BOLETIM GEPEM

30

ÍNDICE

APRESENTAÇÃO

Este Boletim traz vários artigos de grande interesse.

O primeiro enfatiza a importância da linguagem na construção do pensamento matemático, embasada em fundamentos filosóficos. Trata-se da aula inaugural que a magnífica Reitora da Universidade Santa Úrsula proferiu no início do primeiro semestre letivo do Mestrado em Educação Matemática da USU em 1992.

Em seguida temos uma tradução realizada pelo professor Radiwal Alves Pereira de um interessante artigo de Stefan Kanter na Revista TIME sobre a incapacidade de compreender os números e o seu significado.

O terceiro é uma verdadeira aula de Matemática sobre a construção dos Números Reais usando o Corte de Dedekind, preparada pelo ilustre professor Luiz Adauto da Justa Medeiros em resposta a algumas questões significativas que surgiram durante a Semana da Matemática realizada na Universidade Santa Úrsula em 1990.

A experiência que aparece relatada no quarto artigo é de uma atividade realizada em 1991 durante a comemoração do 78º aniversário do Jardim Brasil — um bairro dormitório localizado na zona norte da cidade de São Paulo. O evento foi planejado e realizado por representantes da associação "Movimento Cultural Jardim Brasil" e pelo diretor do Colégio Sir Isaac Newton, autor do presente relato.

O artigo sobre o LOGO trata da origem desta linguagem computacional relacionando-a com os objetivos da proposta de Papert. Esta linguagem é focalizada também como recurso para a introdução em níveis mais abstratos do pensamento.

O artigo do professor Paulus Gerdes trata de observações feitas por este pesquisador e sua equipe em seu trabalho em Moçambique, na base de dados de etnografia, lingüística e arqueologia.

Por fim apresentamos a listagem dos artigos publicados nos

Boletins desde o número 18 até o atual. Os anteriores constam do nº 18. De agora em diante traremos, a cada cinco números, a listagem dos artigos neles incluídos.

DIRETORIA DO GEPEM

USOS DA LINGUAGEM

Maria do Carmo Bettencourt de Faria
Reitora da USU
Aula inaugural do Mestrado em Educação Matemática 1992
Universidade Santa Úrsula

Pode parecer à primeira vista que não existe interesse no âmbito deste curso em estudar, do ponto de vista da filosofia, o que é a linguagem e retomar discussões que têm algumas vezes mais de dois mil anos.

No entanto, ao tomarmos em mãos o tema, ficamos surpreendidos com sua atualidade. Parece que nos encontramos em mais uma curva do caminho que se desenvolve em espirais, e olhar para as muitas voltas já percorridas nos ajuda a compreender, não o passado, mas o nosso presente, e muitas vezes, as perspectivas para o nosso futuro.

Gostaria de tomar como eixo de minha exposição aqui hoje, três momentos que realçam ou marcam três diferentes usos da linguagem, momentos que hoje, novamente, parecem entrelaçar-se. A linguagem mítica, a lingüagem jurídica e a linguagem científica. Cada um destes níveis abriu progressivamente espaço afirmando-se ou substituindo-se ao que o precedeu e parece que hoje vemos que a ciência novamente se volta para a esfera do direito e da ética em busca de limites que ela não reconhece mais.[1]

Se saímos do nível da banalidade, do uso cotidiano da linguagem que serve para que digamos ao nosso próximo os nossos pensamentos, desejos e emoções, a primeira dimensão em que a linguagem convoca a nossa reflexão é a mítica.[1a]

Linguagem mítica:

O primeiro sentido de "mito" não é o que tem hoje para nós — fábula, história fantasiosa que, na falta de uma explicação científica, é adotada para explicar um determinado fenômeno — mas o de narração verdadeira; aquela que desvenda uma verdade oculta aos olhos do comum dos mortais.

Na Grécia antiga, ainda dominada por uma cultura oral, os **aedos** cantadores, adivinhos e decifradores de enigmas, os poetas que narram os feitos dos heróis são chamados **Mestres da Verdade**.

O mito é uma tentativa de apreensão da totalidade desvelando-lhe o sentido. Estabelece uma hierarquia entre as potências naturais, esboçando um retrato simbólico da ordem que rege o mundo.

Constitui uma linguagem aberta, ambígua, que permite múltiplas interpretações, sendo que só a interpretação correta, privilégio de poucos, salva. Na mitologia grega, as musas inspiradoras dos poetas são parentes das sereias, que com seus cantos sedutores arrastam os homens para os abismos do Oceano.

No mito encontramos a prevalência do símbolo, da linguagem figurada sem compromisso com a objetividade e o rigor. Ele visa um **efeito** no mundo do homem. Por isso a celebração do sagrado é considerada essencial para a manutenção da ordem do mundo.

O mito é eficaz ainda sob novo aspecto: o de ligar-nos, religar-nos ao mundo divino. Por isso mesmo, mito e celebração vão juntos.

A palavra ritual é eficiente — ajuda no nascimento e na morte, no plantio e na colheita. Consolida o grupo, sacraliza os laços que unem entre si uma comunidade.

A linguagem mítica estabelece uma relação vertical entre o Divino, o poeta/profeta e o comum dos mortais. É uma palavra que se afirma por si e não admite discussão nem contestação. É uma palavra de autoridade que ata dois mundos — o humano e o divino, o sagrado e o profano.

É uma verdade indemonstrável, que exige adesão (crença) na medida em que diz respeito a "outro mundo", "àquele tempo", outro em relação à nossa realidade cotidiana. Mundo outro, tempo outro, no qual não vigoram as relações nem a lógica do "nosso" mundo.

O mito serve ainda para justificar os costumes e as leis, as liturgias e as interdições que dão sua feição própria a um determinado povo. O mito educa para a comunidade ao mesmo tempo em que representa o laço mais forte que une essa comunidade.

Como história verdadeira, confere aos que a ele aderem um conhecimento mais completo das coisas e dos homens. É mesmo única/principal fonte do conhecimento que realmente importa, como metáfora iluminadora de sentido.

Perante a linguagem mítica não há escolha a ser feita, nem juizo a ser proferido. O que está em causa é a própria existência do homem. Ou o homem adere e obedece ao discurso mítico ou sua própria existência é posta em causa.

O mito não se submete à análise pois sua lógica é própria e as relações que tece não se deixam decifrar pela luz fria da Razão.

Apesar de todas estas características, Aristóteles, no primeiro Livro de sua Metafísica, estabelece como que uma continuidade entre o amor aos mitos e o amor à sabedoria, característica maior da ciência que pretende fundar. O mito é considerado por ele como um patrimônio de verdades que, uma vez despidas de seu caráter fabuloso e alegórico, têm muito a nos ensinar. A razão é capaz de reconhecer, como brasas sob as cinzas, aquilo que genuinamente lhe pertence, e tem o dever de traduzí-lo em outro discurso, o discurso claro e articulado da ciência.

Essa passagem no entanto não se dá sem uma mediação — antes do advento do discurso científico analítico e rigorosamente demonstrado, assistimos à ascensão e domínio do discurso jurídico que surge junto e indissociável da realidade da Polis.[2] Seria mesmo impensável em outro contexto.

A passagem do discurso mítico/poético ao discurso jurídico/político implicou num duplo processo de laicização e democratização do poder no contexto da Polis.

Detienne[3] localiza na prática guerreira de divisão do espólio da batalha entre os combatentes o advento dessa nova ordem. Os bens pilhados ocupavam o centro de um grande círculo formado pelos guerreiros, todos com igual direito de empunhar o cetro e, do centro do círculo ,defender a sua causa submetendo-a ao debate e julgamento dos outros. A relação vertical se vê substituída por uma relação horizontal — iguais se reconhecem como iguais e com igual direito à palavra.

Deste debate a divindade está ausente. Ela apenas pode ser invocada para maior justiça das palavras. Mas são palavras de mortais que não enunciam uma verdade indiscutível ou irrecorrível. O debate se instaura. A dialética nasce. Por meio dela se criam regras, leis, reconhecidas por todos como justas. Por meio destas se instituem os tribunais que definem a partir de si próprios o direito sobre o qual devem se pronunciar.

A prática guerreira inspira o estado democrático: como os guerreiros, os cidadãos se reconhecem como iguais e com igual direito de concordar ou divergir quanto à decisão mais justa numa determinada causa. É do povo reunido em assembléia que emanam os decretos decisórios. É do meio desse mesmo povo que serão eleitos/sorteados os magistrados que deverão ocupar os tribunais cujas atribuições e competência também lhe são conferidos pelo mesmo povo.

Esse discurso jurídico político se estrutura em torno do juízo: é preciso decidir entre o sim e o não. Decidir entre causas contrárias. Entre o ser e o não ser. Decisão que muda e tem que ser a cada instante renovada diante do real concreto, do jogo de forças que se altera, do inimigo perante o qual é preciso defender-se.

O povo é continuamente chamado a proferir seus juízos na ágora. A votar o pró ou o contra, a por sua vez julgar o julgamento da **boulê** (o **pró bouleuma**). Os argumentos se sucedem no debate. Os diversos ângulos e interesses são examinados por cada uma das partes interessadas.

Dialética, juizo, decisão, ação.

Ao contrário do discurso mítico, o discurso jurídico político diz respeito essencialmente ao tempo histórico; ao aqui e agora; ao momento certo da decisão.

Sua virtude não está no fato de ser inspirado pelo divino, mas em sua prudência: em sua acuidade e atenção para o concreto, o cotidiano, o "real".

Como o discurso mítico o discurso jurídico político também gera efeitos: ele é performativo. Molda o mundo dos homens, confere-lhe forma e sentido. Institui a cidade e educa para a comunidade, moldando o cidadão, mudando suas disposições, como um **pharmacon** poderoso.

Nesse contexto, ganham relevo os sofistas, mestres da dialética, educadores dos jovens cidadãos a quem ensinam a arte dos belos discursos capazes de convencer os demais tornando-se cheio de força, bem como os artifícios da dialética.

Além de histórico, o discurso jurídico político, ao contrário do discurso mítico, pode ser fraco ou forte. Sua capacidade de moldar a Polis depende diretamente de seu poder de convencimento, de seu brilho, de sua veemência. Só assim ele se torna o dicurso da própria Polis, discurso forte que se opõe ao do indivíduo isolado, movido apenas por seus interesses mais imediatos.

O discurso forte se baseia no consenso dos cidadãos. É o discurso da **aretê** o discurso do homem da Polis, educado pelos cidadãos seus pais, pela escola e pela sociedade como um todo. Expressa as convicções de um povo; é um discurso de livres que entre si discutem suas causas e definem suas convenções.

A "verdade", deste ponto de vista só pode ser relativa. Não se decide uma causa sem ter em mente o tempo e o lugar, as relações e as reações, as pessoas e os partidos. Verdade e justiça se confundem num discurso que tem a ver apenas com o homem e seu mundo de relações.

É a descoberta do arbítrio humano que funda esse discurso. O homem se descobre senhor de seu destino, capaz de conduzir sua vida comum para finalidades previamente escolhidas.

Seu mundo segue suas próprias leis, sem estar condicionado ou determinado por necessidades imutáveis ou regras fixas. A ordem buscada é uma ordem humana, uma ordem a ser construída no horizonte restrito da Polis.

Por isso o discurso forma um só corpo com a coisa dita, possui uma densidade própria; coisa entre coisas, um poder que se afirma como superior entre outros poderes, é capaz de interferir no curso do mundo e impor sua lei (**nomos**) à natureza (**phúsis**). O logos humano ocupa o lugar do logos divino.

A natureza é deixada à parte; suas questões não interessam e são vistos com maus olhos aqueles que esquecem os problemas da cidade olhando os céus. Lembremos o exemplo de Tales ridicularizado pela escrava ou o de Anaxágoras interpelado por seu desinteresse para com as coisas de sua cidade. Nenhum objeto pode ser mais importante que os negócios da cidade. A oposição entre a lei e a natureza aparece de forma muito clara no discurso de Cálicles, relatado por Platão em seu Górgias: "Esta é pois a verdade, e tu o reconhecerás pois, se abandonando agora a filosofia, desvias tua atenção para coisas de maior importância (...) E, com efeito, os que se comportam assim (i.é: os que insistem em filosofar até idade avançada) chegam a desconhecer as leis da cidade e o modo de falar adequado para tratar com os demais nos negócios públicos ou nas questões privadas. São, numa palavra, inteiramente ignorantes dos costumes, e quando tomam parte num negócio público ou privado tornam-se objeto de caçoada."[4]

Na defesa das causas, na dialética que se desenrola na praça, quando opiniões são discutidas em busca da melhor decisão, cada adversário explora o quanto pode a ambigüidade da linguagem para impor seu ponto de vista. As palavras são postas à prova; discute-se sobre seu significado para decidir enfim sobre o é/não é de cada sentença, de cada declaração. Mas essa aparente busca de rigor quanto ao significado e quanto ao entendimento correto dos termos não passa afinal de um jogo de cena voltado para o efeito que produz sobre o auditório, interessado na decisão que dele emana.

O discurso jurídico político dos sofistas gregos não se preocupa em demonstrar suas teses mas em torná-las convincentes. O poder de convencimento, a eloqüência e a própria sedução estética tornam dispensável e supérflua (mesmo porque impossível) a demonstração rigorosa.

O fato do discurso da Polis prevalecer sobre o discurso da Phúsis não significa que este último já não tivesse se iniciado. Contemporâneos, ambos se ignoram mutuamente. O debate entre sofistas e físicos ainda se dá no âmbito jurídico. A ciência nascente é julgada pelo direito. Os técnicos do **nomos** se contrapõem e questionam os teóricos da **Phúsis**. Mais de um processo ilustra esse nascimento conflitivo.

O mundo dos homens e o mundo das coisas seguem caminhos paralelos e raramente se encontram. O físico pré-socrático interessado no elemento gerador ou no movimento dos astros parece sem pátria. Sua reflexão se desenvolve fora do espaço da Polis, independente dela, e orgulhosamente recusa ser por ela julgado. Heráclito refugiado na montanha é apenas mais um sinal desta exclusão voluntária. O mundo do homem se vê de repente confrontado a uma outra instância — instância externa, fundada sobre outros princípios — até então desconhecida.

Como o discurso mítico, e ao contrário do discurso jurídico/político, o discurso da **epistheme** se pretende trans ou a-histórico. Não se interessa tanto, ou em primeiro lugar, pelas causas humanas e as leis dos homens mas pelas coisas da natureza e as leis imutáveis e fixas que regem seus fenômenos.

A ciência precisa inventar para si um novo modelo — e a matemática serve aqui de inspiração. Todos sabem que, no pórtico da Academia platônica se inscrevia o seguinte conselho: "aqui só entra quem conhece matemática".

O discurso da ciência, não visa um efeito sobre o interlocutor: não visa o convencimento, nem se assume como **pharmacon**. Ao contrário, procura diminuir seu peso e tornar-se totalmente transparente diante de um objeto que o transcende e sobre o qual não tem, em princípio, nenhuma interferência. Apagar-se diante do objeto para que este, em si mesmo, se evidencie aos olhos de todos — eis o novo projeto de um saber **theórico** que busca, para além de todo interesse, conhecer a ordem imutável que rege todas as coisas.

Aristóteles "batiza" este novo tipo de discurso como **logos apophântico**, de **phásis**, manifestação. É o discurso que permite ao próprio Ser manifestar-se; é o discurso que pretende dizer algo acerca de algo; que tem a intenção de falar não de si mesmo, mas do objeto.[5]

O projeto desse saber de novo tipo exige um novo tratamento da linguagem e uma nova articulação do pensamento.

A dialética cede lugar à analítica; não se trata aqui de escolher entre causas opostas mas em extrair de premissas previamente assentadas a conclusão que delas deriva necessariamente.

O juizo é apenas uma operação intermediária na construção do argumento que demonstra cabalmente suas conclusões. A objetividade ocupa o lugar das opiniões subjetivas. A **doxa** adquire um sentido pejorativo, de saber inferior e pouco seguro, tal como fica evidente no Poema de Parmênides.

Nessa operação, a linguagem perde o caráter performativo do discurso jurídico e a eficácia da celebração litúrgica do mito. Ela atua como um espelho — torna-se "especulativa" — contenta-se em enunciar uma verdade que está para além de seus limites. Com Aristóteles a linguagem se destaca definitivamente do ser: **logos** e **on** habitam suas próprias regiões, são regidos por suas próprias leis e todo o problema será o de buscar uma "adequação" do primeiro ao segundo, fazendo com que a imagem refletida na linguagem reproduza o quanto possível, o próprio real.

A ambigüidade da linguagem não trabalha mais a favor, mas contra: ela deve ser superada na medida em que o permite a finitude do intelecto humano. A margem a interpretações subjetivas deve ser estreitada o quanto possível e para isso a cada termo empregado deve corresponder um significado claramente definido.

No entanto a ambigüidade é inerente à linguagem do homem, uma vez que este dispõe de um léxico bastante limitado para referir-se à multiplicidade quase infinita do real. Assim, se digo por exemplo **agudo** e com esta palavra qualifico um som, claro está que seu significado será alterado se emprego o mesmo termo para falar de um ângulo. As palavras portanto estão sempre nos criando armadilhas que só serão desfeitas por um rigoroso trabalho de análise que distingua entre si os diversos significados de um termo, atribuindo a cada um deles uma definição diferente. Sem esse trabalho prévio, a dialética acaba por transformar-se num jogo vazio e fútil, na medida mesma em que os significados diversos são confundidos entre si, fazendo com que os próprios interlocutores terminem por não saber do que exatamente estão falando. Neste jogo de palavras o discurso fala apenas de si mesmo: palavras respondem a palavras, confundindo, mais que esclarecendo, a compreensão "do que é".

A linguagem matemática, artificial, inventada pela razão, e despida de ambigüidade oferece por isso um modelo sedutor para quem busca o rigor de um saber imutável e universal.

Além da questão da linguagem, o advento do discurso epistêmico funda-se ainda em outro pressuposto, herdado dos mitos: a existência de uma ordem imutável e divina, necessária e eterna, que rege todas as coisas (inclusive as humanas) e confere a tudo sua medida harmônica. Há uma racionalidade na própria natureza e por isso ela pode ser tomada como objeto de conhecimento. Essa racionalidade é conferida pela causalidade: conhecer cientificamente é conhecer a causa que determina a ser o que é. No plano do conhecimento, a premissa está para a conclusão da mesma forma como, no plano da realidade, a causa está para o efeito.

Assim, diferente do que concebia o mito, essa ordem não se coloca num plano inacessível à razão, ao qual só têm acesso os poucos eleitos dos favores divinos. A razão, da qual são dotados todos os homens, pode conhecê-la: ela é inteligível. Os fatos e fenômenos da natureza não se apresentam de forma desordenada e caótica, mas regidos pela causalidade: a todo efeito corresponde uma causa, e vice-versa. Conhecer a causa ou conhecer a razão significam o mesmo. E não por acaso.

O conhecimento científico encontra na linguagem depurada pela análise o seu instrumento, **organon**. Ao enunciar a ordem de modo rigoroso e claro pode comunicá-la aos demais, tornando-a "pública".

Por abranger a totalidade do real, essa ordem se estende sobre o mundo do homem, onde se encontra imperfeitamente realizada sem por isso deixar de apontar para "o que era para ser".[6] Ela traz consigo um imperativo para os homens: torna-te o que és. Há, em cada ser, uma "natureza" que o determina a ser o que é; natureza imutável e universal que move o ser como seu termo e plenitude.

Isto quer dizer que o arbítrio humano não se funda sobre si mesmo mas deve curvar-se à ordem eterna que se mostra de forma mais clara nos fenômenos da natureza sem deixar de estar presente e ativa na esfera do humano, pelo menos enquanto horizonte ideal.

Aristóteles, que dá a esta concepção o seu acabamento definitivo, é chamado por Serres[7] de "jurista físico" pois, seguindo nisso o ideal platônico, procura um modo de detectar na cidade ou na esfera dos comportamentos individuais essa mesma ordem, embora ela se manifeste aí como um esboço ou rascunho, misturada que vem com as ações e intenções humanas.

Além das ciências sobre a natureza, que podem e devem buscar o rigor da demonstração necessária, são possíveis ciências de outro tipo, que têm por objeto a **praxis**: a Ética e a Política. Estas retomam as características inerentes ao discurso político, tentando no entanto fundá-lo sobre pressupostos de uma "meta-física".

Segundo ele, a Justiça (conceito que abrange também mais de um significado) não é uma igualdade mas uma proporcionalidade entre desigualdades tal como o tamanho dos braços de uma balança, proporcional aos diferentes pesos, pode restabelecer em meio à diferença, uma igualdade. Esta proporção se expressa numa fórmula algébrica e mais uma vez a matemática oferece seu modelo e o filósofo sonha em expressar a harmonia universal, senão matematicamente, pelo menos estabelecendo analogias com o modelo matemático.

O homem é encarado como um microcosmo. A estrutura política se projeta para o universo e vice-versa, a ordem da Cidade deve de certa forma reproduzir a ordem do universo. Essa ordem comum repousa e se justifica a partir de um fundamento meta-físico — encontrável para além da natureza sensível e mutável, mas que torna essa mesma natureza, inteligível.

A cadeia causal que torna o fenômeno inteligível remete a uma primeira Causa.

No fundo dessa Ordem perfeita e eterna encontramos o Deus que a sustenta e garante em sua serena e perfeita imobilidade. E a ciência buscada é a que permitirá restabelecer a cadeia de elos sucessivos que, ligando ao Fundamento absoluto todos os fenômenos, torna-os, por isso, inteligíveis.

A modernidade, construída sobre a morte desse fundamento, perdeu de vista os laços que uniam estreitamente, de forma solidária, o homem e a natureza. Esse elo perdido, libertou a ciência moderna de suas amarras meta-físicas. Como nunca antes, assistimos o avanço irresistível da tecno-ciência, e afirmar-se de forma cada vez mais arrogante a onipotência da racionalidade científica. A partir do séc. XIX, conhecido como "século das luzes", "a ciência vence o direito... as leis do mundo das coisas vencem as leis do mundo dos homens."[8]

Movida por uma lógica interna própria, a técnica se transforma em tecnocracia e o seu comando diz: tudo deve ser considerado como possível, tudo o que é possível, deve ser tentado. Novamente, ciência e direito seguem universos paralelos. Nenhum reconhece em seu campo a jurisdição do outro. "Sobrevivemos entre direitos positivos abalados pela história das dominações." "A ciência emite leis sem sujeito, neste mundo sem homens"[9]. Os decretos da ciência, a palavra dos especialistas, fazem com que todos os outros direitos pareçam arbitrários.

Mas, no limiar do terceiro milênio essa situação já revela de forma dramática os seus limites. O poder de destruição de que nos dotamos agora nos assusta. A devastação da terra, "nossa nave comum", exige de forma cada vez mais premente uma reação e uma mudança de rumos.

A ecologia nos revela de forma dramática a existência de uma ordem e de uma medida que devem ser respeitados sob pena de aniquilamento total. "Pela primeira vez, em trezentos anos, a ciência se dirige ao direito e a razão ao juízo"[10]. O racional deixa-se questionar pelo razoável.

O mesmo Serres prevê por isso uma profunda alteração no âmbito da educação: para que possamos desenvolver um juízo prudente, tornando assim a razão sábia. Com isso, o ideal grego de harmonia e medida, a noção de **húbris** como desmedida que traz como conseqüência terríveis castigos, revelam sua surpreendente atualidade. Mais do que nunca a filosofia se volta para os antigos, não como o exercício de uma erudição fechada e esnobe, mas com a humildade de quem reconhece que ainda tem a aprender com eles muito da sabedoria perdida.

NOTAS

[1] Sobre Mito e a função da linguagem mítica no contexto da Grécia antiga, pode-se consultar com proveito as obras de Mircea Eliade e a obra de Marcel Detienne, *Os Mestres da Verdade na Grécia Arcaica*, bem como os trabalhos do Prof. Junito Brandão sobre Mitologia Grega.

[1] Cf. a esse respeito o trabalho de Michel Serres. O Contrato Natural, Rio, Nova Fronteira, 1991 e também o artigo de Gilberto Hottois, Aspects d'une Philosophie de la Technique in Ethique et Technologie, Bruxelas, Ed. Université Libre de Bruxelles.

[2] Sobre o advento do discurso jurídico político e sua associação ao estado grego, cf. o mesmo Detienne. Sobre as relações que articulam o discurso jurídico ao nascente discurso científico, consultar a obra de Serres, *O contrato Natural.* Sobre os Sofistas gregos numerosos trabalhos podem ajudar, em especial os de Bárbara Cassin, "*Ensaios Sofísticos*", de Romeyer D'Herbey, "*Os Sofistas*" e Dupréel, "*Les Sophistes*".

[3] Detienne, Marcel, op. cit.

[4] Cf. Platão, *Górgias 485,* Obras Completas, Ed. Aguilar, Madrid, 1979.

[5] Aristóteles, *Analíticos Posteriores.* Sobre o conceito de **logos apophântico** pode-se consultar o parágrafo a respeito, de Heidegger, em "*Ser e Tempo*" e a obra de Pierre Aubenque, "*Le Problème de l'Être*".

[6] Para Aristóteles, a linguagem científica, para ser universal e necessária, deve visar apenas o "essencial" deixando de lado aspectos mutáveis e acidentais. A expressão grega traduzida tradicionalmente por "essência" significa, literalmente, "o que era para ser" **tó ti ên einai**. A ciência é, portanto, menos um discurso sobre "o que é" efetivamente (sempre imperfeito), e mais o desvelamento da plenitude que se apresenta como horizonte para o qual tende tudo o que é.

[7] Serres, Michel, *O contrato Natural.* Ed. Nova Fronteira, Rio, 1991.

[8] Cf. Serres, 1991, p. 96.

[9] Serres, 1991, p. 99.

[10] Serres, 1991, p. 102.

BIBLIOGRAFIA

ARISTÓTELES, *Seconds Analytiques.* Paris, Vrin, 1978.

AUBENQUE, Pierre. *Le Problème de l'Etre chez Aristote.* Paris, PUF, 1977.

BARKER Sir Ernest. *Teoria Politica Grega.* Brasília, Ed. Universidade de Brasília, 1978.

BRANDÃO, Junito de Souza. *Mitologia grega.* Petrópolis, Vozes, 1989.

CASSIN, Bárbara. *Ensaios Sofísticos.* Rio de Janeiro, Siciliano, 1990.

DETIENNE, Marcel. *Les Maîtres de la Verité dans la Grèce Archaïque*. Paris, Maspero, 1967 (existe tradução para o português).

ELIADE, Mircea. *Aspectos do Mito*. Lisboa, Edições 70, 1986.

VERNANT & NAQUET. *Mito e Tragédia na Grécia Antiga*. São Paulo, Ed. Brasiliense, 1991.
DETIENNE & SISSA. *Os Deuses Gregos*. São Paulo, Companhia das Letras, 1990.

DUPREEL, Eugène. *Les Sophistes*. Neuchatel, Griffon, 1980.

HEIDEGGER, Martin. *Ser e Tempo*. Petrópolis, Vozes, 1989.

ROMEYER DHERBEY, Gilbert. *Os Sofistas*. Lisboa Edições 70, 1986.

SERRES, Michel. *O Contrato Natural*. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1991.

O DOMÍNIO DO MEDO DE CALCULAR

Um livro novo mostra o quanto a Matemática é mal entendida
Da revista TIME

A luta contra o analfabetismo nos Estados Unidos tem sido tão acirrada que um outro inimigo, na fase de aprendizagem das primeiras letras, tem permanecido escondido. Bruce R. Vogeli, Chefe do Departamento de Matemática e de Ciências da Educação do Colégio de Professores da Universidade Colúmbia, chama a esse inimigo de "o mais intocável produto educacional da década." O cientista Martin Gardner, autor do livro "The Relativity Explosion", considera que esse inimigo é "um problema que cada vez se torna pior". O nome do inimigo é **Inumeralismo,** ou a incapacidade de compreender os números e o seu significado.

Agora, John Allen Paulos, professor de matemática da Universidade Temple, acaba de escrever um livro sobre analfabetismo em matemática. Com o título "Innumeracy" (editora Hill and Wang), o livro procura explicar porque tanta gente se sente incapaz de enfrentar os números e mostra como se pode aprender a trabalhar e brincar com eles. Paulos, que tem 43 anos de idade, não tem paciência com pessoas ignorantes que quase se vangloriam ao afirmar: "Não sei nem fazer as contas no meu talonário de cheques", ou "Sou uma pessoa e não um amontoado de números". Tenho sofrido, diz ele, "com a idéia generalizada de que Matemática é ciência esotérica e com pouca relação ou conexão com o mundo real".

Paulos refuta essa idéia examinando boletins da Bolsa de Valores, média de acertos na bola nos jogos de beisebol, seções de psicologia dos jornais, atas de eleições, tratamentos médicos fraudulentos e as razões porque o "blackjacket" é um jogo melhor do que o de dados. Os que suam frio à simples menção de cálculos ou de problemas de geometria, podem ficar tranqüilos. Esse elegante livro é breve, inteligente e cheio de aplicações práticas. Melhor do que tudo é que o livro não tem "dicas" no final de cada capítulo e, como generosamente admite Paulos, "a passagem difícil pode ser omitida com impunidade".

Com uso de fórmulas fáceis, o autor demonstra que a probabilidade de alguém ser vítima do terrorismo é menor do que 1 em 1.500.000, enquanto que a probabilidade de morte por afogamento é de 1 em 68.000 e a de morte em acidente de automóvel é de 1 em 5.300. Mostra também que o número possível de diferentes mãos que o jogador de pôquer pode receber é 2.598.960 e que o tamanho de uma célula humana está para o tamanho da pessoa, assim como o tamanho da pessoa está para o tamanho de Rhode Island. Paulos também observa que 367 pessoas têm que ser consideradas para ter-se a certeza de que duas delas façam anos no mesmo dia. Sobre a pergunta do número de pessoas que devem ser consideradas para que haja 50% de probabilidade de que duas delas façam anos no mesmo dia, a resposta surpreendente é que bastam 23, diz ele. Os que duvidarem podem encontrar a prova no capítulo "Probabilidade e Coincidência".

Outros capítulos interessantes e esclarecedores são: "Exemplos e Princípios", no qual Paulos mostra porque o gigante Gargântua seria uma impossibilidade física; "Pseudo-Ciência", onde o autor faz crítica mordaz da parapsicologia e da astrologia; "Estatística, Negócios e Sociedade", onde algumas perguntas surpreendentes surgem, como por exemplo: "Que percentual de alunas universitárias gostam de assistir ao programa dos Três Patetas?" (De acordo com pesquisa pessoal do autor, esse percentual é de 8%).

Outro problema: Porque há tanta gente que nada sabe de números? A resposta é que adultos que se embaraçam com números são aqueles que "foram intimidados por professores autoritários e que, às vezes, discriminavam os alunos por seu sexo", segundo afirma Paulos, ele próprio vítima de professores incompetentes. "Achavam que havia alunos com mente matemática e outros avessos à Matemática". O resultado desse falso conceito era a criação de um abismo na turma, entre alunos rejeitados e com tal ansiedade que nada aprendiam e outros que tinham prévia garantia de sucesso na sua aprendizagem.

Gardner, autor de livros e ensaios de Matemática, também se queixa dos professores, particularmente dos de ensino elementar, onde muitas turmas são lecionadas por professores com pouca ou nenhuma capacidade em Matemática. "Quando uma turma é lecionada por professores desinteressados", observa ele, "a classe também se desinteressa". Outra dificuldade para obter sucesso com os números, argumenta Gardner, foi a ênfase dada à Matemática Moderna, que apareceu na década 1950-1960. Diz ele: "Os alunos aprendiam tudo sobre conceitos avançados, mas nada sobre Matemática básica".

Apesar dos números não estarem em alta nos Estados Unidos, de acordo com Vogeli, está surgindo material didático que muito enfatiza aplicações práticas. Mudanças estão em andamento, diz ele. Livros como "Innumeracy" e "The Closing of the American Mind", de Allan Bloom, estão levando ao conhecimento da comunidade dos professores a insatisfação existente. Assim fazendo, esses livros servem para reduzir a probabilidade de que os americanos continuem a se afogar no "inumeralismo".

Um parágrafo um tanto macabro do livro Innumeracy é o seguinte:

Sangue no Central Park.

Qual é o volume de todo sangue humano existente no mundo? O homem adulto tem em média 6 quartos de galão de sangue, a mulher adulta um pouco menos, crianças muito menos. Assim, se admitirmos que os 5 bilhões de habitantes do mundo têm, em média, um galão de sangue por pessoa, então há no mundo cerca de 5×10^9 galões de sangue humano. Como existem 7,5 galões em cada pé cúbico, há aproximadamente $6,7 \times 10^8$ pés cúbicos de sangue no mundo. A raiz cúbica de $6,7 \times 10^8$ vale aproximadamente 870. Assim todo sangue do mundo caberia num tanque cúbico com 870 pés de aresta, menos do que 1/200 de milha cúbica! O Central Park em Nova York tem de área 840 acres, ou 1,3 milhas quadradas. Se paredes fossem construídas em torno do Central Park, todo o sangue do mundo cobri-lo-ia até uma altura de quase 20 pés.

NOTAS

[1] O artigo é tradução de matéria publicada em 30/01/89 no TIME, assinada por Stefan Kanfer, na seção EDUCATION. A tradução foi feita pelo professor Radiwal Alves Pereira.

[2] Para os colegas não familiarizados com unidades usadas nos EE.UU., lembramos que:

1 acre = 4.047 m^2
1 galão = 3,785 l
1 pé = 0,305 m

CORTES DE DEDEKIND E O NÚMERO π

Luiz Adauto da Justa Medeiros
Instituto de Matemática — UFRJ

INTRODUÇÃO

O presente artigo é motivado por uma conferência proferida pelo autor, durante a Semana da Matemática realizada na Universidade Santa Úrsula, em 1990. Tratava-se do ensino dos números reais dando origem a várias questões significativas. Entre estas, destaca-se uma, formulada pelo Professor Abraham Arcavi, do Instituto Weizmann — Israel, que consistia em saber como definir o número π por intermédio do corte de Dedekind. Naquele momento, várias respostas intuitivas foram dadas. O objetivo do presente artigo é responder de modo rigoroso à questão proposta pelo Professor Arcavi.

Com o objetivo de tornar a exposição agradável e auto-suficiente faz-se breve revisão da noção de corte de Dedekind.

1. REVISÃO SOBRE CORTE DE DEDEKIND

Com **Q** representa-se o corpo ordenado dos números racionais.

DEFINIÇÃO 1. Denomina-se corte de Dedekind em **Q** a um par de classes A, B de racionais, satisfazendo às condições:

D1) as classes A e B contêm todos os racionais de modo que cada racional pertença, exclusivamente, a uma ou outra dessas classes;
D2) cada racional de A é menor que todo racional de B.

Analisando-se a Definição 1 conclui-se que um corte nos racionais tem as propriedades:
i) a classe A possui um máximo (então a B não tem mínimo)
ii) a classe B tem mínimo (então A não tem máximo)
iii) nem A possui máximo nem B possui mínimo.

Para tornar claro o argumento, considere-se os exemplos:

EXEMPLO 1.
Tome-se o racional 3/7, por exemplo. Coloque-se em A todos os racionais $r \leq 3/7$. Em B os racionais restantes. De outro modo, coloque-se em A os racionais $r < 3/7$ e em B os restantes.

EXEMPLO 2.
Coloque-se em A os racionais r tais que $r^2 < 2$, o número zero e os negativos. Em B os racionais restantes.

Os casos do Exemplo 1 estão nas condições i), ii), definindo um racional. O caso iii não define racional, como no Exemplo 2. Por isto, no caso iii diz-se que o corte define um irracional. Portanto, por meio de cortes aumenta-se o corpo **Q**, introduzindo os irracionais. Demonstra-se que a união dos racionais com os irracionais constitui um corpo ordenado, denominado corpo dos números reais, representado pela letra **R**. Demonstra-se também que, efetuando-se um corte em **R**, com classes de números reais nas condiçõs D1) e D2), encontra-se um número real. Esta propriedade de **R** caracteriza-se, segundo Dedekind, dizendo-se que **R** é contínuo. Outro aspecto significante de ***R*** é que se representa de modo biunívoco por intermédio dos pontos de uma reta, dita pontilhada. Assim, **R** é, muitas vezes, denominado reta numérica. Usa-se a notação x para representar um número real ou o par (A, B) de classes que o definem por meio do corte.

Observe-se que para definir número real, por meio de corte, são considerados todos os racionais para compor as classes A e B. A seguir, introduz-se o conceito de classe contígua permitindo caracterizar o número real sem necessariamente usar toda coleção **Q**.

DEFINIÇÃO 2. Diz-se que dois subconjuntos H e K, de números racionais, são classes contíguas, quando forem satisfeitas as seguintes condições:

C1) todo número h de H é menor que todo k de K;

C2) para cada $\varepsilon > 0$ existe $h \in H$ e $k \in K$ tais que $k - h < \varepsilon$

PROPOSIÇÃO 1. Se (A,B) for um corte de Dedekind nos racionais, então A e B são classes contíguas.

DEMONSTRAÇÃO. A condição C1) segue-se do fato de (A,B) ser um corte. Para verificar C2), considere-se $a \in A$ e $b \in B$ quaisquer e $\varepsilon > 0$ um número dado. Tome-se $0 < \sigma < \varepsilon$ um racional e forme-se a coleção de racionais:

$$a, a + \sigma, a + 2\sigma, \ldots, a + n\sigma, \ldots$$

Seja $a + n\sigma$ o primeiro racional pertencente a B. O seu antecedente $a + (n-1)\sigma$, na coleção definida, pertence a classe A. Existe natural n tal que $a + n\sigma > b$. Tem-se, portanto, para cada $\varepsilon > 0$, existem:

$$a + (n-1)\sigma \in A \text{ e } a + n\sigma \in B,$$

tais que a diferença é menor que ε, provando C2).

PROPOSIÇÃO 2. Todo par de classes contíguas H e K, de racionais, determina um corte de Dedekind nos racionais.

DEMONSTRAÇÃO. De fato, para obter-se um corte de Dedekind a partir de um par de classes contíguas H e K é suficiente definir-se as classes A e B como segue. Coloca-se em A todos os racionais menores ou iguais a qualquer número de H. Na classe B são colocados racionais maiores ou iguais a qualquer número de K. Resulta que (A,B) é um corte nos racionais.

Do ponto de vista das aplicações é mais simples trabalhar-se com classes contíguas do que com cortes. Note-se que, de modo análogo, definem-se classes contíguas de reais.

2. INTERVALOS EM NINHO

Considere-se duas sucessões (x_n), (y_n) de números reais, $x_n \leq y_n$ e defina-se a sucessão de intervalos fechados $I_n = [\, x_n, y_n]$.

DEFINIÇÃO 3. Diz-se que a sucessão (I_n) de intervalos fechados de números reais é uma sucessão em ninho, quando forem satisfeitas as condições seguintes:

N1) a sucessão (I_n) é decrescente, isto é, $I_n \supseteq I_{n+1}$ para $n = 1,2,...$
Equivale a dizer que (x_n) é crescente e (y_n) decrescente;
N2) as amplitudes dos I_n isto é, $y_n - x_n$, tornam-se menores que qualquer $\varepsilon > 0$, quando n cresce.

PROPOSIÇÃO 3. Se (I_n) for uma sucessão em ninho, então existe um único número real ξ pertencente a I_n para todo n. Escreve-se

$$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

DEMONSTRAÇÃO. Para provar a existência de ξ pertencente a I_n, para todo n, é suficiente provar que (I_n) em ninho determina um corte em **R**, logo define um número real **R**, pois **R** é contínuo como foi mencionado.

Isto é conseqüência das classes $H = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ e $K = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$ serem contíguas, veja-se Proposição 2. Portanto existe $\xi \in$ **R** tal que $x_n < \xi < y_n$ para todo n, isto é,

$$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Para provar a unicidade de ξ, suponha que exista outro η nas mesmas condições. Tem-se $\xi, \eta \in [x_n, y_n]$ para todo n, isto é, $|\xi - \eta| \leq y_n - x_n < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, quando n cresce. Logo $\xi = \eta$.

EXEMPLO 3.

Considere-se as sucessões com termos gerais

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{e} \quad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n = 1,2,\ldots .$$

Verifica-se que a sucessão de intervalos fechados $I_n = [x_n, y_n]$ é uma sucessão em ninho.

Pela Proposição 3 existe um único $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [x_n, y_n]$. Este número ξ é a base dos logaritmos Neperianos representado pela letra e. Ele é definido por um corte de Dedekind determinado pela sucessão em ninho.

3. O NÚMERO π

Consideremos um polígono regular, de n lados, inscrito em um círculo de raio r. Seja a o seu apótema. Represente por r_1 o raio do círculo circunscrito a um polígono regular de 2n lados com perímetro igual ao do polígono anterior de n lados. Seja a_1 seu apótema. Demonstra-se que

$$a < a_1, \quad r > r_1 \quad \text{e} \quad a_1 < r_1,$$

isto é, o apótema cresce e o raio decresce. Tem-se, ainda mais:

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + r) \qquad \text{e} \qquad r_1 = \sqrt{ra_1}.$$

Daí, obtém-se:

$$r_1 - a_1 < \frac{1}{4}(r - a),$$

uma vez que $\sqrt{\frac{a+r}{2}} < 2 \left(\sqrt{r} + \sqrt{\frac{a+r}{2}}\right)$

Consulte-se: Ch. Camberousse, Cours de Mathématiques, Tome Deuxième — Geometria, Gauthier Villars, 1941, pp. 134, 135.

Sendo C o comprimento de uma circunferência de raio R, tem-se:

$$\pi = \frac{C}{2R}$$

Assim, o problema de calcular π reduz-se a calcular o raio R de uma circunferência cujo comprimento é conhecido. O método para esse cálculo faz uso do problema isoperimétrico acima mencionado e foi criado por Schwab em 1813 ao calcular $1/\pi$. No que se segue, demonstra-se que esse método conduz a definição de $1/\pi$, logo de π, por meio de uma sucessão em ninho, logo, pela Proposição 3, a um corte de Dedekind.

De fato, considere uma circunferência de comprimento 2 unidades. Daí resulta que seu raio será $R = \frac{1}{\pi}$. Portanto, calcular o raio dessa circunferência equivale a calcular $\frac{1}{\pi}$ de onde se obtém π.

Considere um polígono isoperimétrico a esta circunferência, isto é, um polígono regular cujo perímetro é igual a 2 unidades. Seja r_1 o raio da circunferência circunscrita a esse polígono e a_1 seu apótema ou raio da inscrita. Tem-se

$$2\pi\, a_1 < 2 < 2\pi r_1 \qquad \text{ou} \qquad a_1 < \frac{1}{\pi} = R < r_1$$

Deduz-se que o raio a_1 é uma aproximação por falta de $\frac{1}{\pi}$ e r_1 aproximação por excesso.

Operando numericamente, inicie-se com um quadrado de perímetro 2. Seu lado será 1/2. Sabe-se que $\ell = r_1\sqrt{2}$, isto é,

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

é o raio da circunferência circunscrita. Sendo o apótema do quadrado a metade do lado, obtém-se:

$$a_1 = \frac{1}{4}$$

A etapa seguinte seria calcular o raio r_2 e o apótema a_2 para o polígono regular isoperimétrico ao quadrado anterior, porém com o dobro de lados, isto é, o octógono. Pelo que foi visto acima, vem:

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + r_1) \qquad \text{e} \qquad r_2 = \sqrt{r_1 a_2}$$

Repetindo uma vez mais, mutatis mutandis, obter-se-ia:

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + r_2) \qquad \text{e} \qquad r_3 = \sqrt{r_2 a_3}$$

Indutivamente encontrar-se-ia:

$$a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + r_{k-1}) \quad \text{e} \quad r_k = \sqrt{r_{k-1} a_k}$$

sendo (a_k) crescente, (r_k) decrescente,

$$a_k < \frac{1}{\pi} < r_k \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$r_k - a_k = \frac{1}{4^{k-1}}(r_1 - a_1), \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Conclui-se que a sucessão de intervalos fechados $I_k = [a_k, r_k]$ é uma sucessão em ninho. Portanto, define um número real $\xi = \frac{1}{\pi}$ tal que

$$\frac{1}{\pi} = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$$

Note-se que (I_k) sendo em ninho, origina um corte de Dedekind e $\frac{1}{\pi}$ é definido por esse corte.

Se $\frac{1}{\pi} = (A, B)$, é simples encontrar o corte que define π.

Representando por $\frac{1}{A}$ os inversos dos racionais de A, segue-se que

$$\pi = \left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}\right).$$

Outro método para o cálculo de π é o dos perímetros criados por Arquimedes, grego de Syracusa, 250 A.C. Tal método consistia em obter o comprimento da circunferência aproximando pelo perímetro de polígonos regulares nela inscritos. Tomando-se uma circunferência de raio 1, seu comprimento seria 2π. O método permite o cálculo de 2π. Motivado pela idéia de Arquimedes, procede-se aproximando o comprimento da circunferência de raio 1, isto é, 2π, por meio de polígonos regulares inscritos, aproximações por falta, e por polígonos regulares circunscritos ou aproximações por excesso. Iniciando-se com os quadrados inscritos e circunscritos, obtém-se uma aproximação por falta e outra por excesso. A etapa seguinte seria aproximar por polígonos com o dobro do número de lados e assim sucessivamente. Sabe-se fazer explicitamente o cálculo numérico para cada etapa. Construir-se-ia, portanto, duas classes contíguas (p_n) e (P_n) dos perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência de raio 1 cujo comprimento é 2π. Assim o par de classes dá origem a um corte de Dedekind, cf. Proposição 2, (p, P) definindo 2π.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA RECREATIVA NA PRAÇA

João Tomas do Amaral

I. UM POUCO DE HISTÓRIA

Quando dos preparativos do 78º aniversário do Jardim Brasil ocorrido em 1991, um bairro dormitório, localizado na Zona Norte da cidade de São Paulo, fomos procurados no Colégio "Sir Isaac Newton" onde sou Diretor, por um integrante da Associação Movimento Cultural Jardim Brasil para colaborarmos na promoção e realização do evento. Para tanto sugerimos algumas atividades como Concurso de Redação (tema sobre bairro), Show Musical (artistas do bairro) e por fim a Olimpíada de Matemática Recreativa na Praça, pois todas as atividades se concentrariam na Praça Arlindo Luz. De pronto todas as atividades propostas foram aceitas, porém, sobre a Olimpíada pairou alguma dúvida por parte dos organizadores. Pois a matemática, aos olhares de muitos, é algo detestável e domínio de poucos privilegiados e ainda com o agravante das reflexões como: A quem se destina? Qual o objetivo? Quantos se interessam? Como motivar esta atividade? Como será o seu desenvolvimento? Que questões propor a todos os participantes?, enfim, Como organizar um evento sobre o qual não se tem notícias ou experiências anteriores sobre realizações semelhantes em alguma outra localidade, tanto no Brasil quanto no Exterior?

Com tantas questões, mas também na procura do que se fazer num domingo ensolarado do inverno paulista, das 13 às 15 horas, para concorrer com a tradicional e bela macarronada com direito a todos os acessórios para a concretização deste quase "rito" dominical, é óbvio que os organizadores concordaram unanimamente em realizar uma atividade que é o desejo, a alegria e a adoração de todos. Pois é, assim nasceu a Olimpíada de Matemática Recreativa na Praça.

II. ORGANIZAÇÃO

Criamos um grupo de professores que colaboraram neste evento como o Professor Miguel Inácio da Silva, Prof. Remy dos Santos, Prof. Jorge da Silva Medeiros, entre outros coordenados por mim (João

Tomas do Amaral) e o Prof. Valdir Rodrigues, todos do Colégio "Sir Isaac Newton" (CoSIN).

Decidimos que o público alvo seriam os alunos das escolas públicas do bairro (E.E.P.S.G. "Eurípedes de Castro", E.E.P.G. "Gustavo Barroso", E.M.P.G. "Profª Maria Helena de Faria Lima", E.E.P.G. "Província de Nagasaki") e moradores do bairro (adultos e crianças) presentes à Praça, tendo como objetivo a integração escola-comunidade e ainda a popularização da Matemática.

As questões propostas são recreativas (problemas de raciocínio, quebra-cabeças com números ou palitos, jogos entre outros) que desafiam a astúcia de raciocínio dos que tentam resolvê-las, e independentes do conteúdo vinculado à série que o participante estiver cursando ou tenha cursado.

As atividades seguiram dois segmentos simultâneos, a saber: — competição entre as escolas, representadas por equipes de 3 alunos por série, aos quais foram propostas questões com um grau de complexidade compatível às séries que estão cursando (5ª, 6ª, 7ª e 8ª), porém, sempre de caráter recreativo e sem vinculação específica ao conteúdo tradicionalmente oferecido aos alunos em sua respectiva série, e ainda questões dirigidas à platéia, cuja heterogeneidade do público exigia que o teor das questões considerasse o grau de instrução do questionado, uma vez que ali estavam pessoas sem nenhuma instrução formal bem como pessoas com instrução superior completa.

Dando transparência e eqüidade ao processo antecipadamente, foram enviados às escolas: regulamento, ficha de inscrição e descrição do critério de pontuação, além do mais, todas foram previamente esclarecidas quanto aos procedimentos que determinariam a classificação final e por conseguinte a Escola Campeã.

Como principal agente motivador, podemos destacar a maneira alegre e descontraída que caracterizou a condução do evento e a lógica de elaboração das questões cuja resolução demandava, basicamente, habilidade de raciocínio e criatividade que em troca como recompensa era premiada com livros de Matemática, quebra-cabeça, canetas, cadernos, réguas, entre outros.

III. AS OLIMPÍADAS

I Olimpíada de Matemática Recreativa na Praça, foi realizada em 18 de agosto de 1991, com a participação (E.E.P.S.G. "Eurípedes de Castro", E.E.P.G. "Gustavo Barroso", E.E.P.G. "Profª Maria Helena de

Faria Lima", E.E.P.G. "Província de Nagasaki") de aproximadamente 400 pessoas, oportunidade em que a Escola Campeã foi a E.E.P.G. "Província de Nagasaki".
Obs.: A E.E.P.S.G. "Eurípedes de Castro" não participou do evento, pois o seu diretor não autorizou.

A II Olimpíada de Matemática Recreativa na Praça foi realizada em 16 de agosto de 1992, com a participação (E.E.P.S.G. "Eurípedes de Castro", E.M.P.G. "Profª Maria Helena de Faria Lima", E.E.P.G. "Província de Nagasaki", E.E.P.G. "Profª Veridiana C. Carvalho Gomes") de aproximadamente 800 pessoas, com direito a torcida (cartazes, bandeiras) que agitou, participou, respondeu, sofreu e prestigiou as equipes de cada Escola. Na oportunidade a Escola Campeã foi a E.E.P.S.G. "Eurípedes de Castro" com direito a troféu, medalhas de ouro, prata e bronze segundo a classificação final.
Obs.: *) A E.E.P.G. "Profª Veridiana C. Carvalho Gomes" é a nova denominação da E.E.P.G. "Gustavo Barroso".
**) A E.E.P.S.G. "Eurípedes de Castro" participou por determinação do Delegado de Ensino da 4ª D.E. da DRECAP-1.

IV. REPERCUSSÃO

Entre a comunidade há uma expressiva mobilização pela participação num evento tão incomum, porém desafiador ao seu potencial de raciocínio e criatividade.

Nas escolas o entusiasmo não é menor entre alunos e professores, pois essa participação gerou novo ânimo e estimulou o ensino-aprendizagem de matemática.

Porém, o que vale mesmo é o competir de forma útil, saudável, criativa e estimulante, para que possamos gerar uma juventude com maior capacidade de raciocínio, criatividade e independência.

V. EXPECTATIVA

Que outras tardes ensolaradas de domingo ou não, de um inverno, primavera, verão ou outono sejam preenchidas com Olimpíada de Matemática Recreativa na Praça. Que outros bairros da capital e cidades do interior do Estado de São Paulo e de outros estados realizem sua I Olimpíada de Matemática Recreativa na Praça abrindo novos horizontes para realização de eventos desta natureza, popularizando de maneira sadia e séria este tão temido conteúdo curricular, sobre o qual incide um grande interesse universal, haja visto sua inegável contribuição à evolução da raça humana.

Para tanto, os interessados poderão obter informações adicionais mantendo contato com endereço abaixo.
Av. Julio Buono, 2425 — Vila Gustavo
02201-000 — São Paulo —SP
Tel.: 201-5507 (fax)
201-7318

João Tomás do Amaral é formado em Pedagogia, Engenharia Civil e Matemática; Mestre em Matemática, Diretor do CoSIN, Professor da UnG e Secretário Geral da Sociedade Brasileira de Educação Matemática — Regional São Paulo.

LOGO E SUAS DIFERENTES AVENIDAS NA CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO

Maria Victoria Gusmão Cavalcanti de Almeida Cunha

RESUMO

Nesse trabalho apresentam-se origens da linguagem computacional Logo e objetivos da proposta de Papert. Focaliza-se ainda essa linguagem enquanto um recurso para introduzir-se a utilização do computador em níveis mais abstratos de pensamento.

1. Origens de Logo

Em 1967 foi implementada a primeira versão da linguagem computacional Logo, projetada por Seymour Papert, Wallace Feurzeig e Daniel Brobow. Papert coloca como raízes de Logo a Inteligência Artificial e a Teoria Piagetiana, além de estudos de Bruner.

1.1 Teoria Piagetiana

Depois de permanecer por cinco anos no Centro de Epistemologia Genética, Papert retornou aos Estados Unidos em 1964, "impressionado com sua (de Piaget) maneira de olhar para as crianças como construtoras ativas de sua própria estrutura intelectual" (Papert, 1980, p. 19). Esse autor coloca-se como um adepto das idéias piagetianas, relativas à teoria mais geral do conhecimento. Princípios dessa teoria embasam o que denomina "ambiente Logo" e "filosofia Logo".

A utilização da linguagem Logo, no ambiente Logo, tem por objetivo permitir que o aprendiz faça descobertas e construa seu conhecimento a partir de sua ação, ao procurar ensinar o computador a resolver problemas. Ensinando a máquina a agir e a "pensar" o sujeito reflete sobre sua própria ação, pensa sobre seus pensamentos.

Direcionado por um conhecimento mais ou menos acabado, com menor ou maior grau de conscientização, a nível do problema ou da linguagem, o sujeito formula hipóteses e verifica os resultados obtidos. Situações de "desequilíbrio cognitivo" são instauradas a partir de discrepâncias entre resultados esperados e efetivamente verificados, desencadeando-se a reconstrução do conhecimento.

Essa utilização do computador contrasta fortemente com a aprendizagem passiva e receptiva, característica da utilização de sistemas CAI (informação assistida por computador). Esses sistemas consistem de aulas em que a instrução é programada: um conjunto de informações sobre determinada disciplina é armazenado no computador e apresentado ao aluno em diferentes capítulos. Sistemas CAI, que têm por objetivo transmitir informação, focalizam a aprendizagem como um processo passivo e receptivo, em que ao sujeito é oferecida a possibilidade de assimilar uma informação pronta e acabada, construída externamente. Outras utilizações do computador, como a estabelecida por pacotes utilitários, definem de forma igualmente passiva o papel do sujeito numa situação de interação homem-máquina.

Papert considera que "o que" e "como" o sujeito aprende depende dos modelos que ele possui: a existência de um conjunto de modelos facilita, e sua ausência dificulta, a aprendizagem. Esse autor vê o computador como um meio capaz de fornecer vários modelos para o sujeito. Além disso, sugere a introdução do computador na vida da criança, o mais cedo possível, para que o computador deixe de ser algo desconhecido e misterioso, e portanto avaliado como complicado e inacessível, para tornar-se tão íntimo e simples como o uso de um lápis.

Desde 1970, quando foi criado o Projeto Logo, pelo grupo de Inteligência Artificial do Laboratório do MIT, a linguagem Logo no ambiente Logo vem sendo focalizada por estudiosos como um recurso para objetivos como: propiciar a compreensão de conceitos matemáticos; promover o desenvolvimento de estratégias de solução de problemas; facilitar a compreensão de técnicas de programação; desenvolver no aluno o senso de controle do computador; facilitar o aprendizado de alunos que não se adaptam ao ensino tradicional, etc.

Relatórios de pesquisas, no entanto, são ainda escassos e pouco conclusivos, o que tem gerado algumas críticas de autores como Pea (1983), sobre aspectos relacionados à compreensão de recursos mais complexos da linguagem. Essas críticas, por sua vez, têm provocado contra-argumentações de Papert (1984, 1987).

1.2 Inteligência Artificial

1.2.1 Lisp, a linguagem de origem de Logo

Logo é uma linguagem computacional que pode ser considerada um dialeto de LISP.

Lisp desenvolvida no MIT, por McCarthy, nas décadas de 50 e 60, para trabalhos de Inteligência Artificial, foi a primeira linguagem computacional projetada sobre uma forte base matemática e, portanto, a utilizar um modelo independente de arquitetura de máquina (Chezzi e lazayeri, 1985).

Duas conseqüências principais decorrem desse modelo distinto, subjacente à linguagem Lisp:

— linguagens imperativas que podem ser consideradas abstrações construídas sobre a arquitetura da máquina de Von Newman, foram projetadas visando a eficiência de execução, medida pelo desempenho em um computador convencional; Lisp, ao contrário, não reflete essa preocupação;

— a programação com linguagens funcionais, como Lisp, ou com linguagens imperativas apresenta estilos bastante distintos, segundo especialistas em linguagens de programação.

Atribui-se essa diferença de estilo a formas distintas de resolver-se problemas com o uso do computador. A riqueza da notação funcional pode, por um lado, facilitar a reflexão sobre o problema a ser resolvido e, por outro, refletir muito mais claramente a lógica subjacente à sua solução. Lisp processa estruturas inteiras de dados e utiliza-se de recursos de programação como a recursão e a composição funcional, o que permite que a atenção não seja desviada para detalhes de programação como alocação de memória, atribuição de valores a variáveis, repetição de grupos de comandos, etc. Comandos que processam estruturas inteiras de dados e técnica recursiva em lugar de comandos de controle de iterações e de desvios baseados em condicionais, não só induzem uma programação que flui naturalmente, ao invés de apresentar-se como um zig-zag, como também permitem que a atenção se concentre na compreensão e solução do problema.

Algumas características de Lisp são:

— um pequeno repertório de funções primitivas;
— um mecanismo para amarrar um nome a nova função sendo definida;
— um conjunto de dados com estrutura simples e regular;
— um conjunto de formas funcionais (métodos de combinar funções). No Lisp original há uma única forma funcional (função que recebe outras como parâmetros e devolve nova função como resultado):

composição funcional (a função resultante equivale à aplicação de uma função, ao resultado de aplicar outra função).

Esses componentes de Lisp apresentam interesse do ponto de vista de processos intelectuais.

A partir de um fácil aprendizado de pequeno número de funções primitivas, todas as demais podem ser definidas pelo usuário. Conceitos podem ser construídos progressivamente, num processo em que sucessivamente cada definição mais abrangente pode incluir uma anterior.

Além disso, problemas tendem a ser focalizados no seu todo e simultaneamente nas partes que o compõem. Pequenas funções podem ser criadas para subproblemas e interrelacionadas enquanto componentes de um todo.

A testagem de um programa modular, i.é, em seguida à definição de cada função, e finalmente do programa principal (geralmente uma única expressão) facilita a descoberta e compreensão de causas de erros.

1.2.2 De Lips a Logo

Logo, assim como diversos dialetos de Lisp, introduziu modificações no Lisp original, entre as quais algumas são consideradas a seguir.

• Logo Gráfico

Também existente no dialeto Mulisp, foi desenvolvido por Papert de forma a permitir que movimentos relativos sejam expressos de forma mais simples do que através de coordenadas cartesianas: as referências são a posição e a direção de um ponto luminoso — a tartaruga. Apoiando-se em contribuições da Inteligência Artificial, Papert conduz a criança a ensinar a tartaruga a executar um processo. Do ponto de vista cognitivo, nos termos desse autor, ensinar a tartaruga exige da criança uma reflexão sobre a tarefa, visualizar os passos que constituem esse processo é concretizar uma abstração (Papert, 1980).

• Simplificação da notação

Logo mantém a simplicidade e regularidade da sintaxe de Lisp, eliminando fonte de erro com a redução de parênteses necessários. Além disso, à notação funcional, reversa da polonesa, foi adicionada a notação infixada em funções numéricas, padrão para operadores artiméticos.

• Biblioteca de funções

Embora funções tenham sido acrescidas ao Lisp original em diversos dialetos, em Logo elas se apresentam de forma mais sistematizadas e favoráveis à compreensão.

• Comandos não aplicativos

Se, por um lado, a introdução de comandos não aplicativos pode levar a maior eficiência em termos de execução de máquina, por outro pode ser necessária, se um dos objetivos da linguagem é ser acessível a crianças. Com base em resultados obtidos no Centro de Epistemologia Genética, supõe-se a impossibilidade da utilização de recursão ou de composição funcional, da programação sem o recurso de comandos de atribuição ou de controle de iteração, em períodos de desenvolvimento anteriores ao operacional formal. (Cunha, 1986a). Mas, coloca-se exatamente nessa questão uma das dúvidas da utilização de Logo com adolescentes ou adultos: a de perder-se a riqueza de uma linguagem que guarda características de uma linguagem funcional, originárias de Lisp, caindo-se numa utilização restrita a comandos típicos de linguagens imperativas. Essa questão é analisada a seguir.

2. A utilização de Logo com recursos do pensamento formal

Fagundes e Petry (1991) levantam a questão de métodos de aprendizagem destinados à introdução de futuros professores à linguagem Logo, considerando que o ambiente Logo não foi planejado para ensinar todos os recursos da linguagem. O problema analisado por esses autores foi focalizado, embora com abordagem distinta, em trabalhos anteriores (Cunha, 1986a; 1990). Supõe-se que futuros professores ou não, aprendizes que possuem um pensamento formal podem beneficiar-se com a descoberta e utilização dos recursos mais ricos da linguagem. Que Logo é não só uma proposta para desmistificar-se o computador desde a mais tenra idade, como também um recurso para introduzir-se a utilização dessa ferramenta em níveis mais abstratos de pensamento. Talvez por dificuldades encontradas nesses níveis, relativas à geração contínua e progressiva de situações de desafio, geradoras por sua vez de "desequilíbrio cognitivo" e da necessidade de novas "acomodações", o uso de Logo vem se mostrando restrito. Uma linguagem que pode chegar a ser utilizada de forma tão rica quanto Lisp é por vezes descartada e rotulada como uma brincadeira de crianças pequenas.

Na Fundação Getúlio Vargas desenvolveu-se linha de pesquisa interdisciplinar (Cunha, 1986a, 1986b, 1988, 1989, 1990, 1991a, 1991b, 1992), em que se buscou a integração de conhecimentos construídos na

Psicologia e na Inteligência Artificial. Dentre os objetivos desse trabalho incluiu-se a introdução de alunos do Mestrado de Psicologia à utilização do computador, com a linguagem Logo, como um passo prévio à análise de questões de interesse das duas disciplinas. A escolha dessa linguagem foi devida a suposições como:

— linguagens imperativas permitem, mais facilmente do que linguagens funcionais, soluções de problemas a um nível parcialmente intuitivo — aspectos pouco compreendidos podem ser contornados e controlados como exceções acopladas à regra, com o uso de comandos de desvio;

— linguagens funcionais requerem um nível de abstração maior e induzem à descoberta de regras mais genéricas e abrangentes que dêem conta simultaneamente de vários fatores em jogo;

— linguagens como Logo, simples o suficiente para a explicitação de um processo com recursos característicos de um pensamento operacional concreto, e poderosas como Lisp no auxílio ao pensamento em nível formal, podem propiciar a passagem de uma solução parcialmente intuitiva à descoberta de conceitos e à reconstrução de conhecimentos.

Logo, que surgiu da integração de descobertas em domínios distintos, pode ser visto como um caminho capaz de originar novas propostas interdisciplinares. Como uma abertura a disciplinas distintas da informática, em especial àquelas que encontram no computador uma ferramenta útil a seu campo de estudo e que trazem, em seu corpo teórico, conhecimentos necessários e ainda não desenvolvidos em disciplinas recentes como a Inteligência Artificial.

REFERÊNCIAS

CHEZZI, C. & IAZAYERI, M. *Conceitos de Linguagens de Programação*. Rio de Janeiro, Campus, 1985.

CUNHA, M.V.G.C.A. Epistemologia Genética e Inteligência Artificial: linguagens Lisp e Logo. *Arquivos Brasileiros de Psicologia*, v. 38, n. 4, pp. 51-56, 1986a.

CUNHA, M.V.G.C.A. Epistemologia Genética e Inteligência Artificial: estratégias cognitivas na solução de problemas. *Arquivos Brasileiros de Psicologia*, v. 38. n. 3, pp. 36-57, 1986b.

CUNHA, M.V.G.C.A. Epistemologia Genética e Inteligência Artificial: Estratégias Heurísticas e Sistemas Especialistas I. *Anais da I Jornada de Atualização do Grupo de Inteligência Artificial da UFRJ*. Rio de Janeiro, 1988.

CUNHA, M.V.G.C.A. Epistemologia Genética e Inteligência Artificial: Estratégias Heurísticas e Sistemas Especialistas II. *Anais do II Simpósio Brasileiro de Pesquisa e Intercâmbio Científico*, Gramado, Rio Grande do Sul, 1989.

CUNHA, M.V.G.C.A. *Psicologia Genética e Inteligência Artificial: uma Proposta de Estudo Interdisciplinar*. Tese de Mestrado, Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE-UFRJ, 1990.

CUNHA, M.V.G.C.A. Man and machine as co-authors of a discovery process. *Educational Computing Organization of Ontario* / International Conference on Technology and Education, Canadá, pp. 195-197, 1991a.

CUNHA, M.V.G.C.A. Informática e pesquisa interdisciplinar. *Workshop em Informática na Educação: Paradigmas em Torno do Uso do Computador na Educação*, COPPE/UFRJ, pp. 9-16, 1991b.

CUNHA, M.V.G.C.A. Concretizando o conceito de recursão com experimentações em computação gráfica. Artigo enviado à *Revista Brasileira de Computação*, Rio de Janeiro, UFRJ.

PEA, R.D. *Logo Programing and Problem Solving*. Simpósio: American Educational Research Association, "Chamelon in the Classroom: developing Roles for Computers", Montreal, Canadá, 1983.

PAPERT, S. *Mindstorms: Children, Computers and Powerfull Ideas*. New York, Basic Books, 1980.

PAPERT, S. *New Theories for New Learnings*. Conferência: National Association of Schools Psychologists, 1984.

PAPERT, S. *A Critique of Technocentrism in Thinking about the School of the Future*, Conferência: Children in an Information Age: Opportunities for Creativity, Innovation & New Activities, 1987.

PETRY, P. & FAGUNDES, L. Why some Works fail to Reproduce the Logo Environment. *Educational Computing Organization of Ontario* / International Conference on Technology and Education, Canadá, pp. 227-228, 1991.

SOBRE A ORIGEM HISTÓRICA DO CONCEITO DE NÚMERO

Paulus Gerdes
(reprodução de "Ciência e Tecnologia", vol. 1, 1980, páginas 53-57)

0. RESUMO

A origem do conceito de número é histórica. Na base de dados de arqueologia, lingüística e etnografia, apresentam-se respostas às seguintes perguntas: Como se foi desenvolvendo a noção de número natural? Como nasceram, historicamente, as relações entre os números e as operações com eles? Porque é que os resultados da aritmética são tão convincentes e encontram tantas explicações?

Conclui-se que a origem e o desenvolvimento do conceito de número retiram qualquer base para uma visão idealista de que a matemática é, "a priori", um produto do pensamento puro, ou duma intuição inata.

1. O título deste ensaio "Sobre a origem histórica do conceito de número" já marca uma determinada tomada de posição, no sentido de esta origem ser **histórica.**

Leopold Kronecker (1823-1891) afirmou em 1886, falando na Conferência Berlina de Cientistas de Natureza: "Os números inteiros são criados pelo Senhor Deus, tudo o resto é trabalho dos homens"[1].

Para o filósofo Immanuel Kant (1724-1804) as afirmações matemáticas eram, "a priori", no sentido de que elas não dependem da experiência, mas são apenas produtos do pensamento puro. Segundo a Escola dos Pitagóricos (6º, 5º séc. A.C.) as relações quantitativas constituem a essência das coisas. Para os Tsongas, do sul de Moçambique, havia um tabu quanto à contagem dos homens: "Quê? Tu estás a contar-nos? Quem desejas tu ver desaparecer".[2]

Assim, estamos a ver que na história do pensamento humano, na história da filosofia, o conceito de "número" deu motivo a especulações diversas e freqüentes, onde a sua origem era suposta fora da história, numa imaginada força sobrenatural ou apenas nas potências inatas do homem.

Na seqüência da tomada de posição acima mencionada, para a qual apresentarei argumentos neste meu ensaio, queria afirmar que a origem destas especulações está na própria história, tal como na conexão da Escola dos Pitagóricos com a aristocracia escravagista nas condições de então do sul da Europa.

2. Agora pode-se pensar em "um", "dois", "três"... isto é tão fácil, o homem sempre soube contar! Mas no fim do século passado descobriu-se — a que é que se chama "descobrir"? — no deserto de Calahari algumas etnias que, na sua língua, apenas podiam exprimir "um", "dois",e "vários". Faltavam-lhes palavras para quatro, cinco, etc. Como é possível? Uma explicação tribalista podia ser: "esta tribo é tão estúpida, mas...". Porém, uma tal explicação não tem consistência, uma vez confrontada com as línguas Bantu. Na maioria das línguas Bantu, os três primeiros numerais (um numeral é o nome de um número) são apenas adjetivos, conjugados conforme a classe do substantivo correspondente, enquanto que os numerais seguintes são substantivos. Por exemplo, temos na língua Changana:

munhu-munwe ('pessoa uma', uma pessoa)	mas: sinha hunwe (uma árvore)
vanhu vambiri (duas pessoas)	misinha mimbiri (duas árvores)
vanhu vanharh (três pessoas)	misinha minharh (três árvores)
mune wa vanhu ('um quarteto de pessoas', quatro pessoas)	mune wa misinha (quatro árvores)

Esta diferença linguística sugere uma origem diferente. Por outras palavras, num passado remoto os antepassados dos atuais povos Bantu só tinham igualmente os números: "um", "dois",... Ainda se pode refugiar numa explicação racista: "... mas o homem civilizado sempre soube contar". Que orgulho tinha o colonizador da sua pretendida civilização! No entanto, também esta explicação desaparece como neve perante o sol da linguística. No português, as palavras "um" e "dois" conhecem também uma forma feminina, a saber "uma" e "duas", enquanto que os outros numerais não a conhecem e, ainda por cima, a palavra "três" está relacionada com a palavra francesa "trés"(muito) e com a palavra latina "trana"(= para além), quer isto dizer que, de igual modo, os antepassados dos povos europeus somente sabiam contar um pouco.

Com isto podemos considerar a historicidade do conceito de número como demonstrada.

3. Vejamos agora como se foi desenvolvendo a noção de número. Neste ensaio limitamo-nos às primeiras fases do desenvolvimento do conceito de número natural (1,2,3,4...).

Para poder responder à nossa pergunta "como?" apoiar-nos-emos em resultados da arqueologia, lingüística e etnografia, ciências estas que ainda são relativamente muito jovens. Por exemplo, na África, no sul do Sahara, tiveram lugar muito poucas investigações arqueológicas. Por isso apenas podemos indicar algumas linhas gerais de desenvolvimento do conceito de número.

3.1. As primeiras sociedades humanas foram as de caçadores e coletores, e abrangem um período de 500.000 a 1 milhão de anos. Inicialmente os homens ainda não dispunham duma noção explícita de número mas já aprendiam a tirar determinadas conclusões importantes para a reprodução da sua vida, conclusões às quais, atualmente, se chamam quantitativas.

Assim por exemplo, foram aprendendo a **estimar quantidades** de comida: para hoje já capturamos bastantes animais ou não, para hoje já colhemos frutos suficientes ou não. Este processo de aprender a estimar foi possível na base de, por um lado, a **constituição biológica** do homem, e, por outro, a **experiência acumulada** ao comparar os resultados do trabalho dum dia com os dos dias anteriores.

3.2. Dois caçadores vão em direções diferentes, à descoberta. Ambos encontram por exemplo, alguns mamutes, e voltam à tribo para buscar os outros. Mas como decidir em que direção é que se deve ir à caça? Comparando, um caçador exprime: "Vi tantos mamutes como um pássaro tem asas", enquanto que o outro diz: "Vi tantos mamutes como a minha mão 'conta' dedos".

Este exemplo hipotético ilustra o seguinte: em resposta a determinadas necessidades surgidas — tais como comunicar e tomar decisões em particular no que se refere à reprodução da vida — começou-se a comparar coleções de objetos, de tal modo que a quantidade de uma coleção se torna clara através da **comparação** com a quantidade de uma outra coleção: "tantos mamutes como uma ave tem asas", "tantos cabritos como uma mão tem dedos"...

Ao comparar, deste modo, duas quantidades chama-se, na matemática atual, por numa correspondência biunívoca os dois conjuntos: a cada elemento do primeiro conjunto faz-se corresponder, duma maneira biunívoca, um elemento do outro (por exemplo: a cada asa corresponde um mamute).

Desta fase de desenvolvimento encontramos ainda vestígios em muitas línguas atuais. Assim, para "cinco" os numerais **hlanu, nthlanu** e **tano** em Zulu, Changana e Swahili respectivamente (duma origem comum) significam originalmente "mão", como também acontece, por exemplo, no grego ou no russo. Na língua Banda da África Central, o numeral para vinte significa à letra 'homem completo', referindo-se ao total de vinte dedos de um homem. Um exemplo interessante verifica-se na língua Mandingo falada no Mali. A palavra para "nove", a saber **Kononto**, significa "aquele lá na barriga", dizendo respeito aos nove meses da duração duma gravidez[3].

3.3. Estes vestígios nas línguas atuais, já indicam a transição de comparações individualmente inventadas, que possivelmente não são compreendidas por toda a gente, para comparações mais correntes, geralmente aceitas (dentro de uma determinada cultura). Foram desenvolvendo numerais como abreviatura de comparações que eram claras para cada um. Estes primeiros numerais refletem uma propriedade dum conjunto de objetos e são, por isso, adjetivos, que podem ser conjugados, como nos mostram os seguintes exemplos: em português "dois carros" mas "duas crianças", conforme o gênero do substantivo envolvido. Na língua Changana "**sinha hunwe**" (uma árvore), **xiharhi xinwe** (um animal), **munhu munwe** (uma pessoa), correspondente à classe do substantivo. Aqui vemos uma raiz comum 'nwe' nos numerais para "um". Uma raiz comum pode pertencer a uma fase posterior, como a língua dos índios norte-americanos Tsimshia nos mostra provavelmente: **t'apgat, goupel, gaopskan, g'alpeeltk** e **gulbel** são numerais diferentes, em vez do nosso "dois", que se referem a classes diferentes de objetos, tais como objetos achatados, redondos, compridos, pessoas canoas e medidas respectivamente[4].

Vê-se um desenvolvimento na direção duma substantivação crescente dos numerais no sentido de que, cada vez mais, para mais classes de objetos são utilizados os mesmos numerais, como por exemplo, no português, o numeral "três" pode ser usado para quaisquer objetos e não só para redondos ou achatados. Em muitas sociedades constata-se um outro desenvolvimento paralelo a esta substantivação. É o desenvolvimento para comparar com determinadas coleções padrão, tais como dedos, cortes num pau, pedrinhas (no latim a palavra pedrinhas é "calculi", da qual deriva a palavra portuguesa 'cálculo'), riscos em pedras, etc. Perto de Ishango, no atual Zaire, foram encontrados vestígios de tais riscos localizados entre 9000 a 6500 A.C.[5].

É possível que noutras sociedades estas formas de comparar precedessem e estimulassem essa substantivação dos numerais.

3.4. Em resumo, podemos constatar que a noção de número (os números naturais mais pequenos) foi nascendo num processo de abstrair, cada vez mais, de determinadas propriedades das coleções de objetos que o homem nas sociedades de caçadores e coletores encontrava, como resposta criadora aos problemas que enfrentava no seu trabalho. Esta noção reflete a experiência prática de "inumeráveis" gerações.

Um processo semelhante de abstração verifica-se na formação de outros conceitos, por exemplo, na noção de 'cor'. Em esquema[6].

objeto considerado como um todo		
comparar	... tal como um corvo	tantos... como uma mão tem dedos
adjetivo (propriedade duma coleção de objetos)	pedra negra	cinco árvores
substantivo (propriedade distinguida dos objetos concretos)	negridão	cinco
	cor	número natural

A propriedade que é comum a todos os conjuntos cujos elementos podem ser postos numa correspondência biunívoca com as asas de um pássaro, é o número indicado pelo nome dois (dizendo-se, muitas vezes, abreviadamente o número dois). Assim é um número (natural) a propriedade que é comum a todos os conjuntos cujos elementos se podem fazer corresponder biunívocamente.

Em que consistem as propriedades do número, representado pelo numeral quatro? Quatro é a soma de um e três, quatro é duas vezes dois... As propriedades de um número consistem nas suas relações com os outros números, tal como, em geral, uma abstração tirada de sua base concreta não tem significado em si própria; ela existe apenas nas suas relações com os outros conceitos. Isto coloca algumas questões: Como foram nascendo historicamente as relações entre os números? E quais foram as conseqüências para o desenvolvimento do conceito de número?

4. As operações sobre números (adicionar, multiplicar, subtrair e dividir) foram-se desenvolvendo como reflexo das operações efetuadas com objetos concretos. Por exemplo, a adição corresponde à operação de juntar duas ou mais coleções (os frutos colhidos por um grupo, com os frutos colhidos por outro grupo, etc). A multiplicação desenvolve-se, em grande medida, a partir do hábito de contar "dois por dois", "três por

três", etc, assim acelerando a contagem do número de animais num rebanho, por exemplo.

4.1. Estas primeiras operações contribuiram para a extensão do conceito de número: mais números naturais como nos mostram os seguintes exemplos:

Uma tribo, vivendo perto do rio Murray, na Austrália[7], usa como numerais: **enea**(=1), **petcheval** (=2), **petchevalenea** (=2+1, ou seja 3), **petcheval-petcheval** (=2+2, ou seja 4), uma estrutura binária semelhante à dos pigmeus Bambuti, e de tribos em Papua Guinea[8]: **urapan** (=1), **okosa** (=2), **okosa-urapan** (=2+1, ou seja 3), **okosa-okosa** (=2+2, ou então 4), **okosa-okosa-urupan** (=2+2+1, quer dizer 5), **okosa-okosa-okosa** (=2+2+2 = 6). Estes numerais partem sempre da base dois. No entanto, encontramos também outras bases. Por exemplo, com os Kamilaroi[9] na Austrália, a base três: **guliba** (3), **guliba-guliba** (3+3 quer dizer 6). Na língua Swahili vestígios da base quatro: **nane** (=4+4 ou seja 8). Freqüentemetne, vê-se mais do que uma base. Com os Ekoi, nos Camarões: **eseresa** (=3+3 = 6), **eniresa** (=4+3 = 7),**enireni** (=4+4 = 8), **eloneni** (=5+4 = 9), ou na língua changana: **nthlanu ni simbiri** (=5+2 = 7) e **tshume ni xinwe** (=10+1 = 11).

Para a multiplicação podemos também encontrar muitos exemplos. Em Changana 'mune wa matshume' (4x10, ou seja 40). Na língua Banda, já mencionada, o nome para quinze significa à letra "três mãos" e o para quarenta "dois homens completos". Estes novos numerais estendidos já pressupõem uma descoberta importante: não só hoje dois leões mais três leões dão cinco leões, mas isto acontecerá amanhã também; não só dois leões mais três leões dão sempre cinco leões, mas também dois antípoles mais três antílopes dão sempre cinco antílopes; não só dois animais mais três animais dão cinco animais, mas também duas plantas mais três plantas dão cinco plantas, etc. Através do trabalho de "inumeráveis" gerações com coleções concretas foram-se descobrindo regularidades cada vez mais gerais, que desaguavam em regras, tais como na nossa linguagem simbólica 2+3=5, ou o que ainda precisa duma base de experiência muito maior e rica, o resultado da adição de dois números é independente da ordem em que se procede, ou então na nossa notação atual 2+3=3+2, e mesmo a+b=b+a, onde a e b representam números quaisquer.

4.2. Passaram entre 10 e 15 mil anos desde esta grande revolução que se verificaria ter influência profunda no desenvolvimento do conceito de número, no desenvolvimento da matemática. Pela primeira vez na história humana, povos romperam com a dependência extrema do meio ambiente que implicava a sua vida de caçadores e coletores; gradualmente aprendia-se a intervir na produção de comida: foram descobrindo a

agricultura e o **pastoreio**.

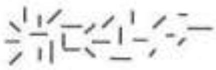
Estas novas possibilidades de produção punham a humanidade perante numerosos problemas novos: 'que quantidade de sementes podemos comer e que quantidade temos de semear para poder comer suficientemente no ano seguinte?'; 'escaparam-se animais do rebanho', 'quando temos de semear?' etc. Estes problemas e possibilidades novas (viver em grupos maiores, estabelecer-se em aldeias, etc.) necessitavam duma extensão do conceito de número: tornava-se necessária a contagem de quantidades maiores.

Uma vez mais, vemos aqui confirmada a teoria de Friedrich Engels segundo a qual o homem desenvolve-se através do seu trabalho[10].

As novas necessidades sociais e econômicas exigiam uma extensão do conceito de número e das operações sobre os números.

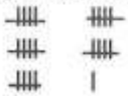
4.3. Saber contar o número de animais num rebanho, o número de dias num ano, o número de produtos numa troca, etc., saber contar coleções cada vez maiores e saber **comunicar** a outras pessoas os resultados das contagens, provocaram inovações.

Como é possível compreender rapidamente um Ekoi se ele falasse de "**enirenirenirenireni**" animais onde nós falamos de vinte animais? Como compreender rapidamente o changana "**nthlanu wa matshume ni matshume manharh ya bsiluva ni xinwe** (5x10+10x3+1), onde se diz em português, oitenta e uma flores? Como obter rapidamente uma impressão do número, quando num pau encontramos os seguintes riscos.



ou mesmo, quando mais ordenados IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII?

Ao anotar



é quase imediato que se trata de vinte-e-seis objetos.

Tornavam-se socialmente necessárias inovações tanto no aperfeiçoamento e na simplificação dos nomes dos números, como na introdução ou no melhoramento de símbolos para representar números.

Em particular, foram alcançados avanços consideráveis nas **civilizações agrícolas dos grandes rios**, como, o Nilo, Eufrates, Tigre, Ganges, Huang Ho e mais tarde Yang-tse, e com os Mayas. Aí, era necessário calcular na computação do calendário, na administração da colheita, na organização de obras públicas, na coleta de impostos, etc. Foi naquelas sociedades que se inventou a **escrita** a partir da contabilidade, a partir do cálculo.

Às vezes, os primeiros novos **símbolos** eram o resultado de traçar rapidamente riscos numa vara ou incisões num pedaço de barro (sem levantar a "caneta") como os nossos símbolos atuais sugerem:

II N ᴺ
(dois no sistema árabe)
III NV ᴺᵛ
(três no sistema árabe)

ou, horizontalmente:

= z 2

≡ ʒ 3

Aqui ecoa a base material nos símbolos para dois e três, libertando o caminho para a criação de outros símbolos. Baseados em muitas experiências, foram gradualmente introduzidos melhoramentos nas notações simbólicas, tais como a introdução do **sistema de posição** e do **zero**. Por sua vez, a introdução de símbolos para os números tinha um significado importante para o desenvolvimento da aritmética e, mesmo, para o desenvolvimento da matemática. Eles dão uma encorporação simples do conceito de número, mesmo em tal medida que muitas pessoas identificam, embora isto seja incorreto, um número com o seu nome simbólico, como se o país Moçambique fosse idêntico ao conjunto (ordenado) das letras do seu nome. Os símbolos facilitam fazer as contas; podemos calcular no papel (barro, solo, etc.) em vez de precisar de juntar dois rebanhos para saber quantas vacas há no total, etc. Eles estimularam a extensão do conceito de número até números tão grandes que nunca pudessem ser o resultado duma contagem direta: quantas vidas humanas seriam precisas para poder contar até 10^{10}?

Ao terminar, tiremos algumas conclusões a partir destas primeiras fases de desenvolvimento do conceito do número[11]. A origem do conceito de número é histórica. Ele desenvolve-se conforme as mudanças nas necessidades sociais e econômicas. O conceito de número e as operações sobre os números desenvolvem-se através de um processo de abstração, subindo a níveis cada vez mais altos, refletindo a acumulação duma quantidade imensa de experiência prática com coleções de objetos concretos.

Por isso, os resultados da aritmética são tão **convincentes**, como 1+1=2 e são tão aplicáveis: eles refletem a experiência de milhares de gerações humanas.

... tão aplicáveis. Porém nisto reside igualmente a sua limitação, porque a verdade não é abstrata, é sempre concreta (Lenine). Pode acontecer que, em circunstâncias muito particulares, um mais um dê um: 1+1=1 (!?), quando um leão com fome está numa gaiola com um cordeiro, restará apenas um animal, ou quando o Ministro Sérgio Vieira disse no seu discurso "O Homem Novo é um processo" do trabalho coletivo: quando 1 mais 1 trabalham, é mais que 2(1+1>2); ou quando se mistura 1 litro de água com 1 litro de álcool, fica apenas 1,9 litros de líquido: 1+1=1,9.

Assim os números são, por um lado importantíssimos na nossa vida, mas por outro lado, não se deve considerá-los absolutos ou deificá-los. É neste contexto que o matemático soviético Rashevski[12] formulou a hipótese de que a resolução de um número de problemas nas ciências modernas da natureza pudesse pressupor romper com o "dogma dos números naturais" duma maneira análoga ao quebrar o dogma da Geometria Euclidiana no século passado, que constituiu uma das condições necessárias para a elaboração das teorias físicas revolucionárias da relatividade e da mecânica quântica no século 20.

Conceitos (significativos) refletem a realidade objetiva. A origem e o desenvolvimento do conceito de número (tal como o de conceitos geométricos) retiram qualquer base para uma visão idealista de que a matemática é a "priori" um produto do pensamento puro, ou duma intuição inata.

NOTAS

1. Citado por Wussing, H.; Arnold, W., *Biographien bedeutender Mathematiker,* Berlim, 1975, p. 437.

2. Vide Junod, H., *Usos e costumes dos Bantos,* 1974, vol. 2., p. 152.

3. Vide Zaslavsky, C., Black african traditional mathematics, in: *The Mathematics Teacher,* 1970, 4, p. 366.

4. Vide Conant, L., *The number concept,* New York, 1896, p. 87.

5. Vide Zaslavsky, p. 348.

6. Compare Aleksandrov, A. A general view of mathematics, in: *Mathematics, its contents, methods ans meaning,* New York, 1969, vol. 1. p. 10.]

7. Vide Conant, p. 106.

8. Vide Dantzig, T., *Number the language of science,* New York, 1976, p. 28.

9. Vide Conant, p. 107.

10. Vide Engels, F., *Dialektik der Natur,* Berlin, 1975, p. 444-456.

11. Compare Aleksandrov, p. 15-17.

12. Vide Rashevskii, P., On the dogma of the natural numbers, in: *Russian Mathematical Surveys,* vol. 28, 1973, 4, p. 143-148.

BOLETIM DO GEPEM ASSUNTOS TRATADOS

BOLETIM Nº 18

BOLETIM Nº 19

BOLETIM Nº 20

BOLETIM Nº 21

BOLETIM Nº 22

BOLETIM Nº 23

• Olimpíada Estadual de Matemática

BOLETIM Nº 24

• Apresentação
Profª Regina Monken
• Comemoração do Cinquentenário da Universidade Santa Úrsula e Implantação do Curso de Mestrado em Educação Matemática — GEPEM/USU — 28.03.89
• Aula Inaugural — Madre Maria de Fátima Maron Ramos
Breve Histórico do GEPEM — Profª Maria Laura M. Leite Lopes
• Homenagem ao Professor Mello e Souza
Profª Estela Kaufman Fainguelernt
• Um Método Geral para Construir Polígonos Regulares, Inspirado numa Técnica Moçambicana de Entrelaçamento
Prof. Paulus Gerdes
• O Professor de Matemática e a Seleção Chamada Avaliação
Professores: Roberto Baldino e Tânia Cabral
• Dificuldades Matemáticas dos Futuros Professores Primários
Profª Vânia Maria Pereira dos Santos
• Questionamento da Conceituação dos Trapézios Isósceles e Escaleno
Prof. Hideo Kumayana
• Matemática Divertida: Números Cruzados
Professoras: Anna Averbuch e Franca Cohen Gottlieb
• Conseqüências Pedagógicas da Pesquisa em Álgebra
George Booker — Tradução de Radiwal Alves Pereira
• Problema não é Problema
Apenas Três "Dois" (contribuição de Wilson Belmonte)
Por quê a Fórmula? (contribuição de José Carlos de Mello e Souza)
• GEPEM Notícias
• Olimpíada Estadual (RJ) de Matemática

BOLETIM Nº 25

• Apresentação
Profª Regina Monken
• Matemática Moderna, Sua Origem e Aspectos de seu Desenvolvimetno em alguns Países Ocidentais
Profª Ana Maria Kaleff
• O Ensino da Adição e da Subtração para Alfabetizandos Adultos
Prof. Newton Duarte
• Sobre uma Propriedade Métrica do Paralelogramo
Prof. Luiz Adauto Medeiros

• Problemas, Idéias, Sugestões — Transcrito da Revista Educação e Matemática da Associação de Professores de Matemática de Portugal, ano I, nº 1, jan./87.
• Uma Dose de Humor em sua Reflexão
Profª Walderez F. Fraga
• Resenha do livro "Infinite Processes, Background to Analysis", de A. Gardiner, Springer, NY, 1982.
Prof. João Bosco Pitombeira de Carvalho
• Solução de problema proposto no número anterior.
Professores: Anna Averbuch e Franca Cohen Gottlieb

OBSERVAÇÃO: Por problemas financeiros o Boletim GEPEM vem sendo editado fora do semestre planejado. Dessa forma, a partir do primeiro semestre de 1990, editamos:

BOLETIM Nº 26

— referente ao 1º semestre de 1990.
— edita palestras apresentadas na I Semana da Matemática (GEPEM/USU), realizada de 13 a 16 de março.

• Apresentação
Profª Franca Cohen Gottlieb
• Abertura da Semana da Matemática
Prof. José Carlos de Mello e Souza
• The Teaching and Learning of Algebra in the Secondary School
Prof. Abraham Arcavi
• Visão Geral da Informática no Brasil: enfoque na área educacional
Prof. Robert Kopp
• Sobre a Construção dos Números Reais
Prof. Luiz Adauto da Justa Medeiros
• A Pesquisa e o Saber Social
Prof. Circe Navarro Vital Brazil
• A Educação Matemática, sua evolução
Profª Maria Laura Mouzinho Leite Lopes
• Idéias Fundamentais da Matemática
Prof. João Bosco Pitombeira de Carvalho
• Informática: o Século XXI já chegou. Precisamos correr para alcançá-lo e, mais do que nunca, raciocinar.
Prof. Paulo Afonso Lopes da Silva
• Estruturas Cognitivas e o Ensino da Matemática
Profª Angela Valadares Dutra de Souza Campos
• Encerrando a Semana da Matemática
Prof. José Carlos de Mello e Souza

BOLETIM Nº 27

— referente ao 2º semestre de 1990.

— em homenagem à memória do Professor José Carlos de Mello e Souza

- Apresentação
- O Ensino da Matemática nos Ciclos Básicos das Universidades: Identificação dos Problemas e Tentativas de soluções
  Profª Maria Laura Mouzinho Leite Lopes
- Papel da Matemática na Educação
  Profª Moema Sá Carvalho
- O Professor Mello e Souza — depoimento sobre sua visão e sua sensibilidade na adequação do ensino da Matemática ao aluno
  Professoras: Anna Averbuch e Franca Cohen Gottlieb
- Técnica Moderna para o Ensino da Matemática
  Professoras: Anna Averbuch e Franca Cohen Gottlieb
- Translações e Simetrias no Plano
  Professoras: Estela Kaufman Fainguelernt e Noelir de Carvalho Bordinhão
- Ao Nosso Saudoso Mestre José Carlos de Mello e Souza
  Alunos da USU da última turma por ele regida
- Cálculo Numérico da Raiz Quadrada
  Prof. José Paulo Carneiro
- Ensinando M.M.C e M.D.C. de Dois Números Nåturais
  Professoras: Lúcia Arruda de Albuquerque Tinoco e Marién Martinez Gonçalves
- O Desenvolvimento do Raciocínio em Geometria
  Profª Lilian Nasser
- Curso Sobre Material Dourado
  Profª Nicola Siani

BOLETIM Nº 28

— referente ao 1º semestre de 1991.

— edita palestras apresentadas na II Semana da Matemática (GEPEM/USU), realizada de 13 a 16 de maio.

- Introdução
- Homenagem ao Professor Mello e Souza
  Profª Estela Kaufman Fainguelernt
- Abertura da II Semana da Matemática
  Profª Maria Laura Mouzinho Leite Lopes
- Razão Matemática X Argumentação
  Prof. José Américo Peçanha

- Sobre o Ensino de Função Linear
  Prof. Luiz Adauto da Justa Medeiros
- Influência das Olimpíadas de Matemática no Ensino de 2º grau
  Prof. Frederico Palmeira
- Informática na Educação
  Prof. Jácomo Palladino
- Aplicações da Álgebra Linear
  Prof. José Paulo Quinhões Carneiro
- Critérios para a Avaliação de Softwares Educacionais
  Profª Ana Regina Cavalcanti da Rocha
- A Alegoria em Matemática
  Prof. Nilson José Machado

BOLETIM Nº 29

— referente ao 2º semestre de 1991.
— transcrição de falas da II Jornada de Educação Matemática e outros artigos.

- Apresentação
- II Jornada de Educação Matemática
  Fala da Profª Circe Navarro Vital Brazil
  Fala da Profª Maria Aparecida Viggiani Bicudo
  Fala do Prof. Eduardo Sebastiani Ferreira
- Afinal, Por Que Ainda se Ensina Logaritmo?
  Profª Gilda de La Rocque Palis
- Níveis de Van Hiele: uma explicação definitiva para as dificuldades em geometria?
  Profª Lilian Nasser
- Etnomatemática e Educação
  Prof. Marcelo C. Borba
- Os Disparadores no Ensino de Alguns Tópicos de Matemática
  Profª Alciléa Augusto
- Padrões para Ternos Pitagóricos Primitivos
  Prof. Ruy Madsen Barbosa
- Recolocando a Questão
  Profª Zaíra da Cunha Melo Varizo