de restrições ( )
Sim, sem restrições ( )

E — Se você deseja justificar mais longamente alguma resposta, se você precisa de esclarecimentos sobre pontos que considera obscuros, use o espaço abaixo:

F — Se você tem *críticas* a fazer ao seu curso, à sua estrutura curricular, aos procedimentos didáticos de seus professores, ao presente questionário, aos seus objetivos, faça-as a seguir:

G — A equipe de professores de Matemática do GEPEM (Grupo de Estudo e Pesquisas em Educação Matemática) e o colegiado do Curso de Matemática da USU, agradecem a sua colaboração, quaisquer que tenham sido suas respostas, observações, sugestões e críticas.

b) Questionário que o Prof. Mello e Souza distribuia a seus alunos para que os mesmos o avaliassem.

UNIVERSIDADE SANTA ÚRSULA
VICE-REITORIA ACADÊMICA — C.C.E.T.
CURSO DE MATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO APRESENTADO AOS ALUNOS

da turma .... , disciplina .... , no .... semestre de 19 ....
Professor ....

Classifique dando conceitos de **Excelente** a **Péssimo**, aos ítens abaixo:

	Exc.	M. Bom	Bom	Regular	Ruim	Péssimo
01. Assiduidade e pontualidade do professor						
02. Evidência do domínio do professor a disciplina lecionada						
03. Clareza de exposição do professor						
04. Relacionamento do professor com a turma						
05. Capacidade do professor de despertar ou aumentar o interesse dos alunos pela disciplina que leciona						
06. Capacidade do professor de desenvolver uma reflexão crítica dos alunos sobre os temas que leciona						
07. Interesse do professor pela aprendizagem dos alunos						

08. Interesse do professor pelos alunos que apresentam dificuldades durante as aulas ou em seus trabalhos escolares						
09. Critérios de avaliação da aprendizagem usadas pelo professor						
10. Interesse que lhe despertou a disciplina pela forma com que foi lecionada						

A tabulação deste último questinário, feita pelo próprio prof. Mello e Souza é:

Itens	5	4	3	2	1	0		
01	⊠⊠┌	|					média	4,9
02	⊠⊠	⊓					média	4,7
03	┌	□┌	⊠				média	3,76
04	□┌	□	⊓				média	4,2
05	⊓	⊠|	□				média	3,92
06	⊓	□|	⊓	|			média	4,6
07	⊠□	□					média	4,7
08	□□	⊏	|	|			média	4,4
09	□	□|	⊓	|			média	4
10	⊓	□⊓	⊓	|			média	4
								43,18

3. O MÍSTICO

Entre os papéis do professor Mello e Souza que com reverência examinamos, encontramos a seguinte poesia que sintetiza seu modo de encarar a missão de mestre.

Oração do Professor

(adaptação de "La oracion de la maestra", de Gabriela Mistral)

Senhor! Tu que ensinaste, perdoa que eu ensine, que use o nome de mestre, nome que trouxeste sobre a Terra.
Dá-me o amor exclusivo dos meus cursos: que nem a sedução da beleza seja capaz de roubar-lhe minha dedicação de todos os instantes.

MESTRE! Faze-me perdurável o fervor e passageiro o desencanto. Arranca de mim esse impuro desejo de justiça, que ainda me perturba, o protesto que irrompe de mim quando me ferem. Não doa a incompreensão nem me entristeça o olvido dos que ensinei.

Que eu consiga fazer de um de meus alunos um poema perfeito e nele deixar minha mais perfeira melodia, para quando meus lábios emudecerem. Mostra-me possível teu Evangelho em meu tempo, para que não renuncie à luta de cada instante por ele. Faze-me forte, mesmo na minha fraqueza, faze-me desprezador de todo poder que não seja puro, de toda pressão que não seja a da tua vontade ardente sobre a minha vida.

Amigo, acompanha-me! sustenta-me!
Muitas vezes não terei senão a ti, a meu lado.
Quando minha doutrina for mais severa e mais ardente
minha verdade, ficarei sem os mundanos
Tu, porém, me apertarás então sobre teu Coração
cheio de solidão e desamparo.

Só em teu olhar irei buscar aprovações.
Dá-me simplicidade e dá-me profundeza.
Livra-me de ser complicada ou banal minha lição quotidiana.

Dá-me afastar os olhos de meu peito ferido ao
entrar em minha sala de aula. Que não leve à mesa de trabalho
minhas preocupações materiais, minhas dores mesquinhas.
Aligeira-me a mão na censura e suaviza-me ainda mais no gesto de
carícia. Que eu repreenda com dor para saber
que corrigi sem deixar de amar!

E por fim, ao evocar a palidez da tela de Velasquez
lembra-me que ensinar é amar intensamente sobre a terra,
é chegar ao último dia com o lançaço de Longinos
rasgado de lado a lado no flanco.

Amém

TÉCNICA MODERNA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

Técnica para o ensino de caráter construtivo

Anna Averbuch
Franca Cohen Gottlieb
USU – GEPEM

Em homenagem ao Prof. Mello e Souza publicamos trechos deste artigo, por ele encomendado para "Escola Secundária" que deveria ser editado pela CADES em 1967.

Já Galileu havia observado que entre 100 pessoas que não tenham conhecimento de geometria, talvez 96 pensariam que áreas iguais deveriam pertencer exclusivamente a figuras iguais, assim como perímetros iguais deveriam necessariamente corresponder a figuras de áreas iguais. Este erro, comum até hoje entre os seres humanos, deve-se a dois fatores principais:

1) – Falta de precisão na utilização das palavras.

2) – Falta de desenvolvimento do pensamento lógico.

Estes dois defeitos são infelizmente muito encontrados não somente entre alunos, mas também entre adultos, até entre os possuidores de uma certa cultura. É comum encontrarem-se escritores famosos que afirmam com uma certa arrogância não entenderem nada de matemática e não serem por isto considerados ignorantes. Por outro lado, se um cientista afirmar que não se interessa de maneira alguma por literatura, pintura ou música, será muito mal conceituado. Por que esta diferenciação de valores?

As convenções sociais nos habituaram a uma distorção da noção do que seja cultura. Nem todos podem ser Sartre, Bertrand Russell, Picasso ou Einstein; mas todos devem conhecer, compreender, apreciar uma dose mínima de cada faceta do saber humano. Um ocidental de cultura média que não tenha muita queda para o desenho, não cultiva esta arte, a ponto, às vezes, de não saber traçar um círculo ou uma linha reta. O que seria deste indivíduo num país oriental onde a escrita é praticamente desenhada? Seria ele um analfabeto?

Não, pois sendo um indivíduo de inteligência média, se adaptaria às exigências do meio. Deste modo vemos que cada indivíduo deve poder adquirir uma quantidade média de conhecimentos científicos e, em especial, lógicos.

É considerado hoje em dia inadmissível supor-se, para um indivíduo, total incapacidade em aprender isto ou aquilo. Este mito, ainda hoje tão difundido, é provocado em realidade por falhas na época da aprendizagem, de motivação apropriada ou de adequação da técnica de ensino à personalidade do aluno.

Desde cedo devemos exigir do aluno precisão no emprego das palavras. Um assunto que muito se presta para erros desta natureza é a diferenciação entre as palavras "reta" e "segmento" ou "algarismo" e "número". Perguntando por exemplo a uma turma de alunos da escola primária, quantos números há de 35 algarismos, teremos respostas de todos os tipos. Há quem responda que existem infinitos, outros que respondam que há 35 e outros que há somente 2.

Os que dão a última resposta, que são a maioria, certamente confundem as perguntas: "QUANTOS NÚMEROS HÁ DE 35 ALGARISMOS"? e "QUANTOS ALGARISMOS HÁ NO NÚMERO 35"?

Os que dão a penúltima resposta confundem algarismos com unidade. Os que dão a 1ª resposta são os que confundem o muito grande com o infinito. Erro que inclusive o adulto faz com freqüência.

Mas não é somente a falta de precisão que conduz aos erros acima referidos. Os esboços de raciocínio que conduziram àqueles absurdos foram rápidos demais, os ensaios de lógica que foram utilizados não se apoiaram sobre nenhuma profundidade mental, pois a imaginação não foi despertada.

Trata-se exatamente do mesmo caos e da mesma incapacidade que encontramos em todos aqueles que dizem não compreender matemática — mas se após alguns minutos refazemos a pergunta encaminhando o raciocínio de modo que a mente seja levada a percorrer etapas sucessivas, rapidamente essas pessoas chegam à conclusão por si só.

Com este exemplo vemos a intuição e a lógica postas a trabalhar. Todo processo de invenção matemática e com maior razão de compreensão é regido na seguinte série de fenômenos psicológicos:

Contemplação de figuras ordenadas.
Constatação de uma verdade simples.
Indução que conduz à expressão geral da lei.
Verificação geral, chamada demonstração, que consiste em fazer sobre uma classe observações que foram feitas sobre os entes daquela classe.

No nosso exemplo, fazer com que o aluno não pense em particular nos números 3 e 5, e sim, num caso geral, em um número qualquer.

Este é o processo de abstração fundamental na iniciação matemática. Somos de opinião que este poder de abstração não se apresenta em nossos alunos antes dos 12 ou 13 anos, e por isto, problemas desta natureza não devem ser apresentados nas primeiras séries do curso ginasial, pois, quando são dados, os alunos não os fazem com compreensão e sim repetem o raciocínio feito pelo professor.

Com maior razão, na geometria, devemos encaminhar os alunos para o desenvolvimento do pensamento lógico. É muito normal nas nossas escolas serem dadas demonstrações de geometria de uma maneira expositiva, demonstrações essas que são decoradas de um modo geral, não contribuindo deste modo para que o aluno utilize o raciocínio dedutivo.

O fato do aluno usar nas demonstrações geométricas o seu pensamento lógico deve ser realçado pela necessidade de que ele sinta esta demonstração e isto pode ser obtido fazendo preceder à demonstração propriamente dita, experiências concretas que levem a observações da propriedade a ser demonstrada.

Cabe aqui notar que demonstrações de propriedades evidentes aos olhos de um aluno ginasiano, não devem ser apresentados no 1º ciclo da escola secundária. Evitamos assim que o aluno julgue ser a demonstração uma ginástica mental supérflua. Por meio de material didático facilmente manuseável mostramos congruência de triângulos, semelhanças de triângulos, a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo etc. . .

Para o estudo das áreas o melhor é o uso do geoplano. Mas uma experiência banal na sua essência, mas muito sugestiva é feita por meio de um simples barbante.

A professora Emma Castelnuovo descreve esta experiência da seguinte forma:

Esticando-se um anel de barbante entre o polegar e o indicador de cada mão, obtém-se aproximadamente um retângulo (da mesma forma como se faz para a brincadeira popularmente chamada de "cama de gato"). Faz-se o aluno repetir essa experiência afastando ou aproximando os dois dedos entre si e conseqüentemente para manter o barbante esticado aproximando ou afastando as mãos entre si. Com isto ele mantém o perímetro constante, mas varia a forma do retângulo. Neste momento apresentamos o problema: "O que acontece à área do retângulo"?

A resposta imediata é de que a área não muda pois o contorno não mudou. Os alunos mais espertos ainda acrescentarão: "o que se perde na altura, se ganha no comprimento".

Observamos que esta reação de compensação é muito humana e o professor deve ter o devido cuidado para não destruí-la, pois teremos outras situações em que ela é aplicada e com muito proveito.

Façamos o aluno repetir a experiência aproximando mais os dedos de modo que a um certo momento o retângulo desapareça, tornando-se um simples segmento. Neste momento repetimos a pergunta e não teremos mais a unanimidade da resposta como na primeira vez.

A reação de cada aluno dependerá de sua sensibilidade.

Os mais sonhadores, os que têm tendência literária, se apegam à idéia da constância da área admitindo a contra gosto um desfecho brusco final cuja explicação continua para eles um mistério. Outros esboçam a idéia de uma função contínua fazendo a área diminuir progressivamente até tornar-se nula. Os mais positivos pegam o seu caderno quadriculado e desenham vários retângulos com o mesmo perímetro e calculam as respectivas áreas. Estes são os que chegam à conclusão de que a área, nula nos casos limites, tem o seu valor máximo no quadrado.

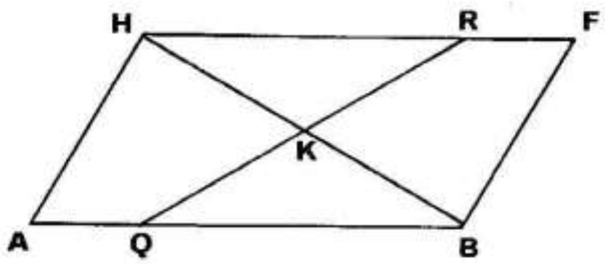
Esta experiência presta-se a uma apresentação numa seção de estudo dirigido em que o problema é apresentado e cada aluno deve escrever as suas observações e conclusões.

Outras experiências concretas serão vistas mais adiante quando apresentarmos diferentes tipos de material didático a serem usados nas diferentes técnicas modernas.

Em séries mais adiantadas, quando o aluno já pode aplicar uma certa abstração, uma técnica para desenvolver esta capacidade é feita por meio de uma esquematização bem lógica do seu raciocínio.

Nas escolas americanas o S.M.S.G. introduziu já há alguns anos uma disposição lógica para as demonstrações. O mesmo foi feito no Brasil pelo G.E.E.N. de São Paulo assim como nos livros didáticos mais atualizados e está sendo aplicado em algumas escolas como por exemplo no Instituto de Educação da Guanabara.

Consiste esta esquematização numa disposição em duas colunas, uma das afirmações de um lado e as justificativas de cada afirmações do outro lado.



Exemplo:

Na figura ao lado

med. $\overline{AH}$ = med. $\overline{FB}$

med. $\overline{AB}$ = med. $\overline{FH}$

e $\overline{RQ}$ corta ao meio $\overline{HB}$ em K,

Prove que: med. $\overline{QK}$ = med. $\overline{KR}$

Hipótese $\begin{cases} \text{med. } \overline{AH} = \text{med. } \overline{FB} \\ \text{med. } \overline{AB} = \text{med. } \overline{FH} \\ \text{med. } \overline{HK} = \text{med. } \overline{KB} \end{cases}$ Tese $\left|\ \text{med. } \overline{QK} = \text{med. } \overline{KR}\right.$

AFIRMAÇÕES	JUSTIFICAÇÕES
1) med. $\overline{AH}$ = med. $\overline{FB}$	1) Por hipótese
2) med. $\overline{AB}$ = med. $\overline{FH}$	2) Por hipótese
3) med. $\overline{HK}$ = med. $\overline{KB}$	3) Por hipótese
4) $\triangle$ ABH $\cong$ $\triangle$ BFH	4) Caso LLL de congr. de triângulos
5) med. $\widehat{ABH}$ = med. $\widehat{BHF}$	5) Ângulos Alternos Internos

6) med. $\widehat{QKB}$ = med. $\widehat{HKR}$	6) Ângulos opostos pelo vértice
7) med. $\overline{HK}$ = med. $\overline{KB}$	7) Por hipótese
8) $\triangle\ BQK \cong \triangle\ HRK$	8) Caso ALA de congr. de triângulos
9) med. $\overline{QK}$ = med. $\overline{RK}$	9) Lados Homólogos em triângulos congruentes

Esta esquematização presta-se para ser aplicada nas provas de verificação de aprendizagem, permitindo com maior facilidade a apresentação de demonstrações a primeira vista onde o professor pode avaliar o desenvolvimento lógico do aluno em vez de fazer o aluno repetir os teoremas já demonstrados em aula.

Neste tipo de avaliação, o professor dará o esquema deixando lacunas a fim que o aluno as preencha.

A medida que o aluno se torne mais seguro, o professor aumentará o número de lacunas, às vezes à esquerda e às vezes à direita, até que o aluno seja capaz de fazer sozinho seu desenvolvimento.

O exemplo citado é uma adaptação de um exercício dado no Instituto de Educação em 1965 como questão de prova.

Na questão dada foram deixados em branco as afirmações 1, 2, 3, 6, 7, 8 e as justificações 1, 2, 3, 4, 5, 8 e 9.

MATERIAL DIDÁTICO

Um auxiliar muito importante para as técnicas construtivas é o material didático.

Na escola tradicional o material didático usado na Matemática restringe-se ao quadro negro, giz e alguns modelos de sólidos para a Geometria.

O panorama na escola moderna apresenta-se com outras características quanto ao material didático.

A característica principal do material didático na escola tradicional é ser estático, isto é, o aluno não participa da sua execução, não o movimenta e não trabalha com ele, tem para o material uma atitude passiva e contemplativa, sem tirar conclusões próprias. Todas as observações lhe são sugeridas pelo mestre. Ele não "descobre" por si só as propriedades por meio de experiências concretas, e sim "as encontra já descobertas". Qualquer material que seja apresentado ao aluno com estas características não poderá ser considerado como material da escola moderna mesmo que se utilize das últimas descobertas tecnológicas.

O material da escola atual é essencialmente dinâmico. O aluno participa na sua execução, pode manuseá-lo e, mesmo que isto não se dê, como no caso dos filmes, tem uma atitude ativa nas conclusões ou observações a serem feitas quando o material lhe é apresentado. Deixa-se o aluno dar vasão a seu instinto de observação e fazer trabalhar sua imaginação, de modo a ele sentir cada experiência como realmente "sua". Estudos e aplicação dessa faceta das técnicas modernas foram feitas especialmente na Bélgica.

Citaremos dentro do possível alguns exemplos de material didático utilizado nas escolas modernas.

– REGUINHAS COLORIDAS DE CUISENAIRE

O material consiste em uma caixa contendo 241 reguinhas de 10 tipos diferentes que se distinguem um do outro pela cor e pelo comprimento.

branco	1
vermelhão	2
verde claro	3
rosa	4
amarelo	5
verde escuro	6
preto	7
marron	8
azul	9
laranja	10

As cores não são arbitrárias, existem as famílias dos Vermelhos:

vermelhão	(2)
rosa	(4)
marron	(8)

As famílias dos azuis:

verde claro	(3)

verde escuro	(6)
azul	(9)

As famílias dos amarelos:

amarelo	(5)
laranja	(10)

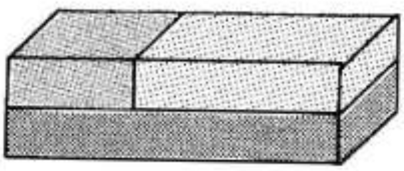
O branco (1) e o preto (7) não formam família.

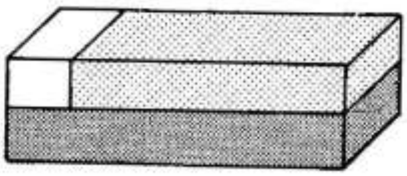
Estas reguinhas têm várias aplicações:

— NA ARITMÉTICA: para ensinar as operações com números inteiros, para introduzir as noções de frações, equivalência de frações e operações com frações.

EXEMPLOS:

— Para ensinar a adição de números inteiros (na escola primária), colocam-se duas ou mais reguinhas, uma em seguida à outra e procura-se uma reguinha de comprimento igual às reguinhas consecutivas.





Notamos que com este processo a criança aprende as operações antes de saber representar os números.

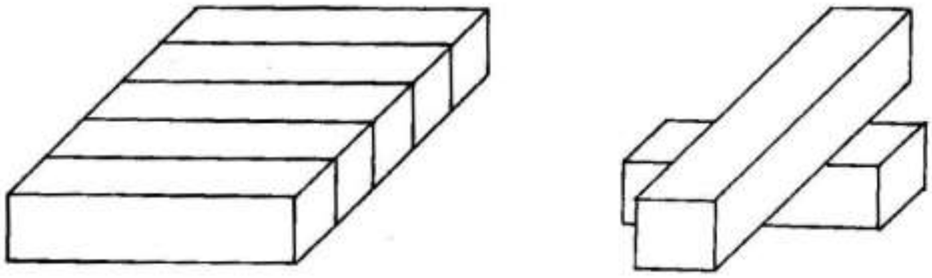
Esta riqueza de experiência que acompanha cada número (maneiras diferentes de compor o número etc.) vai mudar radicalmente a relação que cada criança estabelece com os números; cada número vai adquirir para ela uma outra personalidade que ficaria desconhecida se os números fossem apresentados abstratamente compostos de unidade. Os números vão ganhar em complexidade, podendo o professor tirar vantagens de várias observações para apresentar as diferentes propriedades das operações.

A operação de subtração é obtida imediatamente da observação da adição através da pergunta: "quanto falta à reguinha vermelha para obter o comprimento da reguinha amarela"?

Com esta técnica a multiplicação é obtida imediatamente pelo alinhamento de reguinhas da mesma cor.

Para números maiores, a fim de tornar a multiplicação mais abreviada, usa-se colocar a reguinha que vai ser repetida e a reguinha que indica o número de repetições uma sobre a outra, em forma de uma cruz.

Quando por exemplo tomamos 5 reguinhas verde claro (3) e as colocamos uma ao lado da outra como na figura abaixo a esquerda, a criança observa imediatamente um dos retângulos formado no plano horizontal; seu comprimento é o da reguinha verde e sua largura a medida da reguinha amarela. Isto justifica aos seus olhos a representação em cruz do produto.



A divisão torna-se compreensível para crianças de 6 anos, com este material, através da pergunta: "Quantas vezes a reguinha vermelha está contida na amarela"?

Quanto às outras maneiras das reguinhas serem aplicadas no ensino da Aritmética, o professor interessado poderá consultar as publicações do Prof. Gattegno.

1) Eléments de Mathématiques par les nombres en couleurs par Gattegno.

2) Initiation à la méthode "Les nombres en couleurs" – Cuisenaire G. et Gattegno C.

3) Série de Manueles "L'Arithmétique avec les nombres en couleurs." Gattegno C.

O prof. W. Servais do "Athéne du Centre, Morlarlauwels – Bélgica" num artigo publicado no Cahier nº 5 de Documentation do Ministère de L'Instruction Publique da Belgica cita entre outras as seguintes experiências aplicadas a turmas que correspondem ao nosso nível colegial:

— *Progressões Aritméticas:* Uma progressão aritmética é formada pela repetição da adição de um termo constante, a razão.

Para representar uma progressão, junta-se por exemplo, à reguinha verde claro (3), uma, duas, três vezes a reguinha vermelha (2).

Representa-se em seguida os diversos termos da progressão colocando sucessivamente uma debaixo da outra (no plano horizontal) uma reguinha verde claro seguida de uma vermelha, uma verde claro seguida de 2 vermelhas e assim por diante.

Chega-se assim à configuração muito sugestiva em escadinha, em que cada degrau representa a razão.

A lei de formação do n — ésimo termo é obtida por indução. Ela torna-se imediata quando o aluno percebe que o comprimento obtido ao colocar a n — ésima reguinha ele tem na sua frente uma reguinha verde clara e (n—1) reguinhas vermelhas.

Com esta configuração várias propriedades tornam-se imediatas:

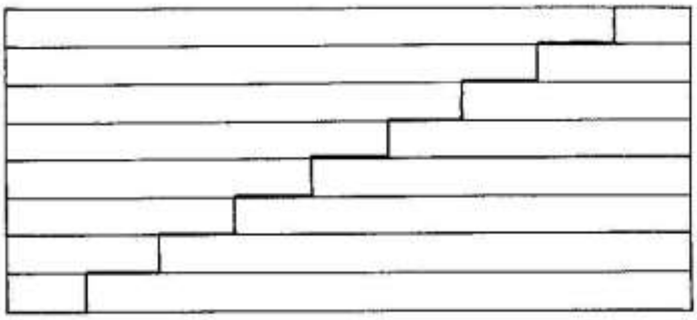
a) Partindo-se de 2 quaisquer termos da progressão passamos aos termos intermediários vizinhos (o sucessivo do 1º e precedente ao 2º) e verificamos que num caso somamos uma razão e no outro subtraímos uma razão de modo que a soma dos 2 novos termos é igual à soma dos 2 termos escolhidos inicialmente.

b) cada termo é média aritmética dos termos que o ladeiam.

c) a soma dos termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos.

Esta última propriedade se torna compreensível formando 2 vezes a mesma progressão sob a configuração de escadinha, uma vez crescente e outra vez decrescente.

Encaixando-se de maneira a formar um retângulo, observa-se que em cada linha o comprimento total é igual ao comprimento do último termo com o primeiro.



d) A soma dos termos de uma progressão é visível por esta mesma configuração do retângulo formado acima. Deste modo a dedução da fórmula da soma nos leva a dedução da área do trapézio, pois, basta imaginarmos, que as reguinhas se tornam infinitamente mais finas para chegarmos, no limite, à dois trapézios.

Por um atalho chegamos à 1ª noção de cálculo infinitesimal (ou integral).

– *Progressões Geométricas* são formadas pela repetição da multiplicação por um fator constante, a razão.

Com o auxílio das reguinhas o produto de dois números é indicado superpondo as reguinhas correspondentes, cruzando-as em ângulo reto.

Para representar as progressões geométricas superpomos a uma reguinha inicial sucessivamente outras reguinhas, todas iguais entre si cruzando-as cada vez.

Forma-se assim uma torre japonesa representando um elemento da progressão.

A analogia, com a construção da progressão aritmética traz imediatamente como um jogo a transformação das fórmulas.

Quando o manejo dos modelos que representam as duas progressões se tornar familiar chega o momento de introduzir a noção do isomorfismo entre a adição e a multiplicação. Faz-se compreender imediatamente como, por meio deste isomorfismo, a unidade, elemento neutro da multiplicação, corresponde ao zero, elemento neutro da adição. Está assim aberto o caminho para a introdução do conceito do logarítmo por meio das progressões.

— *Análise Combinatória* — Existindo esse material na escola, também pode ser utilizado como objetos diferenciáveis pela cor e pelo formato para se compreender bem os diferentes tipos de agrupamentos estudados na análise combinatória.

O professor W. Servais afirma ter usado esse material e ter obtido ótimos resultados. Os alunos, apesar de tatearem um pouco no começo, depois "descobriram" por si só as fórmulas.

Com este material ou outro qualquer do mesmo gênero chega-se a uma demonstração não tradicional das combinações simples.

Para formar uma combinação simples de $\underline{m}$ objetos tomados $\underline{n}$ a $\underline{n}$, basta separar $\underline{n}$ destes objetos a direita deixando a esquerda os $(m-n)$ objetos restantes.

O número de combinações simples é então o mesmo que o número de permutações com repetição de $\underline{m}$ objetos quando consideramos que os $\underline{n}$ objetos a direita representam o mesmo objeto repetido $\underline{n}$ vezes, o mesmo acontecendo com os $(m-n)$ restantes, logo:

$$C_m^n = P_m^{n,\ (m-n)}$$

— Na *Teoria dos Conjuntos:* Na conceituação de conjuntos, subconjuntos, conjunto unitário, conjunto vazio, conjuntos complementares, partições, relações de equivalência, conjunto quociente e relações de ordem.

A utilização deste material para este fim não se distingue da utilização de outro material qualquer diferenciável pela cor e pelo tamanho.

— Na *Geometria:* Sendo as reguinhas prismas retangulares, podem ser elas usadas para ilustrar as propriedades destes sólidos.

Em particular, sendo a reguinha branca um cubo, podemos através dela, investigar suas propriedades e quais as propriedades comuns ao cubo e aos prismas retangulares. Aliás, a este respeito, é interessante notar que os alunos reconhecem com dificuldade que o cubo pertence à classe dos prismas, devido ao fato de ser ele habitualmente estudado separadamente. Por meio das reguinhas este defeito é facilmente sanado.

Além disto pode-se, por meio de elásticos, empilhar reguinhas iguais de modo a formar prismas retangulares de dimensões desejadas, e estudar deste modo áreas e volumes.

Como derradeira aplicação, as reguinhas podem ser usadas como simples barras para, sobre uma mesa, construir modelos de polígonos.

MECANO

É um material de fácil aquisição, pois, é um jogo manuseado pelos meninos de mais de 8 anos. A sua maior aplicação é no estudo da geometria devido a sua rigidez aliada a sua fácil articulação.

Exemplos:

— *Estudos dos Triângulos*

A manipulação deste material permite que o aluno tire por si só várias conclusões:

• Não se pode, por exemplo, tomar ao acaso três quaisquer barras para formar um triângulo, pois, em alguns casos "ele não fecha" (no caso em que a medida de um lado é maior que a soma das dos outros dois).

• Uma vez construído um triângulo ele não pode ser articulado, isto é, o triângulo fica fixo, mesmo quando se exercer pressão sobre os vértices ou sobre os lados; isto significa que todas as crianças acabam construindo triângulos congruentes utilizando barras equivalentes. Descobrem assim, um dos casos de congruência de triângulos, exatamente aquele que é mais difícil de ser demonstrado da maneira tradicional.

De maneira análoga mostram-se os outros casos.

O aluno tem realmente a sensação de "descobrir" algo. Às vezes ele não é capaz de prever os resultados sem manipular o material.

• Pode-se sugerir aos alunos de construir um triângulo dados dois ângulos.

A 1ª pergunta será: "a partir de que base devemos começar a construção"?

A resposta do professor será: "Qualquer uma".

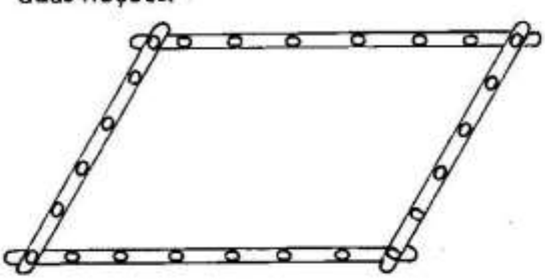
Os alunos não precisam nem acabar a construção para perceber que os triângulos assim formados não são congruentes, mas eles possuem algo em comum: "a forma".

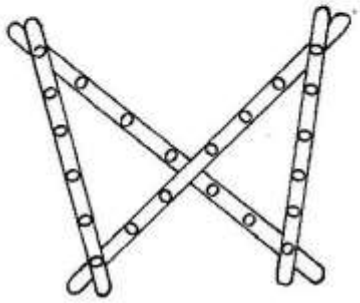
Observa-se assim que para construirmos triângulos congruentes temos que fixar *3 condições mínimas* das quais uma pelo menos é linear.

– *Estudo dos Quadriláteros*

Também neste caso o manuseio deste material faz com que o aluno retire conclusões; a mais interessante é o estudo dos paralelogramos isoperímetros, que os alunos têm normalmente a tendência de considerar congruentes.

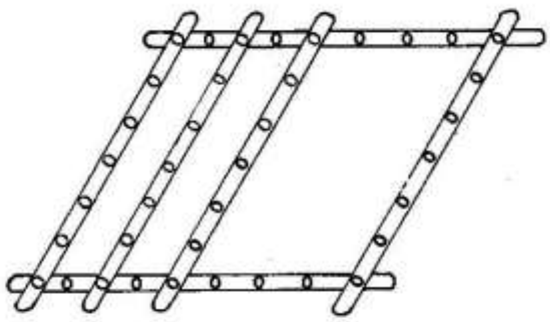
Por meio de experiências sucessivas o aluno distingue facilmente as duas noções.

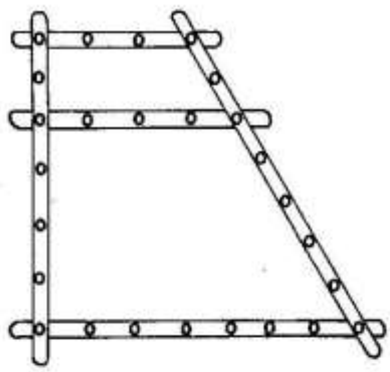




– *Construção de vários aparelhos*

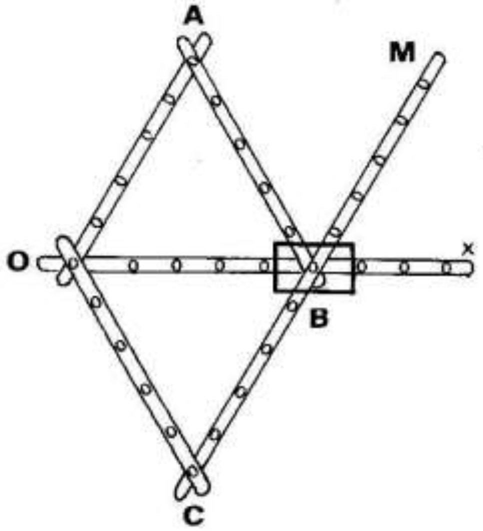
• Aparelhos para dividir um segmento de reta em segmentos proporcionais a números dados permite traçar paralelas eqüidistantes.



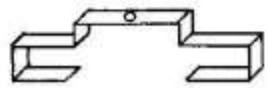


• Elipsógrafo: aparelho que permite o traçado de 1/4 de elipse.

Para este aparelho é preciso também da fabricação do cursor.



Constrói-se um losango articulado AOCB sendo que o lado CB será formado de uma barra mais comprida, de modo a possuir o prolongamento BM.

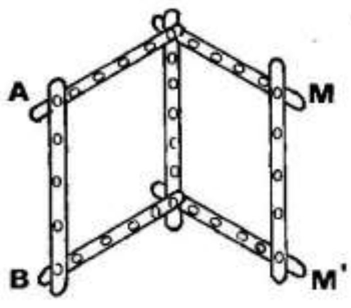


cursor B

O eixo $\overleftrightarrow{OX}$ é uma das diagonais prolongadas do losango. Munindo a articulação B de um cursor que permita ao vértice B deslisar sobre o eixo $\overleftrightarrow{OX}$, com uma ponta de lápis colocada em M, traçaremos um quarto de elipse.

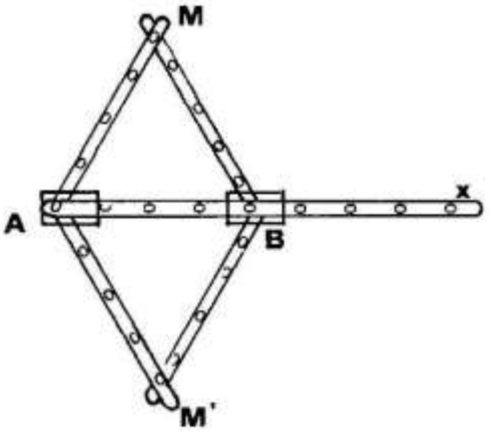
– *Aparelho para estudo das transformações*

• Translação: Translador de Kempe (duplo paralelogramo articulado)



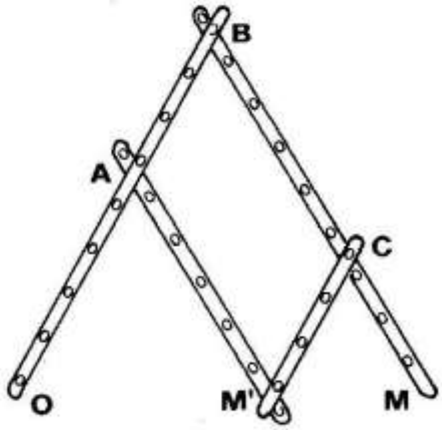
AB sendo fixo, M' será transformado de M, pela translação $\overrightarrow{AB}$.

• Simetria em relação a uma reta.



Construindo o losango ABMM' com dois cursores nos vértices A e B e fazendo deslizar os vértices mencionados sobre o eixo $\overleftrightarrow{OX}$, suporte da diagonal $\overline{AB}$, a cada posição de M teremos o seu transformado M' pela simetria em relação a reta $\overleftrightarrow{OX}$.

• Pantógrafo (aparelho que serve para reproduzir um desenho numa certa escala). Estudo das homotetias.



Seja a homotetia de centro 0 e de razão 2/3. Construamos o pantógrafo da seguinte maneira:

Consideremos como unidade de comprimento a distância entre dois furos consecutivos de uma mesma barra. Tomemos a barra OB de 24 unidades e OA de 16 unidades. Construamos o paralelogramo como na figura de modo que os pontos O, M e M' fiquem alinhados; para tal o segmento CM deve medir a metade de BC. Com o ponto 0 fixo e duas pontas de lápis, uma em M' e outra em M, fazendo o lápis em M descrever o desenho, o lápis em M' nos dará o desenho homotético na razão desejada.

Combinando estes 3 aparelhos básicos (que nos dão os 3 tipos de transformações) podemos estudar produtos de transformações e por meio de muitos exercícios chegarmos de uma maneira experimental à estrutura de grupo.

GEOPLANO

Existem dois tipos de geoplano:

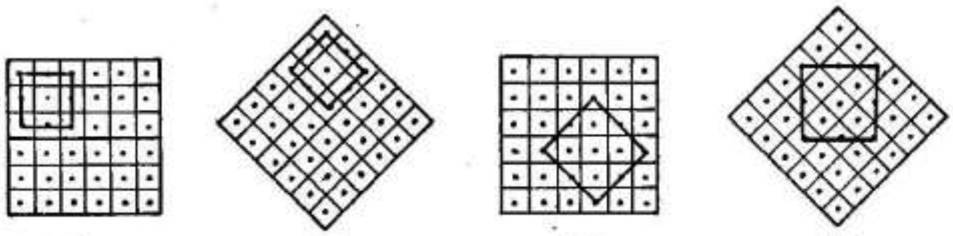
- Uma tábua sobre a qual estão pregadas taxas e traçado, em baixo relevo, um reticulado (com as taxas nos centros dos quadrados do mesmo).

- Uma tábua com taxas nos vértices de um polígono regular e outra no centro do polígono.

Em ambos os tipos, com elásticos de cores diferentes esticados e presos nas taxas, os alunos formam polígonos.

– *Aplicações do geoplano*

- Figuras geométricas: Os alunos do 1º ano ginasial sabem normalmente reconhecer uma figura geométrica simples (quadrado, retângulo, triângulos, paralelogramos, losango e outros) sempre que eles ocupem uma posição particular. Um quadrado, por exemplo, não é reconhecido se uma de suas diagonais for horizontal.



(1) (2) (3) (4)

Apresentamos aos alunos o geoplano na posição da figura (1) e perguntamos qual o nome da figura. A resposta de que é um quadrado é unânime.

Colocamos o geoplano na posição da figura (2) sem deslocar o elástico.

Repetindo a pergunta, alguns alunos responderão que é um losango.

Repetimos o movimento inicial várias vezes sem comentários.

Não precisamos intervir para que se crie na turma uma situação de debates com forte maioria a favor do quadrado.

Apresentamos uma nova situação (figura (3)) e perguntamos o nome da figura formada.

Teremos ainda alguns alunos respondendo que é um losango.

Colocamos o geoplano em uma outra posição (figura (4)) sem deslocar o elástico e repetimos a pergunta.

Só a esta altura passamos à pergunta: "por quê?"

As respostas farão aparecer uma definição correta do quadrado.

Nesta situação um professor habilidoso, aplicando vários outros exercícios, pode retirar o máximo das observações dos alunos.

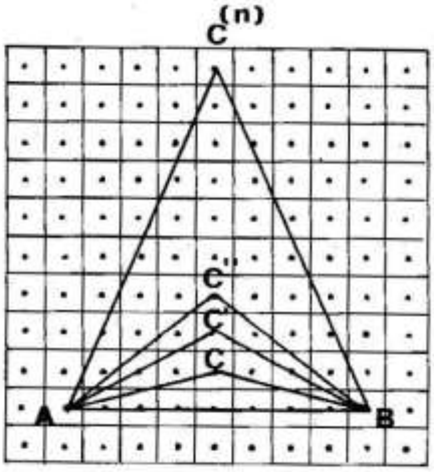
- Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

Queremos que os alunos fixem a sua atenção sobre os ângulos internos de um triângulo, que observem estes três ângulos e que esta observação seja espontânea.

Os ângulos, assim como os lados ou um elemento qualquer de uma figura, não são objeto de observação quando a figura é estática. A observação nasce desde que haja uma variação.

A comparação de dois ou mais triângulos, poderá fazer concluir que a medida de certo ângulo é maior ou menor do que a do outro, ou que alguns ângulos são congruentes. Mas trata-se de uma observação que não conduz a nada. Para que a observação seja construtiva no sentido matemático da palavra é preciso que se passe de um caso ao outro de uma maneira contínua. Um filme seria o ideal, mas, não sendo sempre possível este recurso, o geoplano ajuda bastante.

Coloquemos um elástico entre A e B e formemos os triângulos consecutivos ABC, ABC', ABC'', —— $ABC^{(n)}$: Façamos os alunos observarem todos os triângulos obtidos e escrever livremente suas observações.



Os alunos observarão com certa facilidade que a base é sempre a mesma, que a altura varia, que os triângulos são isósceles, que a área muda, que o perímetro muda e também que as medidas dos ângulos mudam. Observarão que enquanto a medida do ângulo do vértice diminui, as dos ângulos da base aumentam.

Repetindo várias vezes o movimento de baixo para cima e de cima para baixo, induzimos o aluno a pensar nos dois casos limites: o caso dos lados se tornarem paralelos e a medida do ângulo do vértice tender para zero e o caso em que a do ângulo do vértice tende para 180º.

Nesta altura fazemos novamente o aluno escrever suas observações. Muitos alunos concluirão que o que se perde num ângulo se ganha nos outros dois e que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo, será sempre igual à dos dois casos limites.

Isto acontecerá devido a uma característica do ser humano que faz com que ele deseje sempre encontrar algo constante.

Lembremos que os antigos gregos, os primeiros geômetras da humanidade, entre eles Zenão, ao quererem determinar a quadratura do círculo, julgaram ser sua área a média aritmética entre as áreas dos polígonos semelhantes, um inscrito e outro circunscrito. Eles também concluíram erroneamente, que o que se perde de um lado se ganha do outro.

No nosso caso presente este desejo de encontrar sempre algo constante é útil, pois, leva a uma conclusão verdadeira, não havendo necessidade do professor alertar o aluno de que este raciocínio através das situações limites, nos leva às vezes a erros, como no caso da quadratura do círculo e de outros.

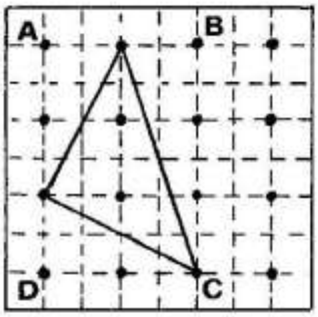
– *Áreas das figuras*

Formamos, com os elásticos, diferentes figuras que delimitam superfícies no geoplano. Adotamos por unidade de área a medida da superfície compreendida entre 4 taxas que sejam os vértices do menor quadrado possível.

Com esta premissa o professor poderá fazer exercícios que dêm oportunidade rápida de recapitulação das fórmulas relativas às áreas das figuras geométricas clássicas. Mas também, o que é mais importante, fará desenvolver no aluno faculdades importantíssimas na matemática que são: atenção e imaginação.

Para avaliar áreas o professor poderá instigar o aluno a usar outros processos além da aplicação de fórmulas como seja a decomposição do geoplano em partes menores a serem adicionadas ou subtraídas.

Por exemplo:

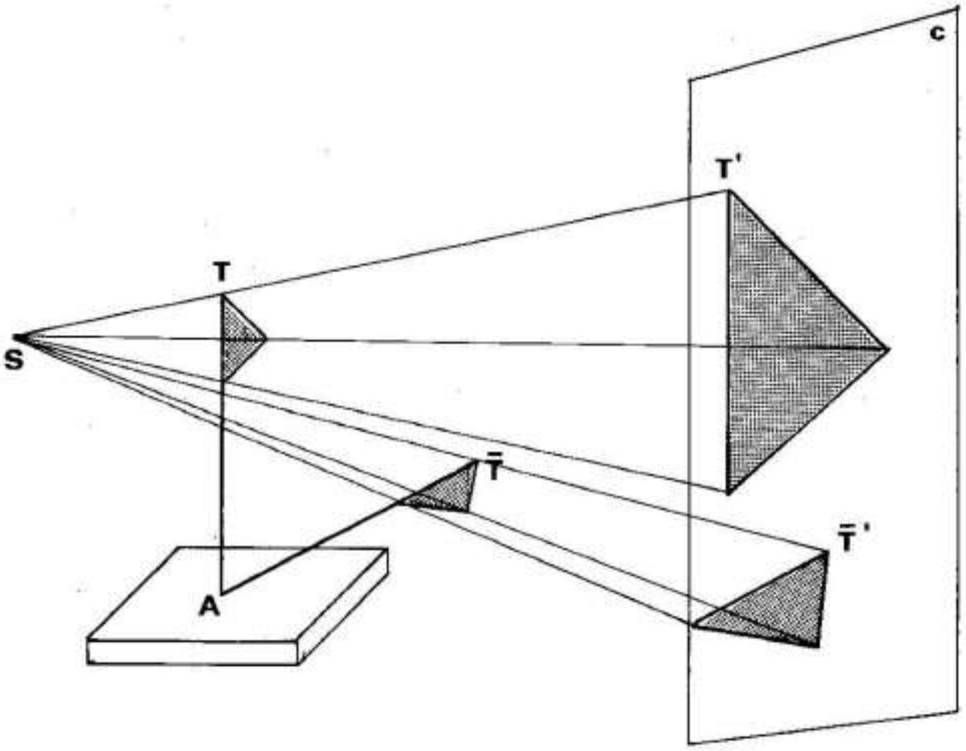


Para calcular a área do triângulo formado pelo elástico, o aluno pode calcular a área do retângulo ABCD e retirar as áreas excedentes.

Assim o aluno facilmente calculará: 6 quadrados – (1+1+1+1/2) quadrados = 5/2 quadrados.

OUTRO MATERIAL DIDÁTICO muito interessante é um aparelho de fácil construção que permite dar a noção de semelhança de triângulos.

O aparelho é constituído de uma lâmpada puntiforme S, colocada a uma certa distância de um anteparo c. Entre S e c coloquemos um triângulo de papelão T sustentado por uma haste contida no plano do triângulo e enfiada em A sobre um suporte horizontal de modo a poder girar em torno de A.



Em particular poder-se-á fazer girar a haste, no plano perpendicular ao anteparo.

O triângulo está fixado à haste de tal maneira que numa de suas posições possa ser paralelo ao anteparo. Na figura acima os triângulos T e T' são semelhantes (T paralelo ao anteparo) enquanto que o triângulo T e $\overline{T}$' não o são.

Pela descrição não se pode imaginar o quanto a observação das sombras do triângulo são sugestivas; estas sombras se deslocam e mudam de tamanho e de forma a medida que mudamos a posição da haste. Entre todas essas sombras há somente uma que possue a mesma forma que a do triângulo dado; sobre o anteparo há um só triângulo semelhante ao triângulo dado.

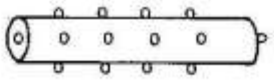
Em seguida passamos desta experiência qualitativa a uma experiência quantitativa, fazendo os alunos medir. Poder-se-á verificar que se T' tem a mesma forma que T, a cada ponto P de T corresponderá um outro ponto P' de T' que se encontra sobre a reta $\overline{SP}$ e tal que med. ($\overline{SP}$') = k. med. ($\overline{SP}$).

Como dissemos este aparelho serve para introduzir a noção de semelhança, pois só se pode chegar a uma definição através da observação e só se pode observar quando se começa por uma experiência.

A experiência à qual nos referimos permite ao aluno fazer um grande número de "descobertas matemáticas" e ao professor "observações psicológicas".

MONTE-PINOS

Para a introdução das diferentes bases de numeração usamos, com muito proveito no Instituto de Educação da Guanabara e em outras escolas, o jogo monte-pinos. Este jogo é formado de bastonetes cilindrícos todos do mesmo tamanho, munidos de um sistema de encaixe que permite sejam eles reunidos em 3 direções.



Cada bastonete representa uma unidade de 1ª ordem.

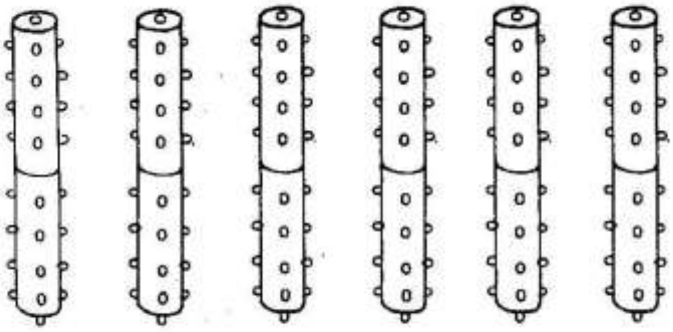
Damos a cada aluno uma quantidade de bastonetes e pedimos que sejam reunidos, de acordo com a base, no sentido longitudinal. Formam-se assim unidades de 2ª ordem, sob a forma de bastões mais compridos que o bastão unidade, todos do mesmo tamanho de acordo com a base dada. Provavelmente sobrarão bastões-unidades que não foram suficientes para formarem uma unidade de 2ª ordem. Estes serão reservados para serem computados no final.

Reunindo os bastões-unidade de 2ª ordem num dos outros sentidos, formaremos uma ou mais unidades de 3ª ordem, cujo aspecto é aproximadamente de uma tábua. Aqui também podem ou não sobrar bastões de 2ª ordem. Os que sobrarem serão reservados juntos com os de 1ª ordem remanescentes.

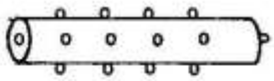
Repetimos a operação com as tábuas de 3ª ordem, formando aproximadamente paralelepípedos, que representam unidades de 4ª ordem.

Exemplo: Tomemos 13 bastonetes e escrevamos o número 13 na base 2.

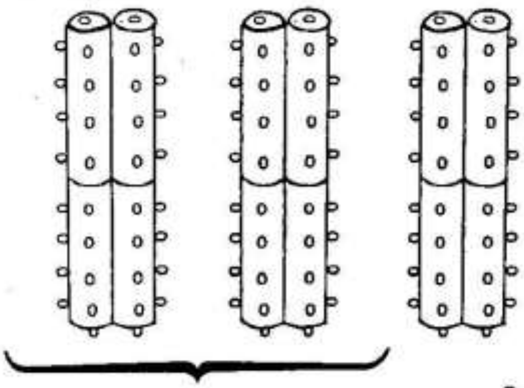
1ª etapa



Sobra:

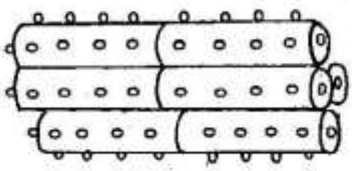


2ª etapa

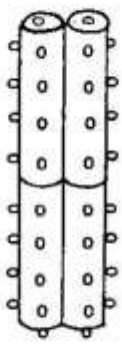


Não sobra nada

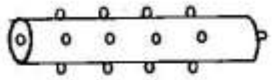
3ª etapa



Sobra



Sobrou



$13 = 1101_{(2)}$

Note-se que com este material não podemos ir além das unidades de 4ª ordem, mas isto é o suficiente para o aluno observar e tirar as suas conclusões depois de ter efetuado várias experiências.

AUDIO-VISUAL

Dentro das técnicas modernas surge com grande destaque o auxiliar audio-visual.

Desde longa data, todos aqueles que desejam transmitir ao público informações, utilizam-se dos meios audio-visuais. Aliás estes auxiliares são mais antigos do que a própria instituição da escola como organismo regular.

No Egito descobriu-se uma antiga inscrição que diz: "Quando os olhos vêem, quando os ouvidos ouvem, tudo chegará ao coração".

Um velho provérbio chinês afirma que: "Uma imagem vale por 5000 palavras".

Na idade média quando a linguagem escrita era bem pouco difundida os padres ensinavam religião ao povo por meio dos "mistérios", reproduções ao vivo de passagens da história sagrada.

Também os jesuítas na catequese dos índios do Brasil usaram o mesmo processo.

A rigor de termos, o próprio quadro negro e o giz poderiam ser considerados um recurso audio-visual, mas, devido a sua larga difusão, quando nos referimos aos auxiliares audio-visuais nos estaremos referindo a quadros murais, discos, filmes, retroprojetor, gravador, televisão etc. . .

A ciência já comprovou que para ouvirmos dois sons consecutivos nitidamente é preciso que haja entre um e outro um intervalo de 1/10 de segundo, enquanto que para vermos distintamente duas imagens basta que o intervalo seja de 1/23 do segundo. Isto quer dizer que o cérebro capta as impressões visuais 2 vezes e um terço mais depressa do que as auditivas. Isto não exclue a utilização da palavra no processo da aprendizagem. As duas técnicas devem vir sempre combinadas de uma maneira bem dosada.

Os alunos, na sua capacidade sensorial classificam-se em 3 tipos: visuais, auditivos e mistos.

O fato de que a maioria esmagadora pertença ao 1º tipo, não exclue que haja necessidade da explicação da imagem, pois, este 1º tipo é o grupo dos alunos que aprende melhor quando *vê também* e não quando *vê somente*.

* * *

Como já foi citado no artigo anterior, este artigo data de 1967. Muitas das técnicas descritas eram, na época, desconhecidas e hoje em dia são muito utilizadas, em particular as reguinhas de Cuisinaire. No artigo original descrevíamos o Ensino Programado hoje pouco apreciado por ser considerado adestrador.

TRANSLAÇÕES E SIMETRIAS NO PLANO

Estela Kaufman Fainguelernt
Noelir de Carvalho Bordinhão
USU – GEPEM

Ao Caro Mestre José Carlos de Mello e Souza

Hoje é o amanhã de ontem e o ontem de amanhã. Ontem desfrutávamos da companhia do querido mestre José Carlos de Mello e Souza e aproveitávamos suas intervenções sempre claras, simples e sábias. Hoje, cabe a nós levar adiante suas idéias e conselhos tentando passá-los aos nossos colegas e alunos.

Uma de suas constantes observações sempre nos vem à memória – "Aprender Matemática, dizia, é como aprender a nadar. Os movimentos necessários parecem simples a um observador. No entanto, para conseguí-los é preciso começar batendo os pés, depois os braços, treinar a respiração e o fôlego, também, às vezes, "engolir água", enfim exercitar-se progressivamente até poder flutuar e nadar com tranquilidade. Aquele que apenas observa e depois se atira na água, tentando imitar, certamente se atrapalha, se afoga ou fica com horror à água."

Nós estamos, cada vez mais, convencidas de que para aprender matemática é preciso "fazer matemática" gradativamente. Não podemos ficar restritos à mera aplicação de fórmulas e de resultados estabelecidos pois assim "afogaremos" nossos alunos. É fundamental partir da intuição, de dados concretos e experimentais, explorar as aplicações, desenvolver o raciocínio lógico para, só então, chegar aos processos de abstração e de generalização.

A geometria oferece um vasto campo de idéias e métodos que se prestam especialmente a este tipo de abordagem. As transformações do plano, por exemplo, podem ser introduzidas desde as primeiras séries do 1º grau; as crianças adquirem seus conceitos intuitivamente vivendo situações, executando movimentos e mexendo com figuras. A partir da 5ª série tais noções começam a ser organizadas, porém de forma elementar. Ao longo do 2º grau o aluno já é capaz de utilizá-las no estudo das funções, na construção de gráficos, no estudo dos vetores e das matrizes etc; ao final do 2º grau as transformações já podem ser tratadas na sua forma abstrata a qual fornece modelos matemáticos aplicáveis a outras áreas de conhecimento.

Exemplificando, e sem nenhuma pretensão de esgotar o assunto, apresentamos algumas atividades referentes a transformações do plano tiradas de nossa vivência em sala de aula. Selecionamos apenas duas delas: a *translação* e a *simetria*. Naturalmente as demais podem ser tratadas de maneira análoga. Com estes exemplos, pretendemos ilustrar três dos momentos da vida do aluno em que os mesmos conteúdos são abordados dentro do seu nível de desenvolvimento e capacidade de apreensão, sem perder de vista a conceituação matemática correta.

Iniciamos com o significado destas palavras na linguagem corrente, segundo o "Aurélio".

TRANSFORMAÇÃO – "É o ato ou efeito de transformar; metamorfose."

TRANSLAÇÃO – "É o ato ou efeito de transladar, de transportar. É o movimento de um corpo no qual todas as partículas têm, em cada instante, a mesma velocidade e esta mantém a direção constante."

SIMETRIA – "Correspondência em grandeza, forma e posição relativa, de partes situadas em lados opostos de uma linha, ou de um plano médio ou ainda que se acham distribuídas em volta de um centro ou eixo."

Podemos observar que as definições acima estão ligadas à idéia de movimento; o que as diferencia é a forma como esse movimento se processa. Assim, *antes de definições ou fórmulas,* o aluno deve perceber, assimilar e utilizar estas diferenças.

Exemplos de Atividades

ATIVIDADE 1

Nesta etapa o aluno é levado a adquirir intuitivamente as noções de translação e de simetria através de atividades, tais como:

- Realizar movimentos com o próprio corpo ou com objetos (carteiras, livros, esquadros etc.), deslocando-os ou colocando-os simetricamente e descrevendo verbalmente os movimentos efetuados.

- Identificar os movimentos de figuras.

Ex.: Observe as figuras e diga o que ocorreu na passagem da fig. 1 para a fig. 2.

a)

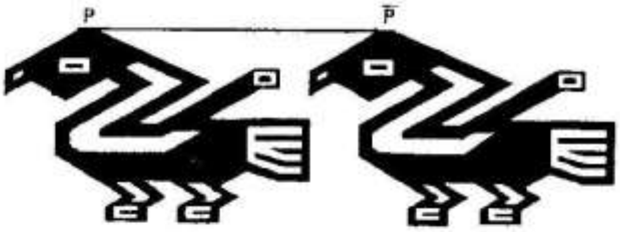


fig 1 fig 2

b)

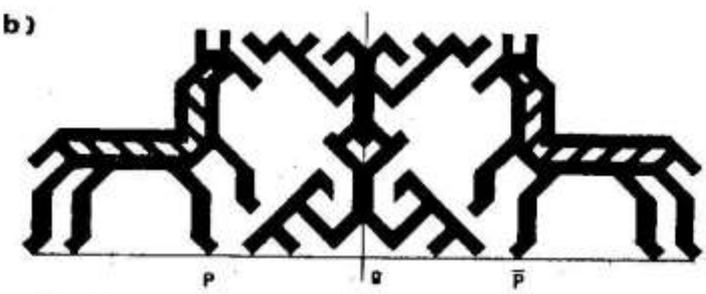


fig 1 fig 2

c)

fig 1

fig 2

d)

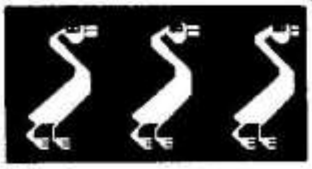
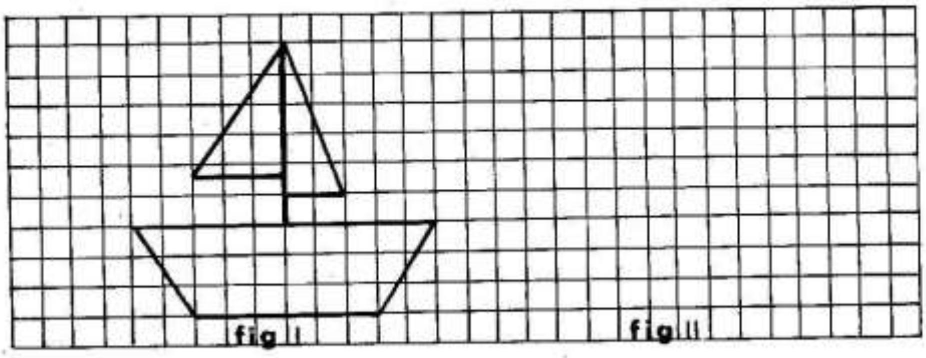


fig 1

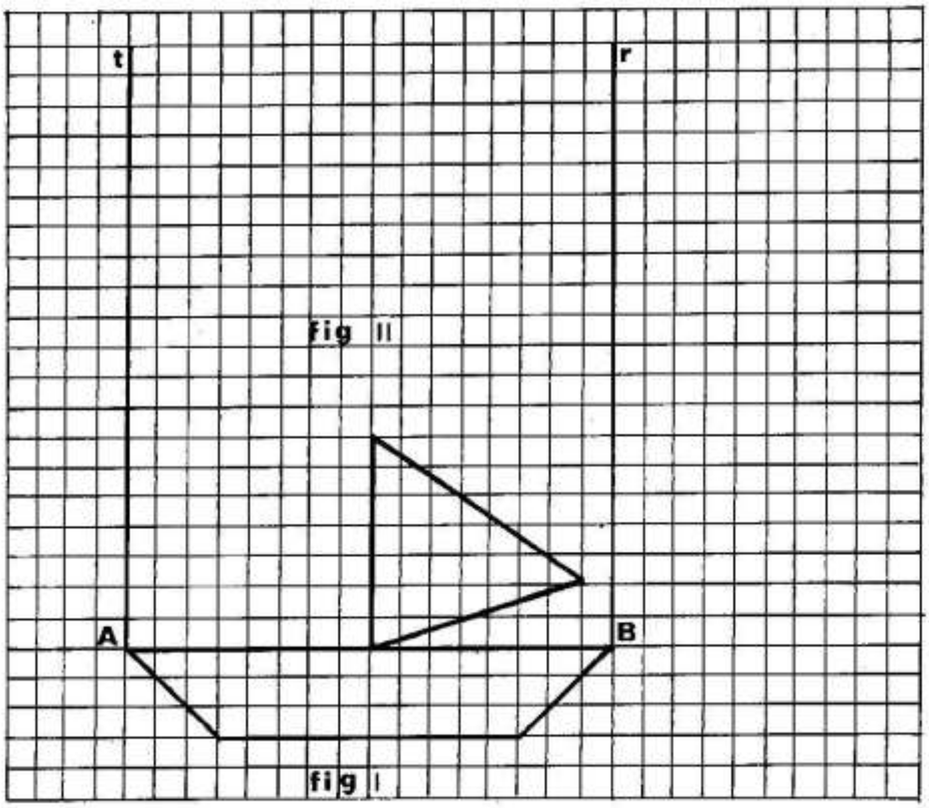
fig 2

- Reproduzir os movimentos, escolhendo e desenhando uma figura que represente o movimento identificado.

Ex.: (1) a) Reproduza, por translação, no espaço ao lado a figura I, obtendo a figura II:



(2) a) Observe a figura I abaixo:



b) Decalque em papel transparente a figura I e marque os pontos A e B.

c) Mantendo o decalque entre as retas r e t, desloque-o para cima e reproduza a figura no papel quadriculado (figura II).

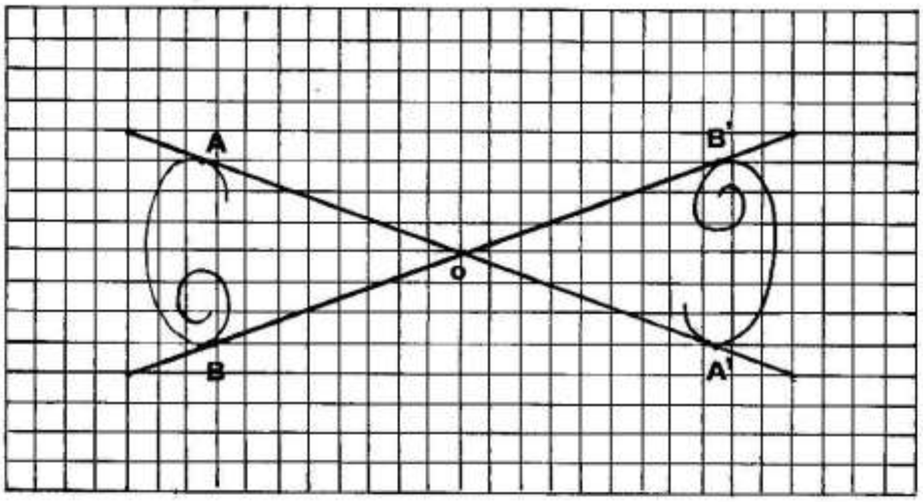
d) Compare as figuras I e II e determine:

- as semelhanças: ______________________
- se elas são do mesmo tamanho: ______________________
- se elas ocupam a mesma posição no plano: ____________

e) A figura II é uma transformada da figura I? ______ Por quê?

____

(3) a) Observe a figura abaixo:



b) Meça com a régua e complete:

- $m(\overline{OA})$ = ________________
- $m(\overline{OB})$ = ________________
- $m(\overline{OA'})$ = ________________
- $m(\overline{OB'})$ = ________________

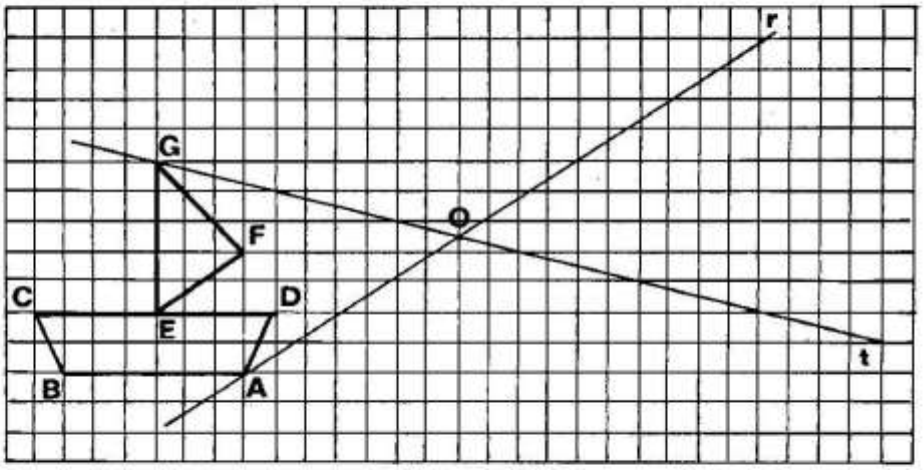
c) Compare as medidas utilizando > , < ou = :

- $m(\overline{OA})$ ________ $m(\overline{OA'})$
- $m(\overline{OB})$ ________ $m(\overline{OB'})$

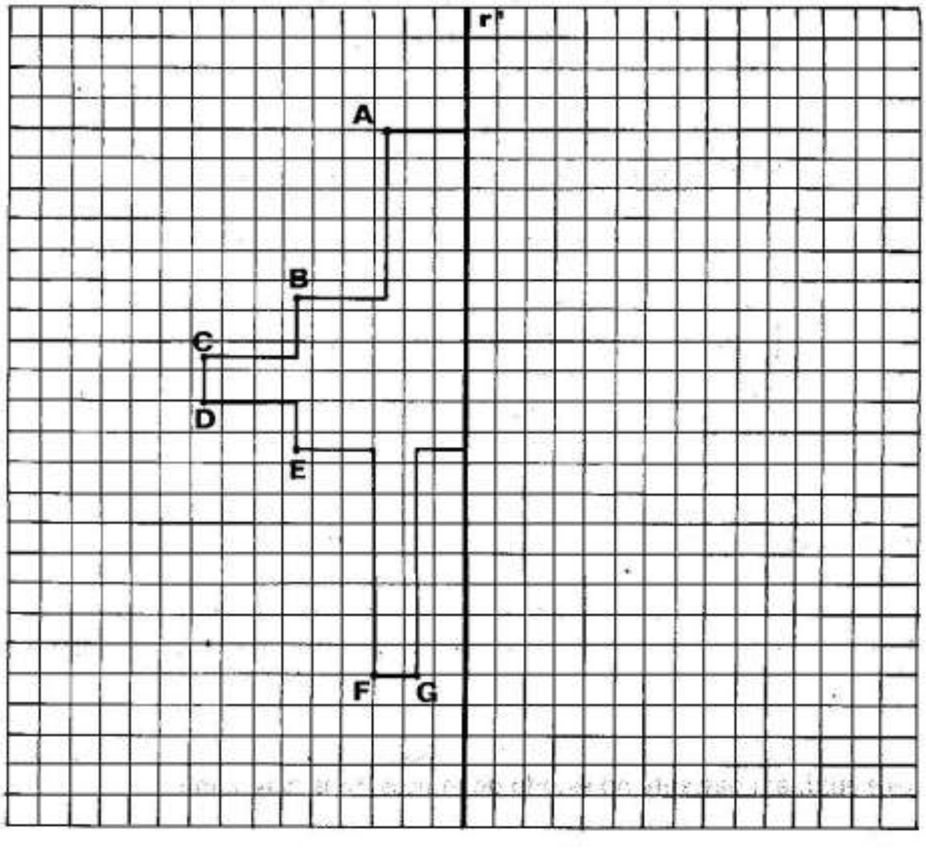
d) A transformação apresentada é uma simetria central?
Em caso afirmativo, indique o centro de simetria: ________

____

(4) Encontre os transformados das figuras abaixo, aplicando a simetria central, sendo **O** o centro de simetria:



(5) a) Observe a figura:



b) Complete a figura, construindo seu lado direito.

c) Indique os pontos, à direita da reta, correspondentes a **A, B, C, D, E, F** e **G**, respectivamente, e chame-os de **A', B', C', D', E', F'** e **G'**.

d) Meça com a régua os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{MA'}$. O que você conclui a partir dessas medidas? ________________________

e) Identifique outros pares de segmentos congruentes: ________

____

f) Qual a posição dos segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$ e $\overline{FF'}$ em relação à reta **r** ? ________________________

g) Os pontos **A, B, C, D, E, F** e **G** estão, respectivamente, à mesma distância da reta r que os pontos **A', B', C', D', E', F'** e **G'**? ________________________

Dizemos,então, que os pontos **A** e **A'**, **B** e **B'**, **C** e **C'**, **D** e **D'**, **E** e **E'**, **F** e **F'** e **G** e **G'** são *simétricos* em relação à reta **r**.

h) A figura à direita de **r** é uma transformada da figura à esquerda de **r** ? ________________________

i) Dobre a figura na reta **r** . As duas partes coincidem? ________

Simetria axial de eixo **r** é a transformação de pontos do plano em seus simétricos em relação à reta **r** .
A reta **r** é chamada *eixo de simetria.*

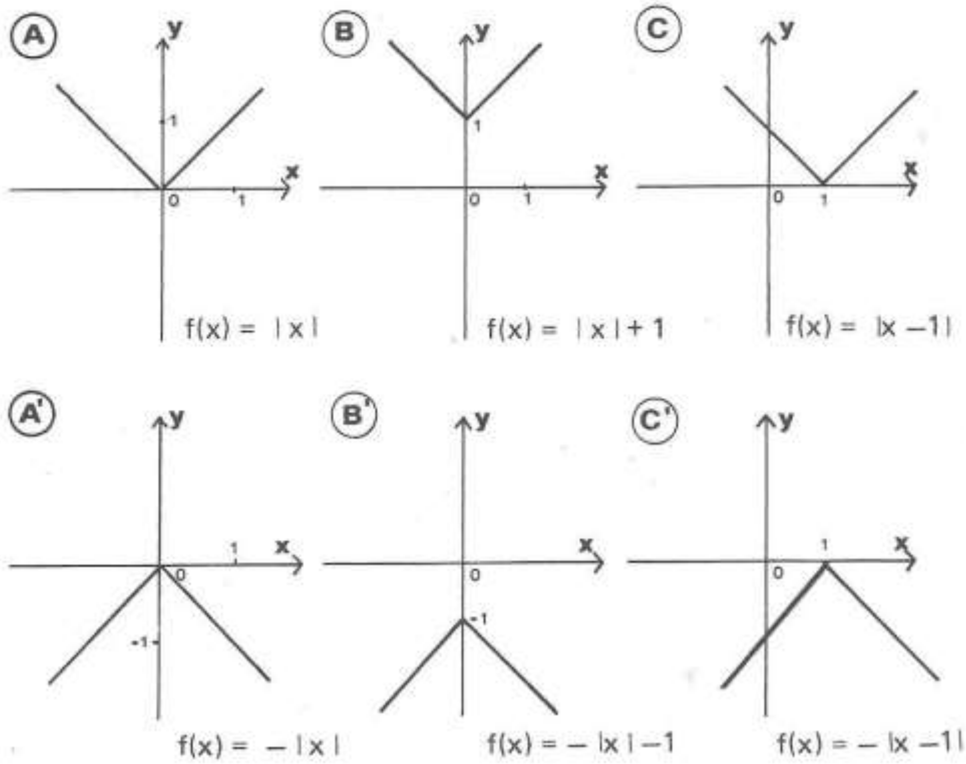
ATIVIDADE II

Nesta etapa o aluno já deve trabalhar organizadamente, mas ainda de forma elementar, com as noções adquiridas, transferir e aplicar estas noções a outros conteúdos.

Os conceitos de translação e/ou simetria estão freqüentemente presentes e auxiliam bastante no estudo de muitos itens, tais como:

- A congruência de figuras geométricas.
- A introdução do conceito de número inteiro.
- A construção e interpretação de gráficos de funções.

Ex.: a) Em cada par de gráficos abaixo, AA', BB' e CC', identifique a transformação:



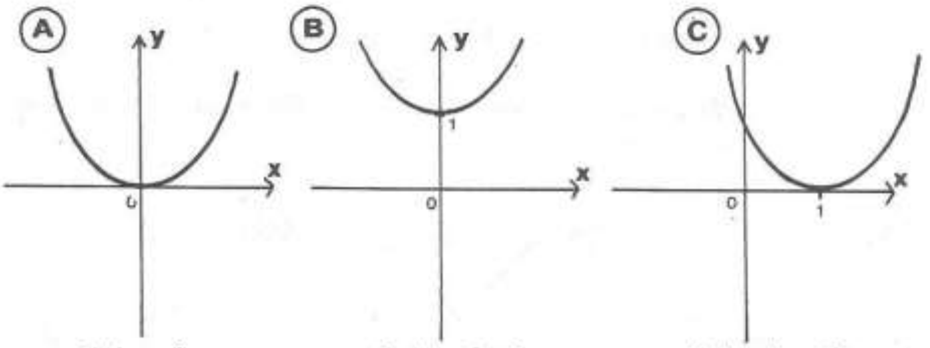
Resposta:

AA' ______________________

BB' ______________________

CC' ______________________

b) Quais as transformações sofridas pelos gráficos B e C em relação ao gráfico A?



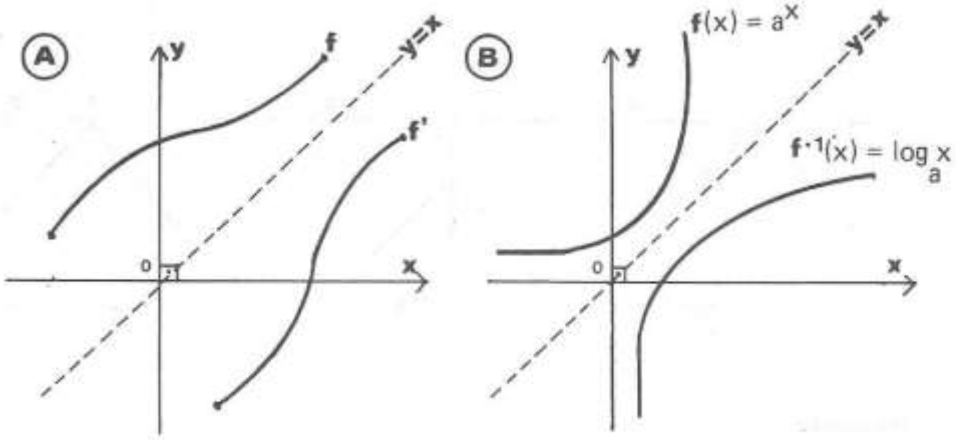
$f(x) = x^2$ $f(x) = x^2 + 1$ $f(x) = (x-1)^2$

Resposta:

B ______________________

C ______________________

c) Que transformação você identifica em A? E em B?



Resposta: ________________ Resposta: ________________

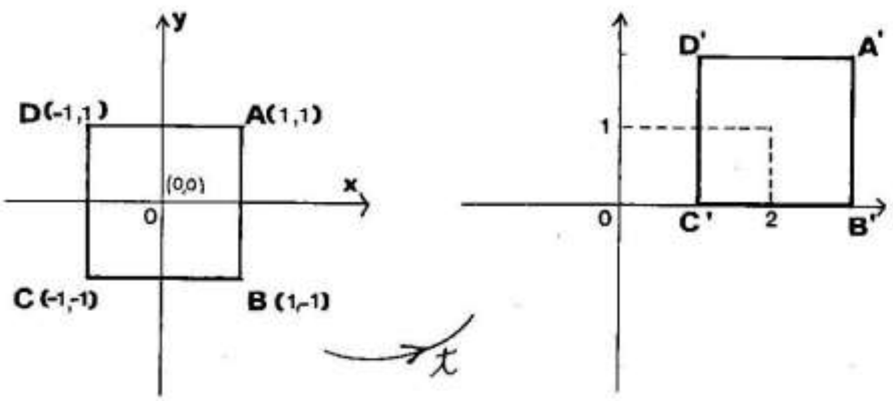
d) Determinar na reta r um ponto C tal que o percurso AC + CB seja o menor possível.

ATIVIDADE III

Nesta etapa, já no 2º grau, a translação e a simetria já podem ser gradativamente apresentadas na sua forma abstrata, como funções que transformam pontos do plano em pontos do plano. Este é o momento em que os conceitos e as propriedades características de cada transformação podem ser formalizados, de maneira natural, como conseqüência de todo o trabalho desenvolvido anteriormente, através de atividades tais como:

- Observar figuras e deduzir a lei da transformação efetuada bem como as suas propriedades.

Ex.: O quadrado A'B'C'D' foi obtido por translação do quadrado ABCD. O seu centro O' tem coordenadas (2,1). Determine as coordenadas dos vértices e a lei da transformação.



Resposta:

A' ( ), B' ( ),
C' ( ), D' ( ).

f(x,y) =

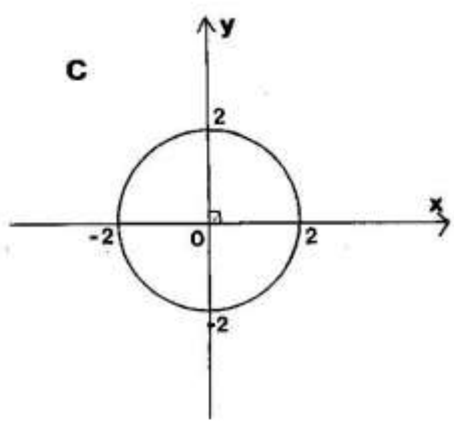
- Foram mantidas todas as características geométricas intrínsecas da figura original (ângulos, distâncias, áreas . . .) e tal propriedade é uma ISOMETRIA.

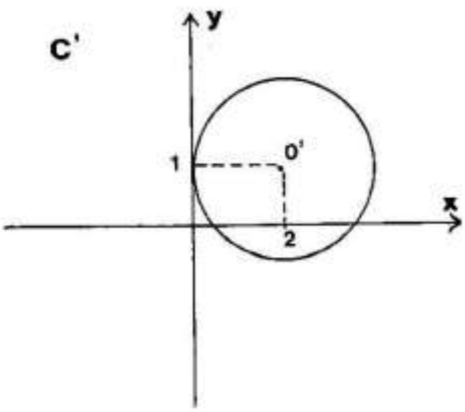
- Obter a equação da transformada a partir da lei da transformação.

Ex.: a) Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / (x,y) \mapsto (x+2, y+1)$ e

$C = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 4\}$. Escreva a equação de f(c).

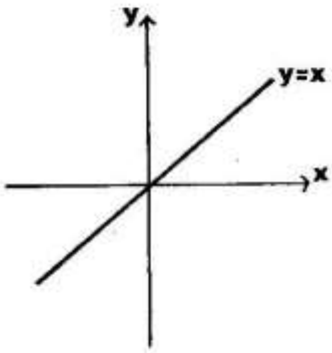
Resposta: ______________________________





b) Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / (x, y) \to (x + a, y + b)$ e $a, b \in \mathbb{R}$
e a reta $r : y = x$

Temos: $y - b = x - a$ ou $y = x + \underbrace{b - a}_{k \in \mathbb{R}}$



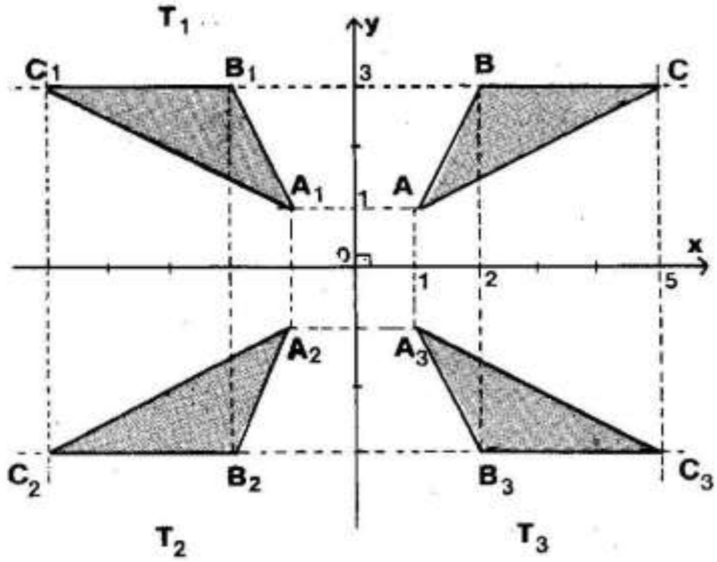
As transformadas da reta r formam uma "família" de retas $y = x + k$, $k \in \mathbb{R}$.

- Como será constituída esta família? ______________________________

- Indique no desenho alguns elementos desta família.

- Observar figuras e identificar simetrias centrais ou axiais, deduzindo as leis que as definem e destacando suas propriedades.

c) Os triângulos $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ e $A_3B_3C_3$ foram obtidos por simetria do triângulo ABC, onde A(1,1), B(2,3) e C(5,3). Identifique, em cada caso: o tipo da simetria, a lei que a define e as coordenadas dos vértices do triângulo transformado.



Resposta:

T_1: ______________________ T_2: ______________________

$T_1(x, y) =$ ______________ $T_2(x, y) =$ ______________

A_1 ( ), B_1 ( ) e C_1 ( ) A_2 ( ), B_2 ( ) e C_2 ( )

T_3: ______________________

$T_3(x, y) =$ ______________

A_3 ( ), B_3 ( ) e C_3 ( )

- Identificar, quando possível, a matriz associada a uma transformação e expressá-la através de um produto matricial.

d) Observe a figura do item C e escreva o produto matricial referente às transformações T_1, T_2 e T_3.

$T_1: \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

$T_2: \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

$T_3: \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

Gostaríamos ainda de acrescentar que, ao longo das atividades desenvolvidas, as propriedades, as diferenças, as analogias entre as transformações estudadas devem ser verificadas e enfatizadas a cada passo. Assim, como culminância deste trabalho, já na 3ª série do 2º grau, os alunos devem ser capazes de identificar as transformações que mantêm as características geométricas das figuras — ângulos, distâncias, áreas . . . (ISOMETRIAS). Devem também observar que as translações não podem ser expressas como um produto matricial, ou seja, não são TRANSFORMAÇÕES LINEARES.

Esperamos que esta sucinta amostragem de nossa experiência sirva de incentivo aos nossos colegas. Com ela quisemos passar a idéia de um processo de aprendizagem progressiva preconizado pelo nosso saudoso e inesquecível mestre José Carlos de Mello e Souza; adotando-o e aplicando-o estamos certas de que já ajudamos muita gente a "flutuar com tranquilidade" e alguns até a "nadar com desenvoltura".

Somos profundamente gratas ao nosso mestre e também aos nossos alunos e colegas que têm sido colaboradores importantes na nossa experiência. Continuamos aprendendo com eles e estamos abertas e receptivas às suas críticas e sugestões. O trabalho que cada um de nós realiza no dia-a-dia em sala de aula, deve ser sempre trocado e discutido pois ele é um agente transformador e enriquecedor na descoberta de novos caminhos para o ensino da Matemática.

AO NOSSO SAUDOSO MESTRE

José Carlos de Mello e Souza

Alunos da USU da última Turma por ele regida

Com o intuito de colaborarmos com esta pequena homenagem ao nosso saudoso mestre, nós, Carla Giovana da Silva e Claudia Loureiro, alunas da graduação em Matemática (atualmente no 6º período), tentaremos passar um pouco do pequeno convívio que tivemos com esta pessoa maravilhosa.

No 1º semestre do ano letivo de 1990, através da Profa. Franca Cohen Gottlieb, foram indicadas quatro alunas do Curso de Álgebra III, das quais apenas uma seria escolhida pelo Prof. Mello e Souza para auxiliá-lo com sua turma de Álgebra II (turno da tarde), prestando serviços de monitoria, os quais serão descritos adiante. Dessas alunas, Carla, Claudia, Daniela Mortari e Madalena Vieira, com a impossibilidade de duas, devido ao horário, ficamos apenas nós. Mas como o Prof. sentiu-se sem o "mérito" de julgar-nos, acabamos entrando num acordo. Já que o objetivo deste trabalho era ajudar a turma uma vez por semana, horas antes de sua aula, na resolução de suas "folhinhas" de exercícios, decidimos que cada semana ficaria uma. Após termos apresentado ao professor nossa proposta, ele teve um pouco de dificuldade, pois não conseguia compreender como ele faria o "contrato" com uma monitora, já que no decorrer do período ele conviveria com duas. Mas concluiu que era melhor pensar que Carla e Claudia eram uma só pessoa. Logo no primeiro dia ele nos mostrou a ementa do curso e algumas "folhinhas" de exercícios que seriam resolvidas posteriormente. Mostrou-nos também sua exemplar conduta profissional, seu jeito metódico de organizar as coisas, sua assiduidade e principalmente seu grande carinho para com os alunos.

Apesar do tempo ter sido pequeno, mais ou menos 2 meses, este trabalho foi muito bom, muito enriquecedor. Fez com que adquiríssemos novos conhecimentos de Álgebra (matéria da qual particularmente gostamos muito) e além disso, passamos a conhecer e a conviver melhor com alguns colegas do curso de Matemática. Inclusive, foi daí que surgiu o "casal 20" do curso de Matemática: Claudia e Luiz.

Como este trabalho auxiliou muito os alunos e teve a aprovação do professor, era de seu agrado que este tivesse uma continuidade no semestre seguinte. Vê-se então a grande importância deste tipo de trabalho acadêmico. Este vínculo aluno-professor-monitor, é altamente válido, ao ponto que surge um ciclo vicioso, onde, a troca de conhecimentos é mútua. Mas não foi possível que isto se concretizasse. Após um breve contato com o professor, já no início do segundo semestre em 1990, soubemos por parte dele, que o curso de Álgebra III não seria ministrado por sua pessoa, já que os horários ficaram muito inconvenientes. Para ele, não seria possível dar uma aula no primeiro horário do turno da tarde (quando os alunos não conseguem acertar seus relógios e chegar na hora certa) e no último horário do dia posterior (horário em que os alunos já estão super dispersos, cansados). Mas o professor nos prometeu que no próximo ano, ele estaria firme e forte, dando continuidade ao que ele mais gostava: ENSINAR. Pena que ele não pôde cumprir com sua promessa.

O importante é que disto tudo pudemos tirar e continuamos a tirar grandes lições e sobretudo experiências que nos acompanham dia-a-dia. O Prof. Mello e Souza não foi apenas um mestre que passou por nossas vidas, mas sim um amigo, um GRANDE AMIGO que sempre teremos em nossa companhia e com quem poderemos contar esteja ele onde estiver.

As "folhinhas"

Tentamos reunir aqui, algumas de suas "folhinhas", exercícios passados em aula.

Muitas delas contavam como presença. Ele as recolhia no final da aula e podia verificar a partir destas, quais os alunos que tinham comparecido.

1. Em $\mathbb{R}$ a operação T assim definida $aTb = a+b-1$ é associativa?
2. Em $\mathbb{R}$ a operação média aritmética, $*$, ou seja $a * b = \frac{a+b}{2}$ é associativa?
3. Consideremos em $\mathbb{Z}$ as operações + e T, sendo T assim definida

$aTb = a^2b$. A operação T é distributiva à esquerda em relação a + ? E à direita?

4. Dê cinco partes de $\mathbb{R}$, que não sejam um singleton, fechadas para a operação x.

5. Estude a existência de elemento neutro nos conjuntos (e respectivas operações) abaixo:

   5.1. $(\mathbb{Z}, *)$, $a * b = a + b^2$

   5.2. $(\mathbb{Q}, \square)$, $a \square b = ab + a^2(b-1)$

   5.3. $(\mathbb{Q}, T)$, $aTb = 2a + b$

6. Diga se em $\mathbb{R}^+$ a operação média geométrica, $a \square b = \sqrt{ab}$, é associativa.

7. A operação $\perp : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \perp y = y$, possui neutro?

8. Supondo $E \neq \emptyset$:

   8.1. O neutro para a operação $\cap$ em $\mathcal{P}(E)$ é ....

   8.2. O neutro para o operação $\cup$ em $\mathcal{P}(E)$ é ....

9. Em $\mathbb{R}$ o elemento O é .... para a operação x. Em $\mathcal{P}(E)$ o elemento E é absorvente para a operação .... e o elemento $\emptyset$ é absorvente para a operação ....

10. Em $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \xrightarrow{T} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, temos, por definição de T, $(a,b)\ T\ (c,d) = (ac, ad + b)$.

    10.1. Calcule $(-2,5)\ T\ (3,4)$
    10.2. Diga se a operação T é associativa
    10.3. Diga se a operação T é comutativa
    10.4. Diga se a operação T admite neutro e, se o admitir, qual é esse neutro e qual o simétrico de (a,b)
    10.5. Complete $U_T(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}) =$ ________________
    10.6. $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, T)$ tem a estrutura de ____________________

11. Demonstre que em um grupo $(G, \square)$ o simétrico de um elemento $\mathbf{x} \in \mathbf{G}$ é único.

12. A operação $*$ definida em $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$a * b = a^b$, $0^0 = 1$.

12.1. Pode ser estendida a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? Por quê?

12.2. Pode ser estendida a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$? Por quê?

12.3. Pode ser estendida a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$? Por quê?

13. Não há, em homenagem aos superticiosos.

14. Se $A = \{1, 2\}$, $S(A) = \{e, a\}$, sendo $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. O grupo $(S(A), o)$ é comutativo?

15. Se $B = \{1, 2, 3\}$ então $S(B) = \{e, a, b, c, d, f\}$ onde $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \dots,$ $(S(B), o)$ é comutativo?

16. Se $C = \{1, 2, 3, 4\}$ o conjunto $S(C) = \{e, a, b, \dots\}$ quantos elementos possui?

17. Se $X = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ o grupo $S(X) = \{e, a, \dots,\}$ quantos elementos possui?

18. O conjunto dos números decimais $S = \left\{ \dfrac{a}{10^n} \ / \ a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$ é um subgrupo de $(\mathbb{Q}, +)$?

$S - \{0\}$ é uma parte estável de $(\mathbb{Q}^o, \times)$?

$S - \{0\}$ é um sub-grupo de $(\mathbb{Q}^o, \times)$?

19. Sejam $(S_1, *)$ e $(S_2, *)$ dois sub-grupos de $(G, *)$. Prove que $S_1 \cap S_2$ é um sub-grupo de $(G, *)$. Prove que $S_1 \cup S_2$ não é um sub-grupo de $(G, *)$, através de um contra-exemplo.

20. Verifique se $\left(\left\{ 1, \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}, \times \right)$ é um grupo abeliano.

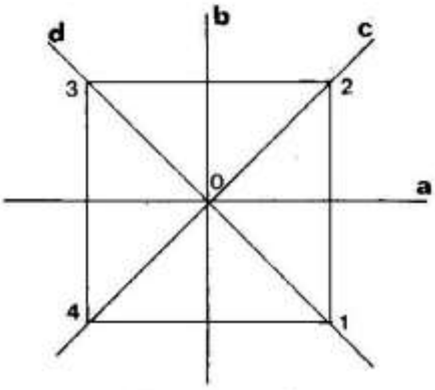
21. A aplicação f de $(\mathbb{R}_o, \times)$ em $(\mathbb{R}_o, \times)$ em que $f(x) = x^2$, é um endomorfismo ou um automorfismo?

22. Mostre que o grupo cíclico finito $[-i]_{\times}$ é isomorfo do grupo ($\mathbb{Z}_4$, $\oplus$).

23. Os grupos ($\mathbb{Z}_6$, $\oplus$) e ($\mathbb{Z}_7^0$, $\otimes$) são isomorfos?

24. O conjunto $\{\overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}\}$ de classes residuais mod. 15 munido da operação $\otimes$ é um grupo?

25. Se a resposta de 24 for afirmativa, pergunta-se: qual o seu neutro? qual o simétrico de $\overline{3}$? qual a o ($\overline{9}$)? qual a o ($\overline{12}$)?

26. 

Considere o quadrado de vértices 1, 2, 3 e 4. Os deslocamentos que aplicam este quadrado nele mesmo são dados pelas seguintes aplicações: *simetrias* de eixos a, b, c, d. *rotações* em torno do ponto O, no sentido horário, de amplitudes $e = 0^{\circ}$, $\alpha = 90^{\circ}$ $\beta = 180^{\circ}$ $\gamma = 270^{\circ}$ mostre que estas 8 aplicações formam um sub-grupo do grupo simétrico do quadrado (grupo simétrico) sobre ($\{1, 2, 3, 4\}$).

o	e	α	β	γ	**a**	**b**	**c**	**d**
e								
α								
β								
γ								
a								
b								
c								
d								

Uma pesquisa interessante

Pesquisa da associatividade de um grupoide (G, $*$)

Seja (A, $*$) um grupoide, onde $A = \{a, b, c, \ldots, n\}$. Chamemos S_a uma aplicação de A em A assim definida:

$$\text{Se } a \in A, \forall x \in A, S_a(x) = a * x$$

Chamemos $\overline{A}$ o conjunto das S_a ou $\overline{A} = \{S_a, S_b, \ldots\}$

Dotemos o conjunto $\overline{A}$ da operação **o** (composição de elementos do conjunto $\overline{A}$).

Seja f a aplicação de (A, $*$) em ($\overline{A}$, **o**) seguinte: $f\colon\ a \rightarrow S_a$

Se a aplicação f for um isomorfismo, a operação $*$ em A é associativa, pois sabemos que a operação **o** em $\overline{A}$ é associativa. Temos o seguinte TEOREMA: *A operação $*$ em A é associativa se f for um isomorfismo de (A, $*$) em ($\overline{A}$,* **o***).*

Se f for um isomorfismo, a operação $*$ é associativa em A, pois **o** é associativa em $\overline{A}$. Resta provar que se a operação $*$ for associativa em A, f é um isomorfismo de (A, $*$) sobre ($\overline{A}$, o). Partamos, pois, da hipótese que $*$ é associativa em A.

Se (A, $*$) é um grupoide, então se $a \in A$ e $b \in A$ então $(a * b) \in A$.

Ora, por definição, temos: $\forall x, x \in A$, $S_{a*b}(x) = (a * b) * x = a * (b * x) =$

$S_a(b * x) = S_a(S_b(x)) = (S_a o S_b)\ (x)$.

Então $S_{a * b} = S_a o S_b$, isto é a imagem do composto $a * b$ é o composto pela operação **o** das imagens S_a e S_b e o homomorfismo de f fica evidente. Sendo f bijetora, será então um isomorfismo.

QUESTIONÁRIO

Este questionário foi aplicado pelo Prof. Mello e Souza no 1º dia de aula de Álgebra II, com o objetivo de conhecer melhor os hábitos de estudo de seus alunos.

UNIVERSIDADE SANTA ÚRSULA

Curso de Matemática: disciplina "ÁLGEBRA II"

HÁBITOS DE ESTUDO E/OU ATITUDES EM CLASSE

Questionário sobre hábitos de estudo e/ou atitudes em classe

	Freqüentemente	Às vezes	Quase nunca
01. Um livro texto não me agrada, pois não gosto de estudar em livros. Acho-os enrolados e complicados.	0	3	5
02. Prefiro minhas notas de aula, apostilas ou notas de colegas.	3	2	1
03. Consigo manter minha atenção concentrada no que estou estudando.	4	4	1
04. Os intervalos de tempo que destino ao estudo são pequenos.	3	4	2
05. Os intervalos de tempo que destino ao estudo são mal aproveitados por mim. Tudo serve para me distrair e afastar minha atenção do meu propósito de estudar.	2	2	5
06. Quando estudo acompanhado aproveito mais que quando estudo só.	1	4	4
07. Boa parte do meu tempo livre é gasto em ver televisão.	0	3	6
08. Gasto tempo em conversas inúteis ou em outras atividades dissipativas.	0	3	6
09. Deixo para estudar quando já estou cansado, com sono e com possibilidades mínimas de me concentrar.	0	0	(100%) 9
10. Reservo meu horário certo, por dia ou por semana, para estudar e manter em dia a matéria que vem sendo dada.	3	4	2

11. Só estudo na véspera da prova. Deixo tudo para última hora, por não dividir inteligentemente o tempo de estudo e de lazer.	0	5	3
12. Recorro ao professor sempre que me deparo com dificuldade que não consigo vencer.	3	4	2
14. Para aumentar meu domínio e segurança no que estou estudando: Procuro em meu estudo ir além do que foi dado em aula. Procuro abordar, num enfoque diferente, o que está sendo dado.	1	4	3
15. Esforço-me por resumir, sintetizar e arrumar o que foi ensinado, fixando e realçando os pontos importantes, como quem prepara os alicerces de um edifício a construir.	7	1	1
16. Tenho consciência que, por vezes, me faltam conhecimentos básicos (em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria, etc) e procuro sanar tais lacunas visando todos os recursos ao meu alcance.	3	5	0
17. Minhas atividades na Universidade ou fora dela estranhas ao curso tomam-me tempo e atenção, prejudicando meu estudo regular.	0	4	5
18. Recorro ao professor quando deparo temas que não entendi e não tenho como esclarecer.	3	3	3
19. Consigo bem caracterizar a matéria que está sendo dada e quais os seus pontos decisivos.	3	5	0
20. Consigo vencer as dificuldades surgidas quando o professor usa palavras novas, e incorporo-as com facilidade à minha linguagem habitual.	5	2	1
21. Luto para manter minha atenção concentrada no trabalho em classe. Minha imaginação começa a divagar e acabo por me alheiar inteiramente do tema que está sendo abordado.	2	5	2
22. Participo com interesse dos exercícios e tarefas, individuais ou em grupo, dados pelo professor durante a aula.	7	2	0
23. Perco partes importantes de uma aula por querer tomar nota de tudo, inclusive de pontos que depois verifico que eram irrelevantes ou secundários.	1	3	4
24. Gosto de conversar com os colegas vizinhos e acabo por perder a seqüência do que está sendo abordado.	1	5	3

25. O fato de não gostar de certos professores e/ou certas matérias prejudica minha aprendizagem.	1	5	3
26. Tenho dificuldade em caracterizar claramente os pontos decisivos da matéria que estou estudando.	0	5	3
27. Só consigo estudar quando estou com uma disposição especial, sem a qual todo esforço que faça me parece inútil.	0	3	5
28. Meus períodos de estudo são muito curtos e, quando consigo atingir certo grau de concentração, já estão terminados.	0	4	4

OBS.: Só 9 alunos devolveram o questionário.

DEPOIMENTOS DOS ALUNOS

Como o professor era muito democrático e gostava que as coisas corressem de forma justa, antes de dar qualquer nota definitiva aos seus alunos, ele lhes pedia, após ter sido feita a correção das provas, que eles mesmos se avaliassem e se dessem uma nota. A partir desta, ele tirava a sua nota final.

Muitas vezes, após a correção, gostava que seus alunos fizessem observações (críticas) a respeito de suas provas.

Auto-avaliação de alguns alunos após a primeira prova
(crítica da prova)

Mestre,

A correção da prova foi perfeita, eu é que não dediquei tempo suficiente para fazer uma boa prova. Já refiz a prova e já estou me dedicando mais a álgebra.

Obrigado,
Tânia

A prova não estava difícil, estava bem elaborada e trabalhosa.

Eu errei questões por falta de atenção. Eu me distraio à toa.

Angélica

Como toda crítica tem seu lado positivo e seu lado negativo, comecemos pela melhor parte. Por um lado, a prova estava simples e bem dentro do esquema de exercícios que estávamos acostumados a fazer, porém estava longa e trabalhosa. Por outro lado, não sei se não compreendi bem mas, foi dito que era possível se errar uma questão e ainda tirar nota 10. No meu caso, não tirei zero em nenhuma das questões, embora tivesse sido descontada, do total de pontos da minha prova, uma questão que, mesmo sendo a de menor valor, me surpreendeu. Não estava ciente de que uma questão da prova seria descartada. Isso me prejudicou, pois em vez de completar todas as questões, uma vez que o tempo era curto, perdi tempo fazendo uma questão trabalhosa que não me trouxe resultados.

Andréia Martins Hamerski

DEPOIMENTOS SOBRE O PROFESSOR

O professor Mello e Souza em seu primeiro dia de aula na turma de Álgebra I do 2º semestre de 1989, se apresentou, deu a bibliografia que seria usada no curso e começou o seu curso, com sua calma e paciência que eram suas principais características. Explicou como era o seu jeito de dar aula e disse que, se um dia ele se atrasasse mais de 10 minutos, que poderíamos ir embora porque ele não viria. Ele era realmente assim. Geralmente chegava antes da hora e jamais se atrasava.

Ele era o tipo de professor que gostava de chamar os seus alunos para resolverem exercícios no quadro negro. Na primeira vez em que fez isso ele falou mais ou menos assim:

Prof.: "Gostaria que você (apontando o dedo para um aluno) fosse ao quadro resolver este exerício".

Este aluno não quis ir e ele foi perguntando um a um, todos recusaram, até que ele chegou em mim e eu fui fazer o exercício. Fiz e ele me parabenizou por estar correto e pela rapidez com que eu fiz o exercício. Aí ele explicou para o resto da turma e a aula seguiu adiante.

Na segunda vez em que fez isso foi a mesma coisa, o professor ofereceu o giz a todos, estes recusaram e eu aceitei ir ao quadro. E assim foi se repetindo até que chegou um dia no qual ele ofereceu o giz direto a mim, pedindo para ir ao quadro.

No final do curso de Álgebra I, eu ia ao quadro todas as aulas e ele com sua paciência, atenção e carinho para com todos procurava dar atenção e explicação a todos quantas vezes fossem necessárias.

No primeiro semestre de 1990, tive o prazer de saber no primeiro dia de aula que seria ele o professor do curso de Álgebra II. A turma era praticamente a mesma, apenas com alguns acréscimos. Já no início do curso de Álgebra II, ele já não oferecia o giz a mais ninguém, somente a mim. Isto às vezes me deixava constrangida, mas ele tratava logo de explicar a turma, que ele fazia isto pois sabia que eu ia ao quadro sem problemas, enquanto que os outros sempre se recusavam. Nesse semestre aconteceram aulas nas quais eu passava quase que a aula inteira ajudando-o e isto fez com que eu me aproximasse muito dele e sentisse uma admiração cada vez maior por ele. Ele sabia perceber se algum aluno estava mais triste ou mais alegre, nervoso ou não e sabia compreender.

O professor Mello e Souza não poupava esforços para fazer com que todos os seus alunos entendessem a matéria. Repetia a explicação quantas vezes fosse necessário, preparava exercícios para casa, dava aulas de revisão antes de uma prova e ficava triste quando alguns dos seus alunos tiravam notas muito baixas. Sempre fez de tudo pelo aluno, com muito amor, carinho e dedicação. Conhecia todos pelo nome e jamais passava sem cumprimentar. Se faltássemos a aula, na aula seguinte ele se lembrava e, às vezes, fazia um resumo da aula anterior para que o faltoso não ficasse "perdido" na aula. Entre nós, os alunos, ele era chamado carinhosamente, de **vovô.**

Uma declaração mais particular

Sempre fui da opinião que o professor contribui bastante para que o aluno goste ou não da matéria. Então não saberia dizer se foi pelo professor Mello e Souza, ou se foi por um interesse natural, meu ou pela soma dos dois, mas atualmente uma das matérias que eu mais gosto é Álgebra. Gosto de estudar, ler sobre ela, enfim tenho um interesse muito grande pela matéria.

Eu senti muito a morte do professor Mello e Souza, pois tinha e tenho um carinho muito grande por ele e sei que ele também o tinha por mim. Com o fato de eu ajudá-lo muito em suas aulas, isto nos aproximou, eu era aquele ponto de referência. Lembro-me de uma aula que ao acabar de explicar uma determinada matéria eu disse a ele que não tinha entendido di-

reito, e se ele poderia explicar novamente, e ele respondeu:
Prof.: "Se a Ângela não entendeu é porque eu realmente não me expressei bem".
Parou uns minutos, pensou e falou.
Prof.: "Tentarei ser mais claro" e recomeçou a explicação.

Lembro-me desta aula como se fosse hoje. Citei alguns exemplos, mas teria muitos outros a relembrar. Nessas horas ele conseguia me deixar realmente sem graça diante da turma, mas ele era assim e era assim que todos nós gostávamos dele.

Ângela Bonifácio Matos

É impossível falar tudo sobre o prof. Mello e Souza, e por mais que tentemos enumerar vários adjetivos — qualificadores, seria um crime, pois, por mais que enumeremos, ainda assim, estaria sempre faltando, formando uma lacuna que nunca seria preenchida, para qualificar o ser humano incrível que foi este professor.

Sinto-me orgulhoso de ter sido seu aluno e poder testemunhar nesse meu relato toda a minha admiração por tudo que ele foi para mim e, poder agradecer "a tudo" o que foi possível extrair de positivo deste tão glorioso mestre.

Obrigado mestre,
Luiz Antônio Gomes Leme

"Por algumas coisas: desculpe-me,
Por outras: obrigado".

Claudia Loureiro

CÁLCULO NUMÉRICO DA RAIZ QUADRADA

José Paulo Q. Carneiro
IBGE/ENCE
Pós-Graduação – USU/GEPEM

1. O Processo Iterativo Básico

Imaginemos que se disponha de uma máquina de calcular, capaz de fazer apenas as "4 operações": adição, subtração, multiplicação e divisão de números reais. Com esta máquina, como calcular a raiz quadrada de um número positivo dado M?

Para fixar idéias, suponha inicialmente que tenhamos uma aproximação por excesso de $\sqrt{M}$, digamos a. Na realidade, a é um "chute" positivo qualquer, desde que $a^2 \geq M$. Se a fosse exatamente igual a $\sqrt{M}$ (neste caso, o problema estaria resolvido com o "chute"), teríamos $a^2 = M$, isto é, $M/a = a$. Como, porém, $a \geq \sqrt{M}$, o que acontecerá com M/a? Observe o cálculo:

$$a \geq \sqrt{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} \leq \frac{1}{\sqrt{M}} \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{a} \leq \frac{M}{\sqrt{M}} = \sqrt{M}$$

Isto é: *se a for uma aproximação por excesso de $\sqrt{M}$, então M/a será uma aproximação por falta de $\sqrt{M}$.*

O fato de que $\sqrt{M}$ está entre M/a e a sugere que a média aritmética entre estes dois números, isto é, $\frac{1}{2}\left(a + \frac{M}{a}\right)$, seja uma aproximação de $\sqrt{M}$ melhor ainda do que o "chute" inicial a. Será porém esta outra aproximação por falta ou por excesso? Acompanhe o cálculo:

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{M}{a}\right) - \sqrt{M} = \frac{a^2 + M - 2a\sqrt{M}}{2a} = \frac{(a - \sqrt{M})^2}{2a} \geq 0 \qquad (1)$$

provando que $\frac{1}{2}(a + \frac{M}{a})$ é também uma aproximação por excesso de $\sqrt{M}$ e *melhor* do que a, pois está mais próxima de $\sqrt{M}$ do que estava a (faça uma figura na reta, para verificar este fato).

Isto tudo sugere um processo *iterativo*, ou seja, repetitivo, para encontrar, sucessivamente, aproximações por excesso de $\sqrt{M}$ cada vez melhores, a saber:

1. Escolhe-se um número positivo a_0 tal que $a_0^2 \geq M$.

2. Toma-se $a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + \frac{M}{a_0})$

3. Toma-se $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{M}{a_1})$

etc.

Costuma-se resumir este processo na definição "por recorrência" da seqüência de aproximações $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_0 = \text{número positivo tal que } a_0^2 \geq M \\ a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{M}{a_{n-1}}) \text{ para } n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{2}$$

Exemplo 1:

Seja M = 781,54. Tomemos $a_0 = 50$ (confira se serve!). Utilizando o processo, obtém-se a seguinte seqüência (confira!):

$$a_1 = \frac{1}{2}(50 + \frac{781{,}54}{50}) = 32{,}81540000$$

$$a_2 = 28{,}31582850$$

$$a_3 = 27{,}95832274$$

$$a_4 = 27{,}95603701$$

$$a_5 = 27{,}95603692$$

etc.

Observe que:

$$a_0^2 = 2.500$$
$$a_1^2 = 1.076{,}85047716$$
$$a_2^2 = 801{,}78614368$$
$$a_3^2 = 781{,}66781037$$
$$a_4^2 = 781{,}54000523$$
$$a_5^2 = 781{,}54000000$$

etc.

de modo que, realmente, as aproximações vão sempre melhorando e que a_5 já é uma excelente aproximação de $\sqrt{781{,}54}$, dentro da precisão indicada.

Exemplo 2:

Tomemos novamente M = 781,54, mas agora $a_0 = 30$. A seqüência de aproximações seria:

$$a_0 = 30$$
$$a_1 = 28{,}02566667$$
$$a_2 = 27{,}95612341$$
$$a_3 = 27{,}95603602$$

etc.

Nota-se que, com a escolha de $a_0 = 30$, obtivemos melhores aproximações de $\sqrt{781{,}54}$ mais rapidamente, ou seja, com menos iterações, do que tínhamos conseguido com $a_0 = 50$. Naturalmente, isto ocorreu por 30 já estar mais perto da solução.

Os exemplos 1 e 2 ilustram algumas questões que deverão ser abordadas daqui por diante, no caso geral. A primeira delas é a seguinte: o processo (2) sempre "convergirá"? Ou seja, quaisquer que sejam M e a_0, ao final de um certo número de passos, chega-se à raiz quadrada de M, *com a aproximação que desejarmos?* A resposta a esta pergunta é *afirmativa,* e a justificativa é a seguinte: a seqüência de aproximações $a_0, a_1, \ldots, a_n$, é decrescente e limitada inferiormente por $\sqrt{M}$, logo converge a um número $\geq \sqrt{M}$, digamos c. A seqüência de termo geral a_{n-1}, sendo uma subseqüência da primeira, também converge ao mesmo valor. Usando então (2) e as propriedades aritméticas dos limites, conclui-se que:

$$c = \frac{1}{2}\left(c + \frac{M}{c}\right)$$

donde vem que $c^2 = M$ e, como $c \geq \sqrt{M}$, segue-se que $c = \sqrt{M}$. (Se os seus conhecimentos de Cálculo ainda não são suficientes para acompanhar a demonstração que acabou de ser feita, não se preocupe, guarde apenas o fato.) Concluindo:

Quaisquer que sejam M e a_0 positivos, ao final de um certo número de passos, o processo iterativo (2) fornece a raiz quadrada de M, com qualquer aproximação desejada.

Exercício 1. Aplicando o processo iterativo (2), faça 4 iterações para achar aproximações de $\sqrt{M}$ nos seguintes casos (invente outros):

$$\begin{array}{ll} M = 2 & a_0 = 2 \\ M = 2 & a_0 = 20 \\ M = 231{,}19 & a_0 = 20 \\ M = 231{,}19 & a_0 = 16 \end{array}$$

Exercício 2. O que acontece no processo (2) se a_0 for tomado uma aproximação (positiva) *por falta* de $\sqrt{M}$?

O fato de que o processo sempre converge é importante mas não suficiente para os propósitos do Cálculo Numérico. O que desejamos saber agora é o seguinte:

Problema: dado um número positivo M, que valor de a_0 deve ser escolhido e quantas iterações devem ser realizadas para se obter $\sqrt{M}$ com p decimais exatas?

Responderemos a esta pergunta nos próximos parágrafos, após termos estudado o erro cometido em cada passo do processo. Veremos que há várias maneiras diferentes de escolher a_0 e o número de iterações, cada uma dessas maneiras caracterizando um processo acabado, que, em Cálculo Numérico é chamado de *algoritmo*.

2. O erro de cada aproximação

Chamemos de ϵ_n o erro cometido na n-ésima iteração, isto é, o erro cometido ao se tomar a_n em vez do valor verdadeiro $\sqrt{M}$. Como a_n é uma aproximação por excesso, tem-se, por definição:

$$\epsilon_n = a_n - \sqrt{M}$$

Exemplo 3.

No exemplo 1, se você admitisse 27,95603692 como valor exato de $\sqrt{781,54}$ (o que não é "exatamente" verdadeiro), os erros seriam:

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 &= a_0 - \sqrt{M} = 22,04396308\\
\epsilon_1 &= a_1 - \sqrt{M} = 4,85936308\\
\epsilon_2 &= a_2 - \sqrt{M} = 0,35979158\\
\epsilon_3 &= a_3 - \sqrt{M} = 0,00228582\\
\epsilon_4 &= a_4 - \sqrt{M} = 0,00000009\\
\epsilon_5 &= a_5 - \sqrt{M} = 0,00000000
\end{aligned}$$

Observe que os erros ϵ_n vão diminuindo à medida que n aumenta, o que já se previa, pois cada a_n é uma aproximação melhor do que a_{n-1}. (Note que aqui estamos também admitindo como "exatos" os valores calculados de a_1, a_2, etc., desprezando os erros envolvidos nos cálculos das adições, multiplicações e divisões realizadas, bem como as aproximações resultantes da decisão de parar a escrita na oitava decimal. Observação análoga vale para os próprios erros; por exemplo, ϵ_5 não é exatamente igual a zero. Esta atitude será sempre tomada neste texto. Deve-se pois estar atento a que toda discussão que segue supõe que as "4 operações" são feitas com precisão infinita.)

A fórmula (1) acarreta que:

$$\frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{M}{a_{n-1}}\right) - \sqrt{M} = \frac{(a_{n-1} - \sqrt{M})^2}{2a_{n-1}} \geq 0$$

ou seja:

$$\epsilon_n = \frac{\epsilon_{n-1}^2}{2a_{n-1}} \tag{3}$$

Esta fórmula fornece o erro da n-ésima aproximação em termos do erro da aproximação anterior. Veremos como aproveitá-la para resolver o problema colocado no final do parágrafo anterior.

3. Uma alternativa (I) para controlar o erro

Suponha primeiro que $M \geq 1$. Os exemplos já vistos sugerem que, quanto mais próximo do resultado final for escolhido a_0, tanto mais rápida será a convergência. Inspirados nisto, tomemos a_0 como a melhor aproximação inteira por excesso de $\sqrt{M}$ (para achá-la, basta testar os quadrados dos naturais até que M seja ultrapassado). Com esta escolha, tem-se que $\sqrt{M}$ está entre os inteiros $a_0 - 1$ e a_0; portanto, $\epsilon_0 < 1$. Por outro lado, como $M \geq 1$, também $\sqrt{M} \geq 1$ e, como todas as aproximações a_n são por excesso, tem-se $a_{n-1} \geq 1$, de modo que $1/a_{n-1} \leq 1$. Levando este resultado em (3), vem:

$$\epsilon_n \leq \frac{1}{2} \epsilon_{n-1}^2$$

Fazendo sucessivamente n = 1,2,3, ..., obtém-se:

$$\epsilon_1 \leq \frac{1}{2} \epsilon_0^2 < \frac{1}{2} 1^2 = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon_2 \leq \frac{1}{2} \epsilon_1^2 < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^3}$$

$$\epsilon_3 \leq \frac{1}{2} \epsilon_2^2 < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 = \frac{1}{2^7}$$

etc.

Isto sugere que:

$$\epsilon_n < \frac{1}{2^{2^n-1}} \tag{4}$$

Exercício 3. Demonstre, por indução, a fórmula (4).

A fórmula (4) dá as seguintes cotas superiores para o erro da n-ésima aproximação:

Tabela 1

n	$1/2^{2^n-1}$
1	0,50000000
2	0,12500000
3	0,00781250
4	0,00003052
5	0,00000000

(o valor da última linha não é zero e sim $0{,}47 \times 10^{-9}$)

Exemplo 4.

Achemos $\sqrt{781{,}54}$ com 3 decimais exatas. Testando: $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; . . .; $27^2 = 729$; $28^2 = 784$, de modo que $a_0 = 28$. Para obter $\sqrt{781{,}54}$ com 3 decimais exatas, é necessário que o erro seja menor que 0,0005. Pela Tabela 1, constata-se que n = 3 ainda não garante isto, porém n = 4 já satisfaz. Pode-se usar também diretamente a fórmula (4), isto é, determinar n de modo que

$$\frac{1}{2^{2^n-1}} < 0{,}0005$$

ou seja

$$2^{2^n-1} > 2000$$

Constata-se novamente que é necessário que $n \geq 4$. (Na realidade, a quarta iteração dará $\sqrt{781{,}54}$ com, no mínimo, 4 decimais exatas, já que $\epsilon_4 < 0{,}00003052 < 0{,}00005$). Utilizando agora o processo iterativo:

$$\begin{aligned} a_0 &= 28 \\ a_1 &= 27{,}956 \\ a_2 &= 27{,}956 \end{aligned}$$

$$a_3 = 27{,}956$$
$$a_4 = 27{,}956$$

Ou seja, $\sqrt{781{,}54} = 27{,}956$ com 3 decimais exatas.

Exercício 4. No exemplo 3, já com n = 1 obtivemos 3 decimais exatas. Isto contraria a discussão feita no texto?

Até agora, supusemos $M \geq 1$. Se $0 < M < 1$, então $1/M$ será > 1 e podemos aplicar o processo indicado para achar $\sqrt{1/M} = 1/\sqrt{M}$, e obter, como conseqüência, $\sqrt{M}$ (lembre que estamos supondo as "4 operações" calculadas sem erro).

Exemplo 5.

Calculemos $\sqrt{0{,}0342}$ com 4 decimais exatas.

Temos n = 4; $1/0{,}0342 = 29{,}23976608$; $a_0 = 6$ (confira!). Daí:

$$a_1 = 5{,}4366$$
$$a_2 = 5{,}4075$$
$$a_3 = 5{,}4074$$
$$a_4 = 5{,}4074$$

Donde:

$$\sqrt{0{,}0342} = 1/5{,}4074 = 0{,}1849$$

Exercício 5. Faça um programa de computador para calcular $\sqrt{M}$ com p decimais exatas, segundo a alternativa I. Rode o programa para os seguintes valores de M: 2; 0,2; 20; 0,02; 123,45; 6789,01;0,543; 384.666,2; 0,000191.

4. Uma alternativa (II) que converge mais rapidamente

Na alternativa I, anteriormente discutida, a escolha de a_0 como a melhor aproximação inteira de $\sqrt{M}$ foi conveniente, para garantir $\epsilon_0 < 1$. No entanto, ela implica numa procura custosa para a máquina. Tentemos contornar este inconveniente. Acompanhe o cálculo:

$$\frac{1+M}{2} - \sqrt{M} = \frac{1-2\sqrt{M}+M}{2} = \frac{(1-\sqrt{M})^2}{2} \geq 0 \qquad (5)$$

Isto prova que $(1 + M)/2$ é sempre uma aproximação por excesso de $\sqrt{M}$, e sugere que tomemos sempre $a_0 = (1 + M)/2$, numa escolha imediata que não implica em busca alguma. Infelizmente, com esta escolha, se M for razoavelmente "grande", ϵ_0 pode ser muito alto, retardando a convergência. Por exemplo, se $M = 781{,}54$, tem-se $a_0 = 391{,}27$, e portanto $\epsilon_0 = 363{,}31396309$ e seriam necessárias 7 iterações para atingir a precisão que conseguimos atingir com apenas uma no exemplo 3.

Procurando então controlar melhor o erro inicial, vamos, primeiramente, supor que $1/4 \leq M < 1$. Neste caso, $1/2 \leq \sqrt{M} < 1$, de modo que $1 - \sqrt{M} \leq 1/2$ e, portanto:

$$\epsilon_0 = a_0 - \sqrt{M} = \frac{(1-\sqrt{M})^2}{2} < \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^2} = \frac{1}{8}$$

onde utilizamos a fórmula (5). Por outro lado, como $\sqrt{M} \geq 1/2$ e todas as aproximações são por excesso, tem-se $a_{n-1} \geq 1/2$ e, portanto, $1/(2a_{n-1}) \leq 1$. Levando este resultado em (3), vem:

$$\epsilon_n \leq \epsilon_{n-1}^2$$

Fazendo sucessivamente $n = 1, 2, \ldots$:

$$\epsilon_1 \leq \epsilon_0^2 < \left(\frac{1}{8}\right)^2$$

$$\epsilon_2 \leq \epsilon_1^2 < \left(\frac{1}{8}\right)^4$$

etc.

o que sugere:

$$\epsilon_n < \frac{1}{8^{2^n}}$$

Exercício 6. Demonstre (6), por indução.

Neste caso, a convergência é muito rápida, como mostra a Tabela 2.

Tabela 2

n	$1/(8^{2^n})$
1	0,01562500
2	0,00024414
3	0,00000006
4	0,00000000

Na verdade, o valor da última linha não é zero e sim $0{,}36 \times 10^{-14}$, ou seja, com 4 iterações, já se garantem 14 decimais exatas.

O que acontece porém se M não estiver no intervalo $[1/4; 1[$?

Em primeiro lugar, se $M \geq 1$, determinamos entre que potências de 4 está M, isto é, encontra-se o único natural k tal que:

$$4^{k-1} \leq M < 4^k$$

(Você vai observar que a procura deste natural é muito mais rápida do que a procura de α_0 na alternativa I). Mas então:

$$\frac{1}{4} \leq \frac{M}{4^k} < 1$$

Aplicando-se o processo descrito para $M/4^k$, calcula-se

$$\sqrt{\frac{M}{4^k}} = \frac{\sqrt{M}}{2^k}$$

Basta agora multiplicar o resultado por 2^k para obter $\sqrt{M}$.

Finalmente, se $M < 1/4$, então $1/M > 4$ e recai-se no caso anterior, achando-se $\sqrt{1/M} = 1/\sqrt{M}$ e invertendo o resultado.

Exemplo 6. Calculemos $\sqrt{0{,}371}$ com 6 decimais exatas pela alternativa II. Como $0{,}25 < 0{,}371 < 1$, o processo é direto e, pela Tabela 2 ou pela fórmula (6), três passos são suficientes.

$$\alpha_0 = \frac{1 + 0{,}371}{2} = 0{,}685500$$

$$\alpha_1 = 0{,}613355$$

$$\alpha_2 = 0{,}609112$$

$$\alpha_3 = 0{,}609098$$

Exemplo 7. Calcule $\sqrt{781{,}54}$ com 6 decimais exatas pela alternativa II. Sendo $M > 1$, testa-se:

$$4^1 = 4 \quad 4^2 = 16 \quad 4^3 = 64 \quad 4^4 = 256 \quad 4^5 = 1.024$$

Portanto, $4^4 < 781{,}54 < 4^5$. O processo vai incidir sobre o número $781{,}54 / 4^5 = 0{,}763223$, com $k = 5$.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0{,}881611 \\ \alpha_1 &= 0{,}873662 \\ \alpha_2 &= 0{,}873626 \\ \alpha_3 &= 0{,}873626 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\sqrt{781{,}54} = 0{,}873626 \times 2^5 = 27{,}956037$$

Exemplo 8. Calculemos $\sqrt{0{,}0197}$ com 6 decimais exatas pela alternativa II. Sendo $M < 1$, considera-se o seu inverso:

$$4^2 < \frac{1}{0{,}0197} = 50{,}761421 < 4^3$$

O processo será aplicado a

$$\frac{50{,}761421}{4^3} = 0{,}793147$$

obtendo-se:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0{,}896574 \\ \alpha_1 &= 0{,}890608 \\ \alpha_2 &= 0{,}890588 \\ \alpha_3 &= 0{,}890588 \end{aligned}$$

Tem-se ainda: $0{,}890588 \times 2^3 = 7{,}124705$ e, finalmente:

$$\sqrt{0{,}0197} = \frac{1}{7{,}124705} = 0{,}140357$$

Exercício 7. Faça um programa de computador para calcular $\sqrt{M}$ com p decimais exatas, segundo a alternativa II. Rode o programa para os seguintes valores de M: 2; 0,2; 20; 0,02; 123,45; 6789,01; 0,543; 384.666,2; 0,000191.

5. A diferença entre aproximações sucessivas

Durante a realização do processo aqui analisado, o erro cometido permanece desconhecido (embora controlado por cotas superiores, como vimos). No entanto, a diferença entre duas aproximações sucessivas é conhecida em cada passo. Seja então:

$$d_n = a_{n-1} - a_n$$

Exemplo 9. No exemplo 1 (confira!), temos:

$$\begin{aligned} d_1 &= a_0 - a_1 = 17{,}18460000 \\ d_2 &= a_1 - a_2 = 4{,}49957150 \\ d_3 &= 0{,}35750576 \\ d_4 &= 0{,}00228573 \\ d_5 &= 0{,}00000009 \end{aligned}$$

Se você comparar estas diferenças com os respectivos erros $\epsilon_n = a_n - \sqrt{M}$, notará que sempre $\epsilon_n < d_n$. Vamos verificar que este fato é geral.

Em primeiro lugar:

$$d_n = a_{n-1} - a_n = (a_{n-1} - \sqrt{M}) - (a_n - \sqrt{M}) = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n$$

Usando isto e a fórmula (3), vem:

$$d_n - \epsilon_n = \epsilon_{n-1} - 2\epsilon_n = \epsilon_{n-1} - \frac{\epsilon_{n-1}^2}{a_{n-1}} =$$

$$= \frac{\epsilon_{n-1}(\alpha_{n-1} - \epsilon_{n-1})}{\alpha_{n-1}} = \sqrt{M}\ \frac{\epsilon_{n-1}}{\alpha_{n-1}}$$

Isto prova que $d_n - \epsilon_n > 0$ e portanto $\epsilon_n < d_n$. Logo, se d_n não ultrapassar um certo valor, então o erro da n-ésima aproximação, com muito mais razão, estará limitado por este valor. Esta observação sugere um algoritmo bem simples para calcular $\sqrt{M}$ com p decimais exatas (podemos chamá-lo de Alternativa III), a saber:

1 : Escolha $\alpha_0 = (1 + M)/2$.

2 : Aplique o processo (2).

3 : Pare quando $\alpha_{n-1} - \alpha_n \leq 0{,}5.10^{-p}$.

Infelizmente, esta alternativa tem um grande inconveniente, quando se trata de utilizá-la em grande escala: o número de iterações é desconhecido de antemão e, conseqüentemente, é desconhecido o "custo" do processo.

Exercício 8. Faça um programa de computador para calcular $\sqrt{M}$ com p decimais exatas, segundo a alternativa III. Faça o programa anotar o número de iterações utilizadas. Rode o programa para os seguintes valores de M: 2; 0,2; 20; 0,02; 123,45; 6789,01; 0,543; 384.666,2; 0,000191. Analise os resultados.

Exercício 9. Quando se calcula $\sqrt{M}$ numa máquina de mesa pelo processo (2) e resolve-se parar quando coincidirem as p primeiras decimais de duas aproximações consecutivas, o que se pode garantir sobre o número de decimais exatas da última aproximação?

Exercício 10. Mostre que, se $M \geq 0{,}25$, então $\epsilon_n \leq 0{,}5 d_n$, a partir do ponto em que $\epsilon_{n-1} \leq 1$ (sugestão: utilize (7) e (8)). Isto melhora o resultado do exercício 9?

O professor José Paulo Q. Carneiro ministra aulas de Análise e Álgebra Linear como professor colaborador do Mestrado em Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula.

ENSINANDO M.M.C. E M.D.C. DE DOIS NÚMEROS NATURAIS

Lucia Arruda de A. Tinoco
Marién Martínez Gonçalves
PROJETO FUNDÃO – IM/UFRJ
GEPEM

Um aspecto polêmico nas discussões a respeito dos programas para a 4ª e 5ª série do primeiro grau é a inclusão ou não dos tópicos: m.m.c. e m.d.c.

Muitos alunos, e mesmo professores, acreditam que, sem saber calcular o m.m.c e o m.d.c. de dois números, não é possível, por exemplo, comparar, adicionar ou simplificar frações.

Admitimos que certamente o conhecimento do m.m.c. ou do m.d.c. pode muitas vezes facilitar o trabalho operacional de alguns desses cálculos.

Entretanto, sem entrar no mérito da questão, chamamos atenção ao fato de que o ensino de todos esses assuntos depende apenas da construção bem feita dos conceitos de múltiplo e divisor de um número, e dos conceitos de múltiplo comum ou divisor comum de dois ou mais números.

Entre os argumentos utilizados pelos professores para a inclusão desses tópicos no programa, está o de que os alunos se interessam e até gostam dos exercícios utilizados para o aprendizado dos processos de cálculo do m.m.c. e do m.d.c. de dois números.

Questionamos, porém, o grau de compreensão de alguns desses processos. Os alunos até entendem o significado do m.m.c. ou do m.d.c. de dois números A e B quando calculados pela definição, ou seja:

a) m.m.c.: após determinar isoladamente o conjunto dos múltiplos não nulos de A e de B, procura-se o Menor Múltiplo Comum aos dois.

b) m.d.c.: após determinar isoladamente o conjunto dos divisores de A e de B, procura-se o Maior Divisor Comum aos dois.

Por outro lado, não manifestam nenhuma estranheza pelo fato de executarem, sem saber porque, os algoritmos da fatoração simultânea (para o m.m.c.) e o de Euclides (para o m.d.c.), pois, nessa faixa de idade, o simples fato de "calcular" os deixa satisfeitos.

O processo para o qual gostaríamos de chamar a atenção é o que permite calcular o m.m.c. e o m.d.c. de dois números a partir da observação das decomposições de cada um destes números em fatores primos.

Certamente, os alunos que gostam de matemática também utilizam com facilidade este processo. Porém, em algum momento, passam a questionar por que para calcular o m.m.c. (*menor* múltiplo comum), tomam-se os fatores comuns e não comuns, elevados aos *maiores* expoentes? Por que os *maiores* e não os *menores*? Sinal da falta de compreensão do processo! Talvez tenha havido apenas memorização.

Questionamento análogo surge em relação ao cálculo do m.d.c.

É interessante que, segundo depoimento de alguns professores, são poucos os alunos que levantam esse questionamento. Agrava a situação o fato de que, embora esse questionamento parta de bons alunos, as justificativas dos professores quando muito se limitam a levar o aluno a verificar que os resultados obtidos por esse processo coincidem com os obtidos pelos outros.

Na realidade, a dificuldade dos alunos reside em um problema conceitual básico: o conceito de divisibilidade.

Quando se ensina múltiplos e divisores, em geral, diz-se: "todo número terminado em 0 ou em 5 é múltiplo de (ou divisível por) 5"; ou ainda: "todo número cuja soma dos seus algarismos é 3 ou múltiplo de 3, é múltiplo de (ou divisível por) 3"; etc.

O aluno aprende a regra e a utiliza.

Assim sendo, quando se trata de verificar se um número M, decomposto em fatores primos, é divisível por um número N, também decomposto em fatores primos, o aluno recompõe os números e depois aplica alguma regra de divisibilidade por N.

Nessas condições, o aluno não consegue saber se $M = 2^3 \times 3^2 \times 5$ é divisível por $N = 10$, sem antes descobrir que $M = 360$. Assim, como podemos esperar que ele entenda que o maior divisor comum entre $M = 2^3 \times 3^2 \times 5$ e $P = 2 \times 5^2$ é 2×5? Ou seja, o produto dos fatores comuns elevados aos *menores* expoentes. É realmente muito difícil!

Insistimos, em que o que realmente falta é o conceito de divisibilidade e não as regras de divisibilidade, embora estas possam ser úteis em outras ocasiões.

Para melhor justificar nossas observações, fizemos um trabalho de campo envolvendo 170 alunos (33 da 6ª série, 56 da 7ª, 31 da 2ª série do 2º grau, e 50 de um curso de formação de professores). Pedimos aos professores que aplicassem aos seus alunos um teste envolvendo divisibilidade com números fatorados ou não, e que chamassem a atenção deles para que todas as contas necessárias fossem feitas no próprio teste e que este não valia nota, era só uma pesquisa.

Os alunos, talvez entusiasmados pelos professores, fizeram o melhor possível. Porém, como mostram os resultados apresentados a seguir ficou confirmada a hipótese de que o conceito de divisibilidade não é dominado.

ORIGEM DOS ALUNOS	TOTAL	Q : 1,2		Q : 3,4		Q : 5		Q : 8		Q : 9–a		Q : 9–b	
		NUM	%	NUM	%	NUM	%	NUM	%	NUM	%	NUM	%
6ª série – 1º grau	33	32	97	25	75	33	100	30	91	33	100	32	99
7ª série – 1º grau	56	51	91	25	44	34	61	33	59	42	75	43	77
2ª série – 2º grau	31	31	100	25	80	23	74	9	29	5	16	4	13
Form. de Professores	50	50	100	27	54	44	88	38	76	45	90	45	90
TOTAL	170	164	96	102	60	134	78	110	65	125	74	124	73

Análise da Tabela:

Os resultados de Q : 1,2 e de Q : 3,4 indicam respectivamente o número de alunos que acertaram as questões 1 e 2, 3 e 4; já os resultados apresentados em Q : 5, Q : 8, Q : 9–a e Q : 9–b indicam o total de alunos que primeiro multiplicou para depois tentar resolver o exercício.

.. a questão 1 pedia um exemplo de um número divisível por 2 e, a questão 2 pedia um divisível por 3. Pudemos observar que o acerto foi muito grande (96%). Já nas questões 3 e 4 que exigiam critérios de divisibilidade por 6 e por 10, o desempenho dos alunos da 7ª série e do Curso de Formação de Professores (CFP) foi bem mais baixo. O fato de alguns desses alunos assinalarem "402" como divisível por 10, sugere a falta de compreensão da respectiva regra.

.. a questão 5 pedia para verificar se o número 2x3x5 era divisível por 3, por 5 e por 10. A grande maioria (78%) achou necessário efetuar primeiro o produto, 9% tentou fazer sem efetuá-lo e, os 13% restantes deixaram em branco. É interessante observar que muitos dos alunos do CFP, para verificar a divisibilidade pedida, após recomporem o número, efetuaram a divisão pelo outro (2 ou 3 ou 10) em vez de aplicarem os critérios de divisibilidade.

Vejamos algumas das respostas dos alunos do CFP:

- *"É divisível, pois se dividirmos 30 por 3 a resposta é 10 e não sobra resto."*
- *"É divisível, ao dividirmos 30 por 10 a conta dá exata."*
- *"É divisível, mas deixa resto."*
- *"Não dá para dividir."*

.. na questão 8 em que se pedia por quanto deveríamos multiplicar $A = 2 \times 3^2 \times 5$ para obtermos $B = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$ o mesmo tipo de procedimento foi verificado.

Ex.: "$A = 2 \times 9 \times 5 = 90$ $B = 4 \times 9 \times 25 = 900$, tem que multiplicar A por 10."

.. a questão 9–a pedia para simplificar a fração: $(2^3 \times 3^2)/(2^2 \times 3)$ e a questão 9–b a fração: $(3^2 \times 5)/(2^2 \times 3)$. Pudemos observar que a maioria (74%), multiplicou antes de simplificar. Somente 34 alunos (20%) não efetuou os produtos do numerador e do denominador para depois simplificar e, dentre eles, apenas 3 erraram. Os tipos de erros cometidos por esses alunos mostram total desconhecimento do significado dos números; eles simplesmente "cortam" algarismos.

Ex.: $$\frac{2^3 \times 3^2}{2^2 \times 3} = 2 \times 3 = 6$$

Entre os 106 alunos dos CFP e da 7ª série do 1º grau, observamos que 87 alunos (82%), multiplicaram antes de simplificar e que 23 (54%) da 7ª série abandonaram os cálculos antes de simplificar. Já os do CFP, para simplificar, tentaram efetuar a divisão e assim obtiveram sucesso na questão 9–a (82% acertaram) e não na questão 9–b (53% acertaram). Supõe-se que tal dificuldade deve-se ao fato de que a divisão na questão 9–a era exata e na 9–b não.

Constatamos também que dos 24 alunos do 2º grau Formação Geral, que não multiplicaram para efetuar a simplificação, 21 têm idade regular para esse nível o que indica a importância da adequação entre a idade cronológica e a escolaridade do aluno. Observamos ainda que esses alunos do 2º grau FG simplificaram as frações com os números fatorados, porém, efetuaram o produto para testar a divisibilidade (questões 5 e 8). Isto sugere que eles dominam melhor as regras que o conceito. E, o fato deles terem simplificado pode ter sido conseqüência do aprendizado do cálculo algébrico. Julgamos então possível a um professor, que esteja trabalhando o cálculo algébrico detectar tais falhas conceituais e tentar saná-las nesse momento.

Acreditando que os problemas apontados não são específicos da amostra do nosso trabalho, sugerimos aos leitores, que peçam aos seus alunos que já tenham trabalhado com m.m.c. e m.d.c., para verificarem se: "$M = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$ é divisível por $N = 2^2 \times 3^3 \times 5$"; ou ainda para responderem "por quanto temos que multiplicar N para obter M?". A seguir devem analisar os processos utilizados por eles para resolver esses problemas (sem se importar com a resposta, só com o processo), observando se eles utilizam o que aprenderam sobre potências, ou se elevam cada fator primo ao seu expoente e só depois verificam a divisibilidade, ou ainda, se efetuam todos os produtos necessários para compor os números e só então verificam a divisibilidade.

Certamente, se seus alunos não são capazes de concluir fatos sobre multiplicidade e divisibilidade de números decompostos em fatores primos, é importante dar uma parada e trabalhar este assunto. O tempo dispendido aí será amplamente compensado adiante.

O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO EM GEOMETRIA

Lilian Nasser
Instituto de Matemática — UFRJ
GEPEM

Nós, professores de Matemática do curso secundário sempre observamos que a maioria dos alunos apresentam dificuldades em Geometria, comparando com outros temas. Mesmo alguns alunos que compreendem a Álgebra muito bem podem apresentar dificuldades em dominar a Geometria. Destacam-se as dificuldades no processo dedutivo e em demonstrações. Wirszup (1976) investigou a seguinte questão:

> "Por que será que tantos estudantes que dominam a maioria dos assuntos escolares não chegam a lugar nenhum em Geometria?"

Até hoje, a mais razoável explicação para este problema foi dada pelo "Modelo de van Hiele para o pensamento em Geometria", o qual sugere que os alunos progridem através de uma seqüência de níveis de compreensão de conceitos enquanto eles aprendem Geometria.

Um ponto positivo desta Teoria é o fato de ter se originado em sala de aula, quando os professores holandeses Pierre e Dina van Hiele observaram as dificuldades de seus alunos ao resolver tarefas em Geometria. Dedicaram seus estudos de doutorado a esse problema, concluídos em 1957 pela Universidade de Utretch. Eles focaram seus trabalhos nos diversos níveis de pensamento em Geometria, e no papel do "insight" ou compreensão na aprendizagem de Geometria. O fato do trabalho ser na língua holandesa dificultou a divulgação do modelo. Em 1957, Pierre van Hiele apresentou o artigo "O pensamento da criança e a Geometria" num Congresso de Educação Matemática na França, atraindo a atenção de pesquisadores soviéticos e americanos. Apesar disso, este artigo só foi publicado (em francês) dois anos depois.

Van Hiele descreveu seus níveis como:

> "Certos passos no processo de aprendizagem, mas por outro lado há muitos outros passos que não são relacionados a estes níveis de pensamento. Estes passos resultam do método de ensino usado."

Os Níveis de van Hiele:

Nível básico:
Reconhecimento – o aluno reconhece as figuras geométricas por sua aparência global, mas não identifica explicitamente suas propriedades.

Ex.: o aluno identifica a figura de um quadrado, e ao ser perguntado por que, a resposta é do tipo: "porque se parece com um quadrado"

Nível 1:
Análise – o aluno conhece e analisa as propriedades das figuras geométricas, mas não relaciona explicitamente as diversas figuras ou propriedades entre si.

Ex.: o aluno sabe que o quadrado tem quatro lados iguais e quatro ângulos retos.

Nível 2:
Ordenação – o aluno relaciona as figuras entre si de acordo com suas propriedades, mas não domina o processo dedutivo.

Ex.: o aluno sabe que todo quadrado é um retângulo, e que todo retângulo é um paralelogramo.

Nível 3:
Dedução – o aluno compreende o processo dedutivo, a recíproca de um teorema, as condições necessária e suficiente, mas não sente necessidade de usar rigor matemático.

Ex.: o aluno entende porque o postulado das paralelas implica que a soma dos ângulos de um triângulo é 180º.

Nível 4:
Rigor – o aluno compreende a importância do rigor nas demonstrações, e é capaz de analisar outras geometrias.

O próprio P. van Hiele, assim como vários pesquisadores que trabalharam com este modelo, concordam que é praticamente impossível atingir o nível 4 no curso secundário (ou no 1º grau).

As principais características do modelo de van Hiele para o pensamento em Geometria são:

(a) *Hierarquia:* os níveis obedecem a uma seqüência, isto é, para atingir certo nível o indivíduo deve passar antes pelos níveis inferiores;

(b) *Lingüística:* cada nível tem sua própria linguagem, conjunto de símbolos e sistema de relações. Por exemplo, no nível básico, o aluno se refere a ângulos de mesma medida como "iguais" e, no nível dois, como "congruentes".

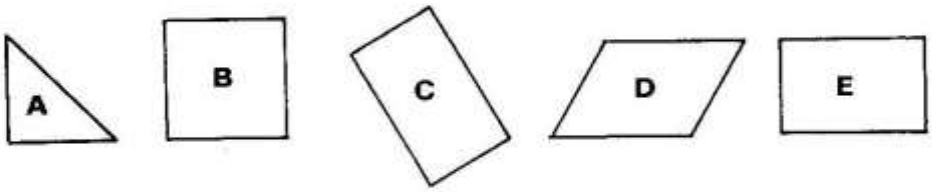
(c) *Intrínseco e Extrínseco:* o que está implícito num nível torna-se explícito no próximo nível.

(d) *Avanço:* o progresso entre os níveis depende mais de instrução do que da idade ou maturidade do aluno.

(e) *Desnível:* não há entendimento entre duas pessoas que estão raciocinando em níveis diferentes ou se a instrução é dada num nível mais avançado que o atingido pelo aluno.

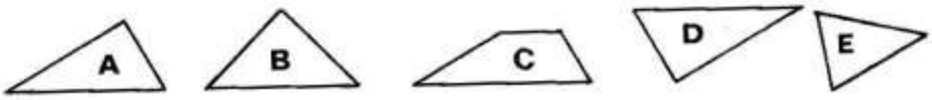
Exemplos de respostas dadas por alunos em diversos níveis de van Hiele:

1) Quais destas figuras são retângulos?



Aluno X:	E	(nível básico)
Aluno Y:	C e E	(nível 1)
Aluno Z:	B, C e E	(nível 2)

2) Assinale a(s) figura(s) com a mesma forma e o mesmo tamanho que A:



Aluno X: B e D, porque se "parecem" com A (nível básico)
Aluno Y: Apenas D, porque "tem as mesmas medidas de A" (nível 1)

3) Propriedades dos quadrados:

Aluno X: (nível 1)

- têm 4 lados
- todos os lados são congruentes
- têm 4 ângulos
- todos os ângulos são retos
- os lados opostos são paralelos
- os lados opostos são iguais

Aluno Y: (nível 2)

- têm 4 lados congruentes
- têm 4 ângulos retos

4) Soma dos ângulos internos de um triângulo:

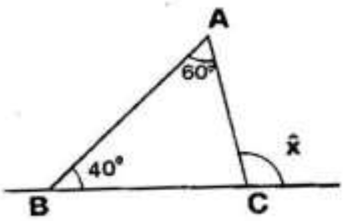
Aluno A: "enxerga" através de recorte ou dobraduras (nível 1)

Aluno B: compreende usando uma grade triangular, sem justificar ou generalizar (nível 1)

Aluno C: usa as propriedades dos ângulos alternos internos para justificar e generalizar (nível 2)

Aluno D: escreve uma demonstração informal (nível 3)

5) Determine o valor do ângulo $\hat{x}$:



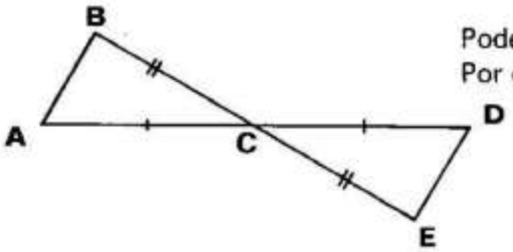
Aluno A: $\hat{C} = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$
$\hat{X} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ (nível 1)

Aluno B: usa a propriedade de que o ângulo externo é a soma dos ângulos internos não adjacentes e calcula:

$$\hat{X} = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ \quad \text{(nível 2)}$$

Aluno C: mostra que se $\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ e} \\ \hat{X} + \hat{C} = 180^\circ \end{cases}$

então $\hat{X} = \hat{A} + \hat{B}$ e calcula: $\hat{X} = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$
(nível 3)

6) 

Pode-se concluir que AB = DE? Por que?

Aluno A: Sim, porque os triângulos têm a mesma forma (nível básico)

Aluno B: Sim, porque os lados têm as mesmas medidas (nível 1)

Aluno C: Sim, porque os triângulos são congruentes, por

LAL $\Rightarrow$ AB = DE (nível 2)

Aluno D: Sim, pois temos: BC = CE (dados no problema)
AC = CD (dados no problema)
$\widehat{ACB} = \widehat{DCE}$ (opostos pelo vértice)

Logo, por LAL, os triângulos ABC e DEC são congruentes
$\Rightarrow$ AB = DE (nível 3)

Van Hiele estabeleceu 5 fases que devem ser vivenciadas pelos estudantes no processo de progredir de um nível para o próximo. Estas fases devem ser favorecidas e/ou encorajadas pelo professor.

Para progredir de um nível para o imediatamente superior, o aluno deve vivenciar 5 fases:

— *Informação:* professor e alunos envolvem-se em conversas e atividades sobre os objetos de estudo deste nível. Observações são feitas, perguntas são formuladas, e o vocabulário específico do nível é introduzido.

— *Orientação dirigida:* os estudantes exploram o tópico de estudo através de materiais que o professor ordenou cuidadosamente. Estas atividades devem revelar gradativamente aos alunos as estruturas características do nível.

— *Explicação:* acrescentando sobre suas experiências prévias, os alunos expressam e modificam seus pontos de vista sobre as estruturas que foram observadas. O papel do professor é mínimo: apenas auxiliar os alunos a usar a linguagem apropriada.

— *Orientação livre:* os alunos procuram soluções próprias para tarefas mais complicadas, que admitem várias soluções, e para problemas em aberto.

— *Integração:* o aluno revê e resume o que aprendeu, com o objetivo de formar uma visão geral do novo sistema de objetos e relações.

Com exceção da última fase, as outras podem ocorrer em diversas ordens e até simultaneamente.

A tese de Dina van Hiele-Geldof consiste de um experimento didático detalhado levando uma turma a progredir de um nível para o seguinte. Apresenta o protocolo de 20 aulas levando a turma do nível básico para o nível 1. Do nível 1 para o nível 2, afirma que são necessárias 50 aulas. Nos Estados Unidos, Usiskin afirma que cerca da metade dos alunos iniciam o ano de Geometria nos níveis básico ou 1 e cerca de um terço deles termina o ano no mesmo nível.

Implicações da Teoria de van Hiele para o ensino:

(a) Os alunos passam pelos níveis em ordem consecutiva, mas não no mesmo ritmo. É possível encontrar na mesma turma alunos em diversos níveis;

(b) Em cada sala de aula deve-se tentar ter o professor, os alunos e o livro-texto funcionando no mesmo nível;

(c) O aluno que chegar à 7ª série nos níveis básicos ou 1 tem pouca chance de dominar as demonstrações até o final do ano letivo;

(d) O curso de Geometria Euclideana é dado no nível 3; o aluno típico inicia o curso no nível 1, daí as dificuldades encontradas;

(e) O nível 2 é intermediário entre a Geometria informal ou experimental e a Geometria formal (dedutiva);

(f) É muito difícil atingir o nível 4 no curso secundário. Logo, o professor não deve esperar que seus alunos escrevam provas rigorosas, nem que eles entendam outras Geometrias.

Observação:

Este artigo resulta de trabalhos de pesquisa realizados pela autora, com base em trabalhos de van Hiele.

Extensa bibliografia existe sobre o assunto. Ela pode ser fornecida mediante pedido ao GEPEM.

CURSO SOBRE MATERIAL DOURADO

Nicola Siani
USU

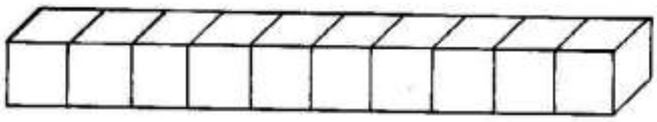
Este trabalho foi objeto de um curso de aperfeiçoamento para as professoras de 1ª à 4ª séries do 1º grau do Colégio Santo Inácio. Dedico-o ao saudoso Professor José Carlos de Mello e Souza, meu mestre no curso de graduação, onde se destacava não só pelo profundo conhecimento da Matemática, mas também pela formidável pessoa humana que era e que muito me incentivou.

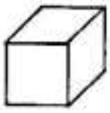
1) **Manipulação livre do material**

Aqui o aluno manipula o material livremente, fazendo construções, armando trens, etc. É o primeiro contato com o material.

2) **Dar nomes às peças.**[1]

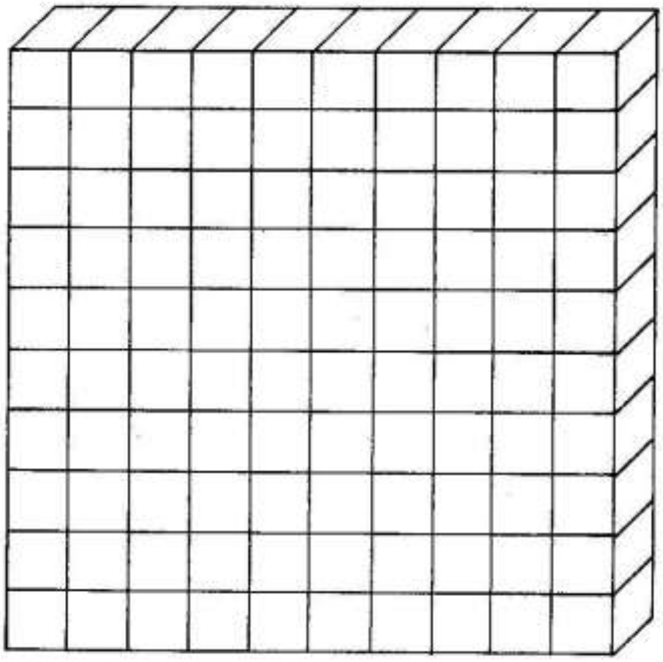
Geralmente as crianças chamam a peça desenhada abaixo de *"comprido"* ou *palito.*



A peça  é chamada de *cubinho.*

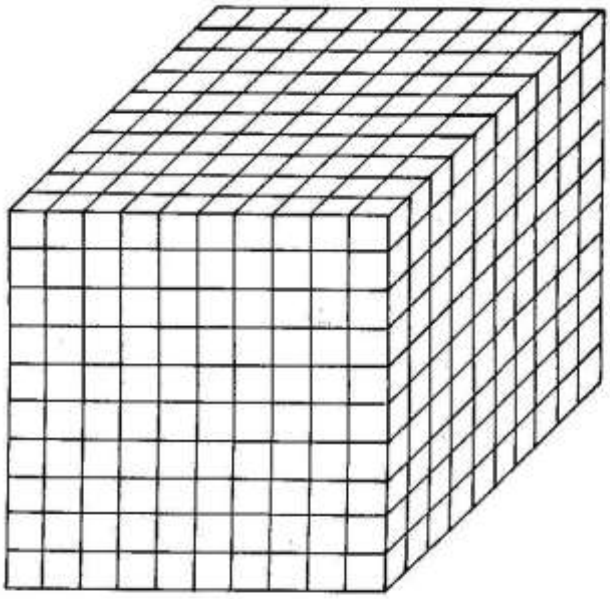
[1] Estes nomes são sugestões, os alunos podem sugerir outros nomes.

A peça



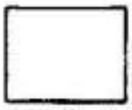
é chamada de *placa.*

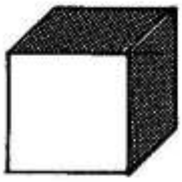
E a peça abaixo



é chamada de *cubão.*

3) **Sinais para representar as peças(*)**

Para representar um cubinho, podemos usar o sinal  , para representar um palito, podemos usar o sinal  , para representar uma placa, o sinal  e para representar um um cubão, o sinal  . Você deve ter esses sinais desenhados em cartões.

É claro que mais tarde podemos substituir o sinal  por *C*, o sinal  por *pa*, o sinal  por *Pℓ* e o sinal  por *G*.

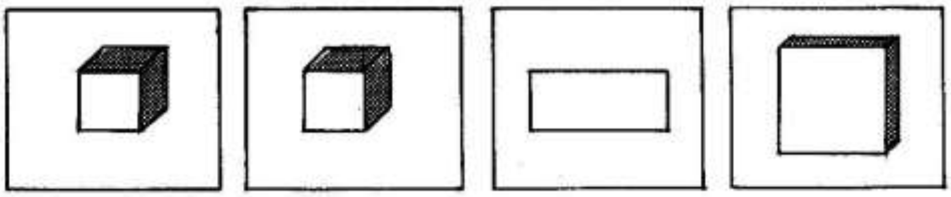
(*) *Observação:* Estes sinais são sugestões, é claro que os alunos podem sugerir outros.

JOGO I:

a) MATERIAL: Cartão com os sinais que representam as peças do material dourado.

OBJETIVO: Identificar as peças do material dourado através dos sinais adotados.

- Colocar na mesa vários cartões, por exemplo:



O aluno deve pegar as peças do material dourado correspondente a estes cartões.

- Repetir o jogo com outros cartões.

b) MATERIAL e OBJETIVO: Os mesmos que o jogo anterior.

- Colocar algumas peças do material dourado e o aluno deve representá-las através de sinais.

- Repetir o jogo com outras peças.

4) **A relação existente entre as peças do material dourado**

Neste item o aluno deve descobrir a estrutura do material dourado. Através de situações apresentadas, o aluno deve concluir que 10 cubinhos formam um palito, dez palitos formam uma placa, 10 placas formam um cubão, 100 cubinhos formam uma placa e assim sucessivamente.

JOGO II:

MATERIAL: Peças do material dourado.
OBJETIVO: Entender que um palito é formado por dez cubinhos.

- Coloque sobre a mesa 3 cubinhos de um lado e, do outro lado, 1 palito.

Perguntas:

1) Onde há mais cubinhos, no palito ou no monte de cubinhos? Justifique a resposta.

2) Coloque 4 cubinhos junto dos 3 cubinhos que havia sobre a mesa anteriormente e faça a pergunta anterior. Justifique a resposta.

3) No monte de cubinhos, agora, há 7 cubinhos, coloque 3 cubinhos e faça a mesma pergunta feita anteriormente. Justifique a resposta.

4) Quantos cubinhos são necessários para formar um palito?

5) Coloque sobre a mesa um palito. Pergunte a um dos alunos se é possível retirar dali 4 cubinhos e como proceder.

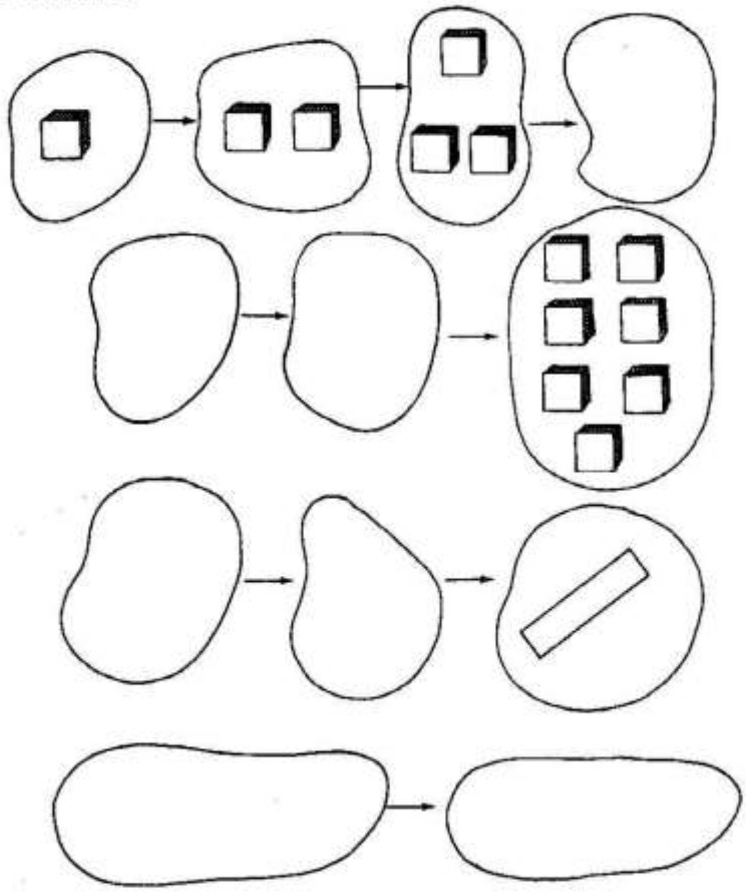
Problemas:

1) Maria tem 7 cubinhos, ganhou 5 cubinhos de seu irmão, com quantos cubinhos e quantos palitos Maria ficou?

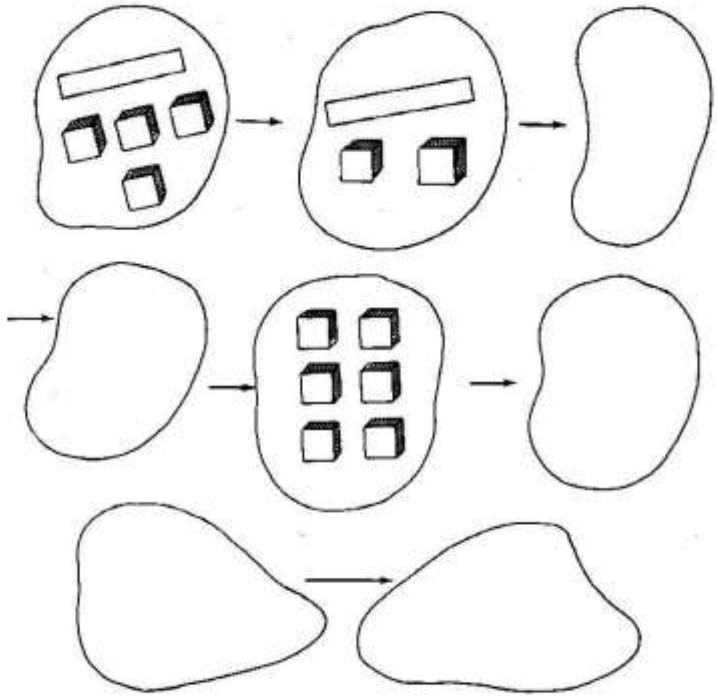
2) Margarida tem 1 palito e 3 cubinhos, deu 6 cubinhos para Antonio. Com quantos cubinhos e quantos palitos Margarida ficou?

3) Marcos tem 4 palitos e 7 cubinhos, Carlos tem 5 palitos e 2 cubinhos. Quem tem mais cubinhos? Justifique sua resposta.

4) Complete a seqüência abaixo, colocando cubinhos ou palitos que estão faltando:



5) Complete a seqüência abaixo, colocando cubinhos ou palitos que estão faltando:



6) Quantos cubinhos há em 3 palitos e 6 cubinhos?

7) Numa caixa há 78 cubinhos. Quantos palitos há na caixa? Retirando todos os palitos da caixa, quantos cubinhos ficaram?

8) Numa caixa A há 3 palitos e 7 cubinhos, numa caixa B há 2 palitos e 8 cubinhos. Juntando-se em uma caixa C as peças de A e B, quantos palitos obteremos na caixa C?
Utilize a tabela abaixo para dar a resposta.

QUANTIDADE	PALITOS	CUBÍNHOS
caixa A		
caixa B		
caixa C		

9) Coloque sobre a mesa 47 cubinhos. Quantos palitos e quantos cubinhos soltos há sobre a mesa? Justifique sua respósta.

10) Coloque sobre a mesa 38 cubinhos. Quantos palitos e quantos cubinhos soltos há sobre a mesa? Justifique sua resposta.

11) **Agora, responda sem usar o material dourado.** Quantos palitos há em 89 cubinhos?

12) Eu tenho 8 palitos. Quantos cubinhos estes palitos representam?

13) **Faça sem usar o material dourado.** Possuo 73 cubinhos, coloque esta informação no quadro abaixo.

Nº DE PALITOS	Nº DE CUBINHOS SOLTOS

14) Mauro possui 47 cubinhos, ganhou 35 cubinhos de Carla, com quantos palitos e cubinhos soltos Mauro ficou?

Use o quadro:

	PALITOS	CUBINHOS SOLTOS
Mauro possui		
Mauro ganhou de Carla		
Total que Mauro ficou		

15) Arme e efetue as seguintes contas:

a)	3 pa	5 c	+	6 c	4 pa	=
	↑	↑		↑	↑	
	3 palitos	5 cubinhos		6 cubinhos	4 palitos	

Observação:

pa → palito
c → cubinho
sinais sugeridos no início da apostila (3º item)

Use o quadro

TIPOS DE PEÇAS	pa	c
1ª parcela		
2ª parcela		
TOTAL:		

b) 2c 3pa + 9c 4pa =

c) 4pa + 3c + 3pa 9c =

16) Coloque sobre a mesa 6 palitos e 8 cubinhos. Retire 3 palitos e 5 cubinhos. Quantos palitos e cubinhos ficaram sobre a mesa?

17) Coloque sobre a mesa 4 palitos e 3 cubinhos. Retire 1 palito e 7 cubinhos. Quantos palitos e cubinhos ficaram sobre a mesa?

Preencha o quadro:

	Quantidade de palitos	Quantidade de cubinhos
Peças sobre a mesa		
Peças retiradas		
Peças que restaram sobre a mesa		

18) Sobre uma mesa há 9 palitos e 6 cubinhos. Retire 9 cubinhos e 6 palitos. Quantos cubinhos e quantos palitos ficaram sobre a mesa?

19) Arme, efetue e dê o resultado das contas abaixo:

a) 8pa 7c – 6pa 3c =

b) 7pa 3c – 5pa 6c =

c) 6pa – 9c =

d) 8pa – 1pa 3c =

JOGO III:

MATERIAL: Peças do material dourado.
OBJETIVO: Entender que uma placa é formada por dez palitos.

Coloque sobre a mesa 3 palitos de um lado e, do outro lado, uma placa.

Perguntas:

1) Onde há mais palitos na placa ou no monte de palitos? Justifique sua resposta.

2) Coloque 4 palitos junto dos palitos que havia anteriormente sobre a mesa e faça a pergunta anterior. Justifique a resposta.

3) No monte de palitos, agora, há 7 palitos, coloque 3 palitos e faça a mesma pergunta feita anteriormente. Justifique a resposta.

4) Quantos palitos são necessários para formar uma placa?

5) Coloque sobre a mesa uma placa. Pergunte a um dos alunos se é possível retirar dali 3 palitos e como proceder.

Problemas:

1) Uma pessoa tem 8 palitos, ganhou 6 palitos de outra pessoa, com quantos palitos esta pessoa ficou?

2) Paulo tem 1 placa e 4 palitos, deu 6 palitos para Manoel. Com quantas placas e quantos palitos Paulo ficou?

3) Marta tem 2 placas e 3 palitos, Carlos tem 3 placas. Quem tem mais palitos? Justifique sua resposta.

4) Quantos palitos há em 3 placas e 2 palitos?

5) Numa caixa há 43 palitos. Quantas placas há na caixa? Retirando todas as placas da caixa, quantos palitos ficaram?

6) Numa caixa A há 4 placas e 4 palitos, numa caixa B há 3 placas e 9 pa-

litos. Juntando-se em uma caixa C as peças de A e B, quantas placas obteremos na caixa C? Quantos palitos soltos obteremos na caixa C?

Utilize a tabela abaixo para dar a resposta.

QUANTIDADE DE:	PLACAS	PALITOS
Caixa A		
Caixa B		
Caixa C		

7) Coloque sobre a mesa 37 palitos. Quantas placas e quantos palitos soltos há sobre a mesa?

8) **Responda sem usar o material dourado.** Quantas placas há em 89 palitos?

9) Eu tenho 8 placas. Quantos palitos estas placas representam?

JOGO IV:

MATERIAL: Peças do material dourado.
OBJETIVO: Entender que uma placa é formada de 100 cubinhos.

1ª Etapa: Coloque sobre a mesa uma placa.
2ª Etapa: Substitua a placa por palitos.
3ª Etapa: Substitua cada palito por cubinhos.

Conclusão:

Cada placa é composta de . . . . cubinhos.
(complete)

Problemas:

1) Coloque sobre a mesa 230 cubinhos. Quantas placas e quantos palitos soltos há sobre a mesa? Justifique sua resposta.

2) Coloque sobre a mesa 207 cubinhos. Quantas placas e quantos cubinhos soltos há sobre a mesa? Justifique sua resposta.

3) Separe 237 cubinhos. Agora complete a sentença abaixo corretamente.
As peças que separei correspondem a: ..... placas, ... palitos e .... cubinhos.

4) Numa caixa A há 3 placas, 4 palitos e 8 cubinhos, numa caixa B há 2 placas, 6 palitos e 6 cubinhos. Juntando-se em uma caixa C as peças de A e B, quantas placas obteremos na caixa C? Quantos palitos soltos obteremos na caixa C? Quantos cubinhos soltos obteremos na caixa C?

Utilize a tabela a seguir para dar a resposta.

QUANTIDADE DE:	PLACAS	PALITOS	CUBINHOS
caixa A			
caixa B			
caixa C			

5) Coloque sobre a mesa uma mão cheia de cubinhos. Converta estes cubinhos em palitos, placas e depois preencha a tabela abaixo:

Nº de cubinhos soltos	Nº de palitos soltos	Número de placas

Agora, observe o resultado da tabela acima e diga quantos cubinhos havia na sua mão.

6) **Responda sem usar o material dourado.** Quantos palitos há em 233 cubinhos?

7) Eu tenho 3 placas e 2 palitos. Quantos cubinhos estas placas e palitos representam?

8) **Faça sem usar o material dourado.** Possuo 732 cubinhos, coloque esta informação no quadro abaixo.

Número de placas	Nº de palitos soltos	Nº de cubinhos soltos

9) Márcia possui 372 cubinhos, ganhou 149 cubinhos de Paula, com quantas placas, palitos soltos e cubinhos soltos Márcia ficou?

Use o quadro:

	Placas	Palitos soltos	Cubinhos soltos
Márcia possui			
Márcia ganhou de Paula			
Total que Márcia ficou			

10) Sobre uma mesa colocou-se 5 placas, 6 palitos e 7 cubinhos. Retirou-se da mesa 8 cubinhos, 7 palitos e 2 placas. Quantas placas, palitos soltos e cubinhos soltos ficaram sobre a mesa. (Tente resolver usando somente o quadro abaixo).

	Placas	Palitos soltos	Cubinhos soltos
Colocou-se sobre a mesa			
Retirou-se da mesa			
Ficaram sobre a mesa			

Resposta:

11) Arme e efetue as seguintes contas:

a) 3Pℓ 2pa 3c + 2c 1pa 2Pℓ =

Use o quadro a seguir:

Tipos de peças	Placas (Pℓ)	Palitos (pa)	Cubinhos (c)
1ª parcela			
2ª parcela			
TOTAL:			

b) 3Pℓ 2c 3pa + 2c + 7pa =

c) 9c 9pa + 9c 8Pℓ 3pa =

d) 5Pℓ 3pa − 2Pℓ 2pa =

e) 7Pℓ 2pa 3c − 5Pℓ 2pa 4c =

f) 9Pℓ 3c − 2Pℓ 4pa 5c =