INDICE

- Apresentação 01

- Aspectos Psicológicos de Aprendizagem da Geometria
Rina Hershkowitz com a colaboração de Bem-Chaim,
Celia Hoyles, Glenda Lappan, Michael Mitchelmore,
Shlomo Vinner 03

- Fundamento e Concepção do Projeto Agam 32

- Visualização em Geometria - As Duas Faces da Moeda
Rina Hershkowitz 45

- Atividades com Professores Baseadas em Pesquisas Cognitivas
Rina Hershkowitz, Maxim Bruckhelmer, Shlomo Vinner 62

- LOCI e Pensamento Visual
Rina Hershkowitz, Alex Friendlander, Tommy Dreyfus 77

APRESENTAÇÃO

Este Boletim Especial do GEPEM pretende ser um instrumento de divulgação e de informação para educadores, professores, alunos de graduação e de pós-graduação em Matemática ou Educação Matemática das principais contribuições teóricas recentes ao Ensino da Geometria.

O Boletim foi elaborado tendo como base os principais artigos trabalhados e analisados durante o curso: **"Ensino e Aprendizagem da Geometria"** oferecido pela Pós-Graduação em Educação Matemática - USU e ministrado pela Dra. Rina Hershkowitz do Departamento de Ensino de Ciências do Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel com o qual a Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula mantém um convênio de cooperação técnico-científica.

O curso foi oferecido a professores, alunos da pós-graduação e alunos da graduação.

Os três principais temas subjacentes ao curso proposto eram:

- Geometria como a ciência do espaço.

- Geometria como estrutura matemática.

- Pensamento Geométrico como um componente essencial em muitas áreas.

O curso foi organizado numa combinação de oficinas e leituras, acompanhado de exercícios e leituras colaterais. Além disso manteve-se uma preocupação constante de estabelecer uma interface ativa entre teoria e prática.

Os tópicos abordados foram:

I Geometria e Pré-Escola

1. Percepção (formas, dimensões, orientações, codificação e decodificação).

2. Modelo de Van Hiele para o pensamento geométrico , descrição, aplicações, pesquisas baseadas na teoria de Van Hiele, conseqüências, limitações.

3. Exemplos de Desenvolvimentos Curriculares: O Programa Agam para pensamento visual.

II. Formação do Conceito Geométrico

1. Alguns fundamentos teóricos (por exemplo: Rosch e Mervis).

2. Estruturas epistemológicas dos conceitos geométricos.

3. Pensamento visual versus pensamento analítico no processo de desenvolvimento de conceitos geométricos.

4. Definição conceitual: - Um instrumento passivo ou ativo para a formação de conceitos em Geometria?

III. Processos Utilizados no Raciocínio em Geometria

1. Processos de generalização.

2. O que existe entre a justificativa intuitiva do aluno e a "prova formal"?

3. Implicações para o ensino da Geometria.

IV. O Papel do Microcomputador no Ensino e Aprendizagem da Geometria

1. Softwares no ensino da Geometria: quais e para quê?

2. A revolução do microcomputador no ensino-aprendizagem da Geometria.

V. O Futuro do Ensino da Geometria - algumas esperanças

VI. Geometria e as Outras Áreas da Educação Matemática

Como seria impossível cobrir todos os aspectos abordados durante o curso, selecionamos alguns artigos, de co-autoria da Dra. R. Hershkowitz, significativos para nosso objetivo de divulgar e informar sobre as pesquisas teóricas mais recentes e relevantes da área.

Selecionamos cinco artigos ao mesmo tempo representativos e diversificados do trabalho que foi desenvolvido durante o curso, com tradução de Prof. Paulo Colonese.

- Aspectos Psicológicos da aprendizagem da Geometria

Uma revisão sobre as principais pesquisas e suas fundamentações teóricas sobre o ensino-aprendizagem da Geometria.

- O Projeto Agam - Cultivando a Cognição Visual em Crianças da Pré-Escola.

Um programa desenvolvido para alunos da Pré-Escola especialmente dedicado ao desenvolvimento da cognição visual.

- Visualização em Geometria - As Duas Faces da Moeda

Uma experiência com formas não conhecidas por alunos e professores visando desenvolver um espírito crítico em relação a definições, atributos e conceitos novos.

- Atividades com Professores Baseadas em Pesquisas Cognitivas.

Um exemplo de pesquisa-ação sobre a formação de professores.

- O Software LOCI e Pensamento Visual.

Um software desenvolvido para explorar o conceito de lugar geométrico.

Maiores informações (ou consultas) sobre os trabalhos desenvolvidos durante o curso poderão ser obtidos através da Secretaria da Pós-Graduação em Educação Matemática-USU ou através da Secretaria do GEPEM.

ASPECTOS PSICOLÓGICOS DA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

Rina Hershkowitz
com a colaboração de Ben-Chaim, Celia Hoyles, Glenda Lappan, Michael Mitchelmore & Shlomo Vinner

Introdução

Existem dois aspectos principais clássicos do ensino e aprendizagem da Geometria: a visão da Geometria como a ciência do espaço e a visão da Geometria como uma estrutura lógica, onde a Geometria é o ambiente no qual o aprendiz pode desenvolver suas impressões sobre a estrutura matemática (Freudenthal, 1973). Num estágio mais avançado, este *ambiente geométrico* adquire um significado mais amplo, sem a necessidade de um ambiente real (concreto) que o fundamente.

Há um consenso de que estes dois aspectos estão ligados porque alguns níveis da Geometria - enquanto ciência do espaço - são necessários para aprendizagem da Geometria - enquanto estrutura lógica. Este ponto de vista - aquele que entende as diferentes fases da aprendizagem da Geometria como um processo de desenvolvimento - é intrínseco na maior parte do trabalho teórico de pesquisa e do ensino realizado sobre a Geometria, sendo o fio condutor que conecta as diferentes seções deste artigo.

As várias fases da aprendizagem da Geometria levantam diferentes tipos de questões psicológicas. Se encaramos a Geometria como a ciência do espaço em geral, as questões iniciais são bastante amplas, tais como:

* Como as crianças percebem sua vizinhança?
* Que tipos de códigos são utilizados no processamento das informações visuais?

As questões tornam-se mais específicas se nos detivermos somente em relação a visualização, por exemplo:

* Que tipos de habilidades visuais são necessárias para a aprendizagem da Geometria? Em particular, como as crianças criam uma documentação (registros) de sua vizinhança e como elas interpretam esta documentação; isto é, como as crianças descrevem (verbalmente ou visualmente) o mundo tridimensional e como elas interpretam tais descrições?

Algumas destas questões serão discutidas na seção sobre visualização.

Outro tipo de questão lida com os processos de construção de conceitos básicos (por exemplo, as principais figuras geométricas) e as interrelações entre os elementos de um mesmo conceito e entre diferentes conceitos. Tais questões serão discutidas na seção sobre conceitos e interrelações. Estudos dentro do domínio da Geometria enquanto uma estrutura lógica levantam questões sobre generalizações e processos de provas. Estas questões serão discutidas na seção sobre conjecturas e provas.

Nos últimos anos, foi desenvolvida uma considerável quantidade de pesquisas envolvendo a Geometria num ambiente de aprendizagem informatizado. Os fortes elementos visuais fornecidos pelo computador, o seu potencial interativo e o modo como os objetos visuais podem ser facilmente manipulados e vistos de diferentes perspectivas têm atraído muitos educadores matemáticos. A maior parte dos trabalhos apresentados no International Group for the Psychology os Mathematics Education (PME) sobre esta questão têm focalizado o ensino da Geometria e não o computador em si mesmo. Existe um interesse comum em usar a interação criança<->computador para criar situações de aprendizagem que facilitem e provoquem a aquisição de habilidades visuais, de conceitos geométricos específicos ou de processos mentais. Portanto, nós podemos antecipar questões e tendências de pesquisa conforme elas forem "refletidas" no espelho do ambiente informatizado. Esta reflexão levanta questões relevantes às questões apresentadas anteriormente, como também traz novos insights e abre novas áreas de investigação. A contribuição especial do computador será discutida em cada uma das seções seguintes.

De modo a contextualizar as pesquisas e as suas aplicações ao ensino apresentados neste artigo, começaremos com uma discussão sobre alguns fundamentos teóricos.

Sobre as Teorias e Suas Linhas de Pesquisas

Podemos distinguir duas abordagens principais na forma como as pesquisas cognitivas estão relacionadas às teorias. Na primeira, a teoria baseada numa abordagem *top-down*, o foco de interesse está na teoria que se supõe seja confirmada ou rejeitada. O conteúdo geométrico e as tarefas que são selecionadas nestas investigações *top-down* são escolhidas de modo a se ajustarem ao modelo teórico e não refletem necessariamente os conteúdos comuns e os processos envolvidos na aprendizagem da Geometria. A segunda abordagem, *bottom-up*, adota o conteúdo e a estrutura a serem aprendidos como ponto de partida de suas investigações; a compreensão e a explicação das dificuldades e processos do aluno são os objetivos principal destas pesquisas. De acordo com esta abordagem, a teoria não é a base para o projeto de pesquisa, mas é usada como um instrumento para explicar as situações e os resultados levantados pela pesquisa, quando a teoria está adequada (Balacheff, 1987b). As pesquisas podem ainda conduzir ao aperfeiçoamento das teorias ou mesmo a formulação parcial de novas teorias.

A distinção anterior entre estas duas abordagens é, em certo sentido, uma super-simplificação e podemos encontrar trabalhos de pesquisa que estejam entre as duas abordagens. Entretanto, a maior parte das pesquisas cognitivas correntes, incluindo as pesquisas sobre Geometria desenvolvidas pelo Grupo do PME, concentram-se na segunda abordagem, enquanto a primeira abordagem foi mais prevalente há alguns anos atrás. Desta forma, a discussão nas próximas seções deste artigo considera as teorias e as teorias parciais como instrumentos de pesquisa e de ensino. No restante desta seção, discutiremos algumas características de teorias relevantes, acompanhadas de exemplos de pesquisas baseadas nas mesmas.

<u>Piaget</u>

Em sua teoria da concepção do espaço da criança (Piaget&Inhelder, 1967) e da concepção da Geometria da criança (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1960) Piaget descreve o desenvolvimento da representação espacial da criança. Este foi definido como a imagem mental do espaço real em que a criança está atuando, onde "a representação mental não é meramente uma consulta aos dados de um arquivo da memória. Ela é uma reconstrução ativa de um objeto no nível simbólico." (J.I. Martin, 1976a,p.28). Este processo não é puramente perceptivo. Nas palavras de Piaget:

> *A percepção é o conhecimento dos objetos resultante do contato direto com os mesmos. Ao contrário disto, a representação ou imaginação envolve a evocação dos objetos em sua ausência ou, quando ocorre paralela à percepção, em sua presença. Ela completa o conhecimento perceptivo pela referência a objetos não percebidos realmente. (Piaget & Inholder, 1967, p.17)*

Com certa simplificação, podemos dizer que Piaget, a seu modo, estava interessado nas transformações mentais do espaço real para a representação do espaço da criança, naqueles atributos dos objetos reais que são invariantes sobre estas transformações e como eles se modificam com a idade. De acordo com a Teoria de Piaget, as primeiras transformações da criança são aquelas que conservam os atributos topológicos dos objetos (por exemplo, interior e exterior de um conjunto, periferia (limites) de um conjunto, conectividade, fechamento e abertura de curvas). Apenas mais tarde, a criança é capaz de transferir para sua representação do espaço os atributos Euclidianos dos objetos (por exemplo, comprimento de linhas e tamanho de ângulos). Os resultados desta transformações Euclidianas são as conservações dos conceitos de comprimento, área, volume, etc. É apenas neste ponto que a criança, de acordo com Piaget, pode executar tarefas de mensuração e de níveis mais altos.

O volume de pesquisas baseadas nas pesquisas piagetianas tem sido bastante amplo e diversificado. Alguns estudos (Dodwell, 1959; Lowell, 1959) forneceram apoio a suas teorias, enquanto outros (J. L. Martin, 1976; Taloumis, 1975) forneceram evidências contraditórias as teorias piagetianas.

Van Hiele

Enquanto as teorias piagetianas relacionam fundamentalmente a Geometria com a ciência do espaço, as teorias de van Hiele combinam duas visões da Geometria, como ciência do espaço e como instrumento com o qual demonstrar uma estrutura matemática. A teoria distingue níveis seqüenciais do pensamento geométrico (Freudenthal, 1973; Hoffer, 1983; van Hiele & van Hiele-Geldof, 1958; Wirszup, 1976; e muitos outros). Além disso, a teoria de van Hiele sugere *fases de ensino* que auxiliem o desenvolvimento das crianças através destes níveis. Os níveis, numa descrição resumida, seriam (Hoffer, 1983; Usisnkin, 1982):

> **Primeiro Nível**: Reconhecimento ou Visualização: As crianças percebem os conceitos geométricos em termos de sua *aparência física*; as figuras são reconhecidas pela sua *forma*, como um todo, e não pelas suas propriedades.
>
> **Segundo Nível**: Análise: As crianças podem analisar as *propriedades* das figuras.
>
> **Terceiro Nível**: Ordem. As crianças podem ordenar logicamente figuras e relações, mas não podem operar dentro de um sistema matemático. Portanto, uma dedução simples pode ser acompanhada, mas uma prova completa não é compreendida.
>
> **Quarto Nível**: Dedução. As crianças compreendem o significado da dedução e o papel dos diferentes elementos na estrutura dedutiva. Portanto, as provas podem ser "reinventadas" pelas crianças ou ao menos, compreendidas.
>
> **Quinto Nível**: Rigor. As crianças podem trabalhar numa variedade de sistemas axiomáticos e são capazes de fazer deduções abstratas. Por exemplo, uma Geometria não-euclidiana pode ser compreendida.

Mais tarde, a teoria de van Hiele foi modificada e reduzida a três níveis (van Hiele, 1987): o primeiro, segundo e terceiro nível (que inclui, mais ou menos, os outros três níveis apresentados acima). Outras características da teoria de van Hiele são as seguintes:

* A Memorização não é considerada ao caracterizar qualquer um dos níveis.

* A criança avança de um nível para o nível seguinte, sem saltar nenhum dos níveis. (são seqüenciais).

* Os níveis são discretos e globais; isto é, a criança está no mesmo nível em diferentes contextos.

* As crianças que estejam num determinado nível não podem interagir ou compreender o ensino em níveis mais elevados.

* O desenvolvimento do pensamento do indivíduo de um nível para o nível seguinte é consequência do ensino e de experiências de aprendizagem e não depende muito da maturidade.

Está claro que a teoria de Van Hiele assume como meta final da aprendizagem da Geometria a construção da Geometria enquanto uma estrutura dedutiva, mas com a Geometria enquanto ciência de nosso ambiente sendo um pré-requisito necessário.

A teoria de van Hiele, especialmente o modelo dos níveis, tem atraído muitos educadores e pesquisadores matemáticos. A maioria das pesquisas baseadas na teoria de van Hiele tem sido realizadas nos Estados Unidos. (Para conhecer os trabalhos russos de mais de 20 anos atrás, consulte Wirszup, 1976). As hipóteses de que os níveis possam ser identificados, sejam discretos e formem uma hierarquia têm sido pesquisadas e os aspectos preditivos do modelo tem sido investigados. Além disso, têm sido feitas tentativas de usar o modelo como base para elaboração de currículos e livros didáticos.

A generalidade e a globalidade do modelo de van Hiele são ao mesmo tempo sua força e sua fraqueza. De modo a utilizá-lo em pesquisas e no ensino é necessário estabelecer instrumentos operacionais pelos quais se possa determinar o nível de desenvolvimento particular de um indivíduo. Portanto, na maioria das pesquisas e do ensino, foram feitos esforços para estabelecer estes instrumentos (por exemplo, Usisnkin, 1982; teste de Hoffer, 1981, tabelas).

Os resultados das pesquisas mostraram que, em geral, os níveis criam a hierarquia descrita e coincide com o comportamento das crianças, com poucas exceções:

* O lugar do quinto nível de van Hiele na hierarquia não está claro. (Usisnkin, 1982).

* O caráter discreto e a globalidade dos níveis são duvidosos, o que significa que uma criança pode atuar em diferentes níveis em diferentes contextos ou que pode até mesmo mudar de nível numa mesma tarefa. (Burger & Shaughnessy, 1986; Gutierrez & Jaime, 1987; Mayberry, 1983).

As últimas descobertas levam a questionar um currículo baseado na diversidade (broad-based) *versus* um currículo baseado na especificidade (narrow-based); isto é, se devemos introduzir muitos conceitos geométricos às crianças e progredir com cada um deles em paralelo até chegarmos ao terceiro nível de van Hiele (a abordagem usual) ou introduzir uma coleção limitada de conceitos às crianças, por exemplo, quadriláteros, e progredir até o terceiro nível e só então introduzir conceitos mais amplos.

Esta questão tem sido discutida intensivamente nos encontros do Grupo de Geometria nas Conferências do PME (Hershkowitz & Vinner, 1987). Ela ainda necessita ser pesquisada e pode ter um importante papel no planejamento do ensino da Geometria.

Um uso típico das pesquisas de van-Hiele tem sido a determinação dos níveis de uma determinada população. Por exemplo, Mayberry (1983), Matos (1985) e Gutierrez & Jaime (1987) estudaram o desempenho de professores em formação da escola básica em suas respectivas cidades e descobriram que eles geralmente atuam no primeiro ou no segundo nível de van Hiele.

Um exemplo típico é fornecido pelo trabalho de De Villiers e Njisane (1987). Eles conduziram um estudo detalhado com alunos do curso secundário. Para tornar os níveis de van Hiele mais operacionais, eles desenvolveram seu próprio teste. Os itens variavam de simples questões (como indicar os ângulos alternos quando duas paralelas são cortadas ou listar as propriedades de uma determinada figura como um paralelogramo) até questões que requeriam a interpretação de definições formais e a construção de provas formais. Muitas questões lidavam com conteúdos encontrados normalmente no curriculo secundário. De Villiers e Njisane distinguiram oito categorias de pensamento geométrico necessários a resolução das diversas questões:

1. Reconhecimento e representação de figuras típicas.
2. Reconhecimento visual de propriedades.
3. Uso e compreensão da terminologia.
4. Descrição verbal das propriedades de uma figura ou seu reconhecimento pela descrição verbal.
5. Dedução direta.
6. Deduções indiretas.
7. Classificações hierárquicas (relações de inclusão).
8. Leitura e interpretação de definições apresentadas.

Suas análises os levaram a estabelecer que: (a) as categorias 1 e 2 pertencem ao primeiro nível de van Hiele; (b) as categorias 3 e 4 pertencem ao segundo nível de van Hiele; e (c) as categorias 5 e 6 pertencem ao terceiro nível.

Eles levantaram dúvidas quanto à categoria 7. De acordo com a teoria de van Hiele, a classe de inclusão é uma relação entre conceitos e seus atributos e portanto estaria no terceiro nível. Mas de acordo com seus resultados, este era a categoria mais difícil. (O modelo reduzido de van Hiele resolve este problema). Como já era esperado, eles descobriram que a porcentagem de crianças respondendo corretamente num determinado nível aumenta com o nível da turma daquela série escolar (maturidade, experiência, ou ambos?) mas diminuía conforme o nível da série aumentava.

Outra utilização típica do modelo da van Hiele tem sido as pesquisas realizadas no ambiente de aprendizagem Logo. Os fundamentos deste tipo de pesquisas estão baseados em dois aspectos:

* A necessidade de cobrir a lacuna curricular entre o nível da Geometria da escola elementar e o nível necessário para a aprendizagem da Geometria no secundário; aqui as sequências instrucionais baseadas no modelo de van Hiele parecem se adequar bastante bem.

* O fato de que o Logo pode ser usado como um ambiente de aprendizagem geométrico de alto nível e, portanto, tem o potencial de ser a base em que esta ponte necessária pode ser construída.

A questão geral é se as experiências de aprendizagem com Logo podem acelerar o desenvolvimento da criança através dos níveis de van Hiele. Por exemplo, Scally (1986, 1987) usando uma abordagem clínica com entrevistas, pré-testes e pós-testes com grupos experimentais e de controle, investigou como o ambiente Logo pode fornecer experiências do segundo e terceiro níveis de van Hiele para alunos do primeiro ano secundário partindo no curso de Logo do primeiro e segundo níveis. Seu trabalho envolvia o desenvolvimento de uma definição operacional dos níveis de van Hiele para o conceito de ângulo, como base para as entrevistas dos alunos. Ela analisou o desenvolvimento dos alunos dentro de cada nível e entre os níveis e descobriu que os alunos com a experiência Logo desenvolveram-se mais do que o grupo de controle.

Ludwig e Kieren (1985) investigaram, além da questão acima, uma questão mais simétrica, isto é, as interrelações entre o conhecimento geométrico construído de acordo com o modelo de van Hiele e a utilização do Logo. Eles filmaram o comportamento dos alunos da sétima série enquanto aprendiam transformações geométricas usando o Logo. A análise das fitas de vídeo mostraram uma interrelação positiva: A experiência da utilização dos procedimentos Logo como instrumentos de pensamento para representar idéias geométricas parece facilitar o desenvolvimento de idéias geométricas do primeiro nível para o segundo nível de van Hiele.

A Visualização no Exemplo 3D <=> 2D

Visualização geralmente se refere à habilidade de representar, transformar, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre informação visual. Fischbein (1987) ao analisar a visualização, afirmou que "muito freqüentemente o conhecimento intuitivo é identificado com a representação visual. É uma afirmativa trivial que nós tendemos naturalmente a pensar em termos de imagens mentais e que aquilo que não conseguimos imaginar visualmente é difícil de perceber mentalmente." (pág. 103). Ele continua argumentando que

> a representação visual contribui para a organização da informação em representações sinópticas e desta forma, constitui um fator importante da globalização. Por outro lado, a concretude das imagens visuais é um fator essencial no estabelecimento do sentimento de auto-evidência e mediação. Uma imagem visual não apenas organiza os dados disponíveis em estruturas significativas mas ela também é um fator importante na orientação do desenvolvimento analítico de uma solução. (pág. 104).

Existe uma concordância geral de que a visualização é importante não apenas pelo seu próprio valor, mas também por que o tipo de processos mentais envolvidos são necessários em (e podem transferir-se para) outras áreas da matemática (veja Bishop, 1989). Esta concordância geral fundamenta a linha de pensamento expressa por Fischbein, sendo especialmente relevante, é claro, à Geometria, na qual os elementos visuais formam alguns dos "blocos de construção." Bishop (1983) fez uma distinção entre "a habilidade de processamento (HP)" e a "habilidade para interpretação de informação figurativa (HIFI)." Ele descreveu HP como envolvendo "a visualização e a translação das relações abstratas e informações não figurativas para termos visuais" (pág. 184). Se nós seguirmos a diferenciação de Bishop, nós podemos classificar rigorosamente as pesquisas sobre visualização em investigações do processamento visual do próprio domínio visual e em investigações do processamento visual dos domínios não visuais.

Neste artigo, nós estamos preocupados com a visualização em relação a aprendizagem da Geometria, que em certo sentido é um processamento visual do próprio domínio visual. Nesta seção, nós rediscutimos o papel da visualização nos processos de aquisição de conceitos e em processos geométricos de níveis mais elevados. Para uma revisão sobre a própria visualização e a relação entre a visualização e a educação matemática em geral, veja Bishop (1980, 1989).

Na tentativa de investigar como o espaço é percebido e interpretado pelos indivíduos, os pesquisadores utilizam uma ampla variedade de tarefas visuais e medidas, tais como a relação bivalente entre os objetos tridimensionais (3D) e suas representações bidimensionais (2D), dobraduras de papel e a descoberta de figuras planificáveis. Em particular, a transformação 3D <=> 2D (que é uma habilidade extremamente necessária à aprendizagem da Geometria e as suas aplicações) tem atraído muitos pesquisadores (Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1985; Bessot & Eberhard, 1986; Bishop, 1978, 1979; Burton, Cooper & Leder, 1986; Cooper & Sweller, 1989; Gaulin, 1985; Mitchelmore, 1980a, 1980b, 1983; Mukhopadhyay, 1987). Neste direcionamento, o desenho dos objetos 3D tem sido investigado extensivamente e sérias dificuldades têm sido apontadas. Por exemplo, Mitchelmore (1980a) definiu níveis de desenvolvimento para esta habilidade e os utilizou para classificar os desenhos espontâneos de objetos tridimensionais das crianças. A maioria dos sujeitos estavam em níveis bastante baixos. A pesquisa de Ben-Chaim, Lappan & Houang (1989) é outro exemplo típico deste tipo de trabalho. Eles investigaram a habilidade de adolescentes comunicarem informações visuais usando a Tarefa de Descrição de Construções que consiste na descrição de uma construção formada por 10 pequenos cubos acoplados. A tarefa dos alunos era descrever a construção para um amigo ausente. As produções dos alunos foram classificadas pelo modo de representação (verbal, misto e gráfico). Os resultados demonstraram que os alunos apresentavam grande dificuldades em comunicar satisfatoriamente uma informação visual. As várias tentativas de descrever as construções 3D exemplificam os problemas que as crianças possuem na representação de objetos tridimensionais. A Figura 1 mostra algumas das produções obtidas na pesquisa de Ben-Chaim et al. (1989). A figura 1a demonstra a descobertas de Mitchelmore (1983) de que as crianças apresentam dificuldades na representação de retas paralelas e perpendiculares. As figuras 1b e 1c exemplificam dificuldades que estão relacionadas a percepção de profundidade no desenho das vistas da construção. É interessante notar que as descrições dos alunos estavam aproximadamente igualmente distribuídas nos três modos de representação. Burton et al. (1986) descobriu numa tarefa semelhante que a maioria dos professores em formação produziram descrições verbais.

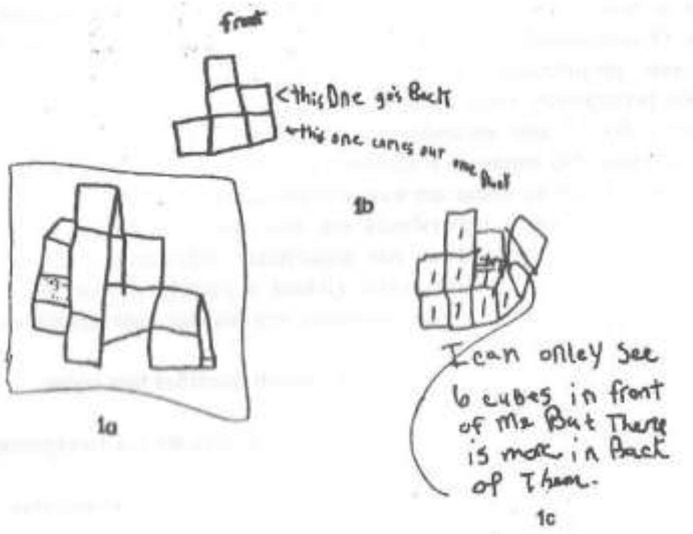


Figura 1. Desenhos de crianças de construções formadas por blocos (de Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1989, pág.: 132, 137 & 138; reimpressão com permissão de KluwerAcademic Plubishers).

A direção contrária - isto é, a interpretação de desenhos de volta ao espaço tridimensional real - é muito importante na nossa sociedade moderna, na qual nós obtemos grande parte da informação de nosso ambiente tridimensional através de meios bidimensionais (jornais, revistas, fotos, video, televisão, etc). Mas este direcionamento tem sido bem menos investigado. A principal linha de investigação neste sentido tem sido explicar como os alunos se movem dos desenhos bidimensionais aos desenhos quase-perspectivos - considerados serem internalizados de modo muito semelhante as visões das estruturas tridimensionais reais (Metzler & Shepard, 1974). Foi descoberto que esta translação também é muito difícil (veja por exemplo, Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1988). Burton et al. (1986) descobriu que na interpretação, os professores em formação preferiram descrições visuais das estruturas 3D às descrições verbais.

O computador veio introduzir uma dimensão *dinâmica* às pesquisas sobre visualização pois as representações das figuras 3D e 2D sobre o monitor podem ser manipuladas e transformadas de muitas maneiras. Além disso, o computador permite que o pesquisador examine micro-estágios do comportamento do aluno. Por exemplo, Osta (1987) usou dois programas comerciais: o MacSpace, no qual podem ser executadas operações sobre o objeto 3D representado sobre a tela e o MacPaint no qual podem ser executadas operações apenas sobre desenhos figurativos 2D. Ela criou sequências instrucionais de situações problema em que os alunos tinham que modificar as transformações 2D executadas sobre os designes figurativos para gerar as transformações 3D executadas sobre o objeto representado, e vice-versa. O computador apresentava algumas condições que forçavam o aluno a usar propriedades geométricas dos objetos e não apenas as informações perceptivas. Osta analisou as estratégias de solução de alunos da 8.ª série e do 1.º ano secundário e descobriu que elas tendiam a ser desenvolvimentais. No início, o trabalho dos alunos era local, lidando com pequenas partes da figura como um todo e resolvendo o problema apenas por meios perceptivos. Com a experiência em tais situações de resolução de problemas e conforme progrediam nas sequências instrucionais, os alunos começavam a considerar critérios mais globais e percebiam que os meios perceptivos eram ineficientes e que, portanto, era melhor usar propriedades geométricas dos objetos 3D.

Este tipo de pesquisas 3D <=> 2D levantou questões tais como:

* Quais são os fatores que influenciam a descrição e a interpretação dos desenhos de figuras 3D?
* Estas habilidades de visualização podem ser adquiridas ou melhoradas através de treinamentos explícitos?
* Caso afirmativo, o que deveria ser incluído no currículo, e como deveria ser ensinado?

Em relação a primeira questão, existem muitas evidências de que os fatores culturais, a experiência e a familiaridade com as convenções de transformação de figuras 3D em suas representações 2D e vice-versa possuem efeitos consideráveis no desenho e interpretação das figuras 3D. Os três fatores estão acoplados: as convenções podem ser consideradas como os elementos da "linguagem" formulados pela cultura para expressar e representar o espaço. Adquirir experiência é adquirir mais "efeitos" culturais. Mas diferentes pesquisadores relacionam estes fatores de forma diferente. Os estudos de Mukhopadhyay (1987) fornecem um exemplo de um efeito cultural e da experiência. Ela realizou uma experiência numa situação livre de nossas convenções usuais. Ela entrevistou crianças entre 8 e 12 anos, vivendo isoladas na Índia que não tinham tido quase nenhuma escolaridade e que não tinham sido expostas às convenções de representação comuns da cultura ocidental dos objetos sólidos que foram apresentados às crianças. Ela descobriu que sua habilidade de representação visual estava relacionada ao seu treinamento profissional no tipo de ocupação tradicional de seu grupo familiar em sua cultura. Desta forma, as crianças das famílias que trabalhavam com cerâmica e portanto, com sólidos ridimensionais,produziram representações de objetos 3D muito mais complexas do que as crianças das famílias de agricultores e das famílias de tecelãos. (vide Figura 2).

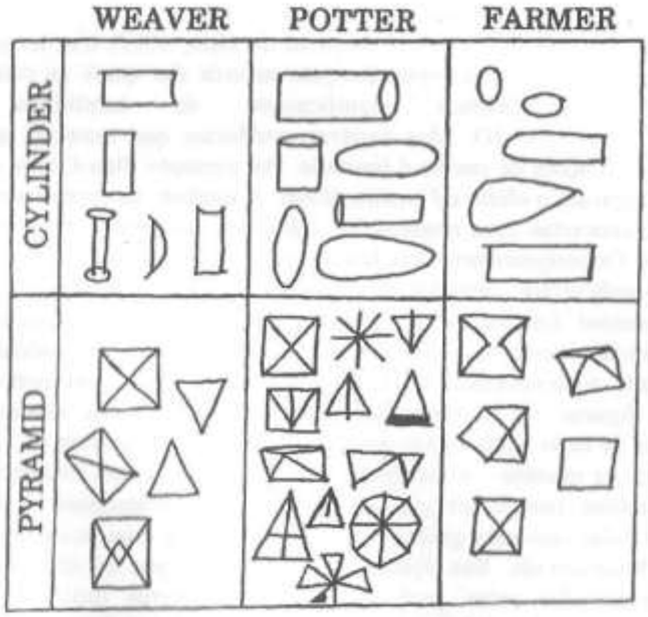


Figura 2. Representações de sólidos 3D por crianças de famílias com diferentes tradições profissionais (de Mukhopadhyay, 1987).

Existem muitos outros estudos inter-culturais que demonstram diferenças culturais (por exemplo, Bishop, 1978; Mitchelmore, 1980a). Mitchelmore argumenta que estas diferenças "refletem diferenças inter-culturais nas atitudes em relação ao uso de modelos espaciais no pensamento" (pág. 205) e que esta atitude é parcialmente revelada pelo "grau de ênfase geométrica no currículo escolar de matemática" (pág. 205). Não existe nenhuma outra conclusão envolvendo os efeitos da experiência (fora ou dentro da escola) e da familiaridade com as convenções. Geralmente, o efeito de ambos é considerado ser positivo, mas existem contra-exemplos. Por exemplo, Mitchelmore (1983) apresentou evidências de que os erros de desenho persistem mesmo quando as crianças estão muito familiarizadas com as convenções usuais. Burton et al. (1986) mostrou que, os mesmos tipos de dificuldades encontradas por Ben-Chaim et al. (1989) persistem nos adultos a despeito do aumento de sua experiência (embora desestruturada).

A pesquisa apresentada levanta ainda uma segunda questão: Em que medida uma intervenção direta do ensino pode melhorar a habilidade de transformação 3D<=>2D? Esta questão é importante (Gaulin, 1985) mas nem um pouco simples. Bishop (1989) cita Lean sobre o efeito de que estas "habilidades visuais (envolvidas nas HIFIs) são ensináveis desde que sejam fornecidas experiências apropriadas" (pág. 12).

Trabalhos de pesquisas (tais como os de Osta, 1987) têm fornecido exemplos de experiências de aprendizagem através das quais as crianças atingiram desenvolvimentos significativos da habilidade de transformação 3D <=> 2D. Mas existem evidências que mostram que o efeito das intervenções de ensino é limitado. Por exemplo, Ben-Chaim et al. (1988) investigaram o efeito do ensino direto. A unidade de ensino oferecia experiências concretas com construções cúbicas e suas representações em desenhos 2D. Os pesquisadores concluíram que "da quinta à oitava séries, os alunos se beneficiaram consideravelmente com o ensino, e que o ganho (desenvolvimento) foi similar para meninos e meninas, a despeito de diferenças iniciais destes dois grupos"(pág. 51). Mas apesar do módulo de ensino incluir representações e familiarização com as convenções do desenho de figuras 3D e interpretações, o desempenho dos alunos nos mesmos tipos de itens ainda estava apenas moderadamente correto.

A terceira questão - o que incluir no currículo e como isto deve ser ensinado também parece ser crucial. A seguir apresentaremos algumas tentativas de lidar com esta questão. Nos Países Baixos uma nova *Unidade Visual* foi desenvolvida. Sua fundamentação era de que as situações de ensino demonstradas pelos professores ou pelos livros didáticos (que estavam baseadas em habilidades de transformações 3D <=> 2D) geralmente são restritas a procedimentos de desenho estereotipados (nossas convenções usuais?) e que deviam ser ampliadas, incluindo uma compreensão mais crítica dos procedimentos de desenho e interpretação (Godijn & Kindt, 1985). O currículo proposto utiliza muitos tipos de técnicas: comparações entre próximo e distante no mundo real e pequeno e grande no desenho, pontos de fuga e horizonte, empacotamento de objetos, linhas ocultas, linhas de fuga, sombreamento&projeções, imaginar a si mesmo estando em algum lugar sugerido, vistas de frente, laterais, de cima, etc.

Outro projeto de estilo holístico, que vai bem além do exemplo 2D <=> 3D, é o Projeto Agam (Razel & Eylon, 1986). É um programa básico e bastante geral sobre educação visual para crianças de 3 a 7 anos de idade. Sua fundamentação é de que dentro do currículo regular da escola, não é feito nenhum esforço sistemático para desenvolver as habilidades visuais a despeito de sua importância. Este projeto objetiva preencher esta lacuna ensinando sistematicamente conceitos visuais básicos que podem ser usados como uma base para o desenvolvimento de uma linguagem visual. Um cuidadoso estudo, ainda em processo, acompanhando a implementação do Projeto Agam já mostra uma melhoria significativa tanto das habilidades visuais quanto do conhecimento geométrico.

A discussão anterior sobre visualização e o exemplo 3D <=> 2D estão relacionados aos aspectos positivos da visualização. A única crítica que entra em discussão envolve as convenções culturais. O valor de utilizar convenções como elementos de linguagem na comunicação de informação visual tem dois lados. De um lado, nós precisamos destes elementos "linguísticos" para nos comunicar e para o desenvolvimento do pensamento visual posterior. Portanto, sempre existem esforços de criar mais elementos linguísticos para representar o mundo físico e para o processamento da informação visual. A linguagem visual no Projeto Agam é um exemplo deste esforço; outro exemplo é a Notação de Movimento criada por Eshkol e Wachman (1973), que é a linguagem do movimento do corpo humano no mundo 3D. Por outro lado, em cada desenvolvimento linguístico existe alguma arbitrariedade. Os desenvolvimentistas (indivíduos ou culturas) escolhem (criam) os "blocos de construção" da "linguagem" mas esta escolha não é a única possível na construção de uma linguagem envolvendo uma certa habilidade. A utilização de um número limitado de elementos linguísticos fixos pode, desta forma, colocar algumas limitações no desenvolvimento desta habilidade. Um exemplo extremado da reação a este "sentimento de limitação" é o trabalho de artistas que romperam as fronteiras das convenções visuais aceitas em seu tempo ao longo dos anos.

Além das limitações visuais induzidas pelo uso de convenções resultantes da cultura, existem ainda limitações visuais induzidas pelas mentes individuais, tais como limitações perceptivas. Estas limitações serão discutidas nas próximas seções.

Conceitos Geométricos Básicos e Relações

Nós incluímos neste título os aspectos cognitivos dos processos de aprendizagem de conceitos geométricos básicos (por exemplo: ângulos, triângulos, quadriláteros), interrelações tais como inclusão de classes, conceitos de alto nível (como os exemplos de semelhança e simetria) e mensurações geométricas.

Conceitos Básicos

Tem havido uma considerável discussão nos encontros do PME sobre a distinção entre o *Conceito* - o conceito como decorre de sua definição matemática - e a *Imagem Conceitual* - o conceito como está refletido na mente individual; isto é, o resultado dos processos mentais de formação do conceito (Vinner, 1983). O objetivo das pesquisas é acompanhar o desenvolvimento da Imagem Conceitual na mente individual (ou em uma determinada população), onde o conceito fornece um sistema de referência contra o qual este desenvolvimento é comparado e examinado (confrontado). Para compreender melhor como os alunos constroem as imagens conceituais geométricas e os fatores que influenciam este desenvolvimento, é necessário uma análise dos conceitos e de sua estrutura matemática. Boa parte da estrutura dos conceitos básicos pode ser considerada como *conjunção*. Por exemplo, um triângulo isósceles pode ser visto como uma conjunção (E) dos seguintes atributos relevantes: (i) um triângulo (ii) ter dois lados (iii) que são iguais. (Um triângulo também já é uma conjunção, mas no estágio em que nós geralmente definimos triângulos isósceles, ele já é considerado uma entidade). As interrelações matemáticas entre os elementos de um conceito matemático podem ser descritas no esquema mostrado na figura 3.

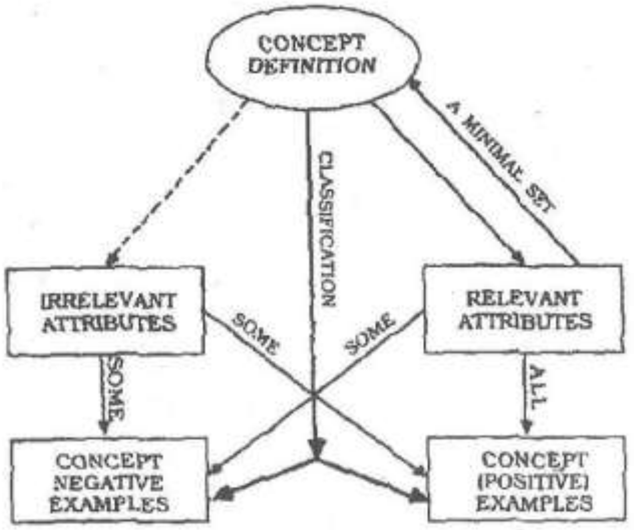


Figura 3. Interrelações entre os elementos conceituais.

O conceito é derivado de sua definição matemática e desta forma, possui atributos relevantes (críticos) - aqueles atributos que devem ser satisfeitos para termos um exemplo positivo do conceito - e atributos não críticos - aqueles atributos que apenas alguns dos exemplos positivos possuem. A própria definição verbal geralmente inclui um subconjunto mínimo dos atributos relevantes suficientes para definir o conceito. A definição portanto pode ser considerada como um critério para instâncias de classificação entre exemplos conceituais positivos ou negativos. Os exemplos negativos (os contra-exemplos) que são relevantes para o ensino e para as pesquisas sobre a formação do conceito são aqueles que possuem alguns, mas não todos os atributos relevantes. Outra característica estrutural pode ser chamada de "movimento de oposição à interrelação de inclusão" (Hershkowitz, 1987, pág. 240) entre os conjuntos de exemplos (conceitos por si mesmos) de um lado, e seus conjuntos de atributos, de outro. Por exemplo, o conjunto dos quadrados está incluído no conjunto dos paralelogramos, que está incluído no conjunto dos quadriláteros. Mas se analisarmos os conjuntos de atributos críticos de cada um dos conjuntos anteriores, nós obtemos uma interrelação de inclusão na direção oposta.

Além das características estruturais anteriores, que não são exclusivas aos conceitos geométricos, os exemplos, os contra-exemplos relevantes e os atributos dos conceitos básicos na Geometria são todos entidades visuais. Esta característica fornece um sabor de concretude, que lhes dá uma vantagem como tema para pesquisas psicológicas sobre formação de conceitos (veja a revisão sobre formação de conceitos matemáticos em geral feita por Sowder, 1980). Este tipo de pesquisa geralmente investiga uma cadeia (ou cadeias) na estrutura acima, que são comuns à formação de conceitos em geral.

Nossa preocupação aqui são os processos cognitivos que caracterizam a construção dos próprios conceitos geométricos básicos. Está claro que a despeito do fato de que eles possam ser facilmente definidos estruturalmente em termos de atributos, exemplos e contra-exemplos, e assim por diante, como fizemos acima, estes termos não são suficientes para descrever o desenvolvimento cognitivo das imagens conceituais da mente. Vamos descrever algumas características principais deste desenvolvimento que têm sido sugeridas através dos resultados de pesquisas.

O Fenômeno de Formação de Protótipos

Vinner e Hershkowitz (1983) e Hershkowitz, Vinner e Bruckheimer (1987) investigaram as imagens conceituais de conceitos geométricos básicos de crianças da 5a. à 8a. séries e de professores. Os conceitos e tarefas eram amostras retiradas do "silabário" da escola elementar. Os pesquisadores descobriram que cada conceito possui um (ou mais) *exemplo protótipo* que são forjados inicialmente e portanto existem na imagem conceitual da maioria dos sujeitos. Os exemplos-protótipos geralmente são o subconjunto de exemplos que possui "a maior listagem" de atributos - todos os atributos críticos do conceito e mais ainda aqueles atributos (não-críticos) específicos que possuem fortes características visuais: por exemplo, o triângulo-retângulo com ângulo reto em orientação vertical, os lados e ângulos iguais do quadrado como exemplo de um quadrilátero, a altura interna de um triângulo e as diagonais internas de um polígono. Estas descobertas estão de acordo com outros estudos (veja em particular, Rosch & Mervis, 1975, que investigaram intensivamente o fenômeno de formação dos modelos protótipos num contexto não geométrico). Além disso, Vinner e Hershkowitz descobriram que mesmo em conceitos instantaneamente formados, onde um conceito *inventado* era apresentado através de uma definição verbal sem apresentar nem mesmo um exemplo, os sujeitos (alunos e professores) produziam basicamente os mesmos exemplos protótipos.

O protótipo é a base para julgamentos "prototípicos". Para cada conceito, os indivíduos usam o exemplo protótipo como modelo em seu julgamento de outras instâncias. Fischbein (1987) chamou este tipo de julgamento de "a natureza paradigmática do julgamento intuitivo" (pág. 143). Os estudos de Wilson (1986) ilustram tais julgamentos paradigmáticos. Ela investigou "as interrelações entre as definições das crianças de retângulos e suas escolhas de exemplos" (pág. 158), solicitando que os sujeitos definissem o conceito, identificassem exemplos conceituais adicionais e reagissem a algumas afirmativas envolvendo o conceito. Ela descobriu que os alunos escreviam definições que eles não aplicavam quando escolhiam exemplos ou quando reagiam às afirmativas. A escolha de exemplos dos alunos estava baseada mais em seus próprios protótipos do que em suas próprias definições.

Existem 2 tipos de julgamentos prototípicos (Vinner & Hershkowitz, 1983):

> *Tipo 1*. O exemplo protótipo é usado como um sistema de referência e o *julgamento visual* é aplicado a outras instâncias (primeiro nível de van Hiele). Por exemplo, na construção da altura de um determinado triângulo, as crianças falham ao desenharem exemplos de alturas que contradizem sua imagem conceitual protótipa de uma altura *interna* e acabam desenhando alguns segmentos internos do triângulo que não correspondem à definição de altura.

> *Tipo 2*. O exemplo protótipo é usado como um sistema de referência, mas o sujeito baseia seus julgamentos nos *atributos próprios do protótipo* e tenta impor estes atributos a outros exemplos deste conceito. Quando isto não funciona, o sujeito simplesmente não aceita a figura como um exemplo do conceito. Por exemplo: "Todas as figuras, exceto o quadrado, não são quadriláteros porque elas podem ter lados iguais, mas elas não possuem ângulos iguais." Este tipo de resposta, em certo sentido, é analítica (segundo nível de van Hiele) mas representa um comportamento errôneo.

O fenômeno do protótipo e o julgamento prototípico parecem ser fundamentalmente um produto de processos visuais. Os atributos irrelevantes do protótipo geralmente possuem fortes características visuais (um forte apelo visual) e desta forma eles são atingidos primeiro e então, passam a atuar como perturbadores. Outro tipo de julgamento será discutido no próximo parágrafo.

Aspectos Analíticos. Existem evidências de que a formação dos conceitos geométricos é, pelo menos parcialmente, um resultado de aspectos lógico-analíticos. Alguns exemplos destas evidências são as seguintes:

> * *Julgamento Tipo 3*. Além dos dois tipos de julgamento prototípico mencionados acima, o julgamento analítico correto também é comum (Hershkowitz & Vinner, 1983). Este tipo de raciocínio está baseado nos atributos críticos do conceito. Por exemplo, a Figura 4 "não é um quadrilátero porque não é fechada, portanto não é um polígono, e todo quadrilátero é um polígono." A frequência deste tipo de raciocínio, que também demonstra uma

compreensão da estrutura de inclusão de classes, é bastante baixa na 5a. série mas cresce dramaticamente da 5a. para a 7a. série. Ao mesmo tempo, a frequência do julgamento visual (Tipo 1) é baixa mas não desaparece completamente mesmo entre professores, e a frequência do julgamento prototípico (Tipo 2) diminui e desaparece por completo entre os professores.

Figura 4. Figura para tarefa de julgamento: Quadrilátero ou Não, Eis a Questão!

* O número de atributos relevantes na estrutura conjuntiva (*e*) do conceito possui um efeito significante sobre o desempenho nas tarefas (Hershkowitz, 1989).

* As crianças, pelo menos da 5a. série em diante, podem construir imagens conceituais corretas e bastante ricas através de estratégias analíticas. Por exemplo, quando a definição do conceito é dada verbalmente e solicitamos que os sujeitos a utilizem para identificar ou construir exemplos do conceito, ou quando o novo conceito é formado através de uma seqüência de exemplos positivos e negativos do conceito na qual a aprendizagem por tentativas e erros é modificada através de um feedback imediato, conduzindo à testagem das conjecturas e portanto, à descoberta dos atributos críticos (Hershkowitz et al., 1987; Wilson, 1986).

Existe alguma evidência de que a construção da Imagem Conceitual seja uma mistura de processos visuais e analíticos. Por exemplo, o comportamento dos sujeitos mudam de um conceito para outro: alunos e professores que demonstraram um comportamento analítico (Tipo 3) numa tarefa sobre quadriláteros, falharam ao identificarem triângulos retângulos não-prototípicos.

Existem outras características da construção dos conceitos básicos, tais como:

Uma ordem hierárquica na elaboração dos exemplos conceituais (partindo de exemplos protótipos e continuando aos demais através de processos visuais ou processos analíticos ou ambos) comuns a toda a população e processados com a experiência.

Existem diferentes tipos de padrões de conceitos errôneos dentro de uma mesma população: (a) *conceitos errôneos que persistem* - que possuem o mesmo padrão de incidência geral de uma série para a série seguinte, ou ainda, entre alunos, professores em formação e professores em exercício (por exemplo: a falha na identificação de triângulos retângulos não protótipos); (b) *conceitos* *errôneos que diminuem* - com a construção do conceito conforme poderíamos esperar (por exemplo, a redução da frequência do Julgamento Tipo 2); e (c) *conceitos errôneos que aumentam* - com a construção do conceito, que são desenvolvidos com o processo de aprendizagem (por exemplo: a imagem conceitual da altura de um triângulo como um segmento interno).

<u>*Implicações para o Ensino*</u>

As crianças se apropriam dos conceitos geométricos básicos ou de uma maneira estruturada através das experiências de aprendizagem escolares ou de maneira não estruturada através de sua vizinhança, pais, jogos, etc. As principais características das estratégias de ensino nestas situações são: (a) falta de completude, na qual apenas parte dos exemplos e atributos são apresentados; (b) falta de consciência, como também ausência do conhecimento da existência de elementos adicionais (Hershkowitz et al., 1987) por parte do professor ou até mesmo dos livros didáticos (ou material didático); (c) falta de consciência das dificuldades do aluno e dos conceitos errôneos na construção destes conceitos; e (d) generalização dos atributos do conceito (definições) realizada (se tanto) pelo professor ou pelo material pedagógico, com o aluno sendo visto meramente como um simples receptor passivo.

Como nós podemos melhorar o ensino dos conceitos geométricos básicos? Desejamos, é claro, que os alunos desenvolvam habilidades analíticas e que baseiem seus julgamentos nos atributos críticos (definições) e que se conscientizem da incompletude e das concepções errôneas do raciocínio geométrico decorrentes do próprio pensamento visual. As estratégias analíticas que foram mencionadas acima podem ser estimuladoras na construção do pensamento analítico e não devemos subestimar as habilidades analíticas dos alunos. Estas estratégias, em que os atributos críticos e os exemplos positivos e negativos (os erros dos alunos podem ser usados para gerar exemplos negativos relevantes) são utilizados em diferentes e ricas formas, são também muito úteis na educação de professores em serviço (Hershkowitz et al. 1987). Mas não devemos utilizar estas estratégias muito cedo, porque as crianças nos estágios iniciais criam as suas Imagens Conceituais basicamente visualmente.

Como a formação de uma Imagem Conceitual visualmente limitada pode ser prevenida neste estágio visual? As respostas à esta questão cobrem uma variedade completa entre dois pontos de vista opostos. Um extremo, como nos estudos russos (por exemplo: Zykova, 1969), tende a por a responsabilidade na limitada experiência visual que nós oferecemos ao alunos com os materiais e métodos utilizados e considera que o enriquecimento da experiência visual irá prevenir totalmente estas limitações visuais. O outro extremo coloca a responsabilidade nas limitações de nossa percepção: isto é, os indivíduos imporiam suas limitações visuais sobre suas imagens conceituais, independentemente da riqueza dos exemplos com que eles trabalhassem e, desta forma, nós sempre teríamos imagens conceituais limitadas. Nós sugerimos que a resposta possa estar entre estes dois extremos. Entretanto, nós teríamos ainda que fornecer um ambiente de aprendizagem tão rico quanto possível e bem melhor do que os ambientes proporcionados atualmente.

O exemplo seguinte mostra a contribuição que uma interação dinâmica com o computador pode ter na superação do efeito orientador sobre a imagem conceitual. Shelton (1985) usou um programa de computador em que crianças de 2 a 6 anos de idade formavam sequências aleatórias de exemplos de triângulos isósceles ou triângulos retângulos de diferentes formas e em diferentes orientações. Após o módulo de ensino, a maioria das crianças estava livre dos protótipos comuns de posição dos triângulos e generalizaram a sua imagem conceitual de triângulos incluindo todas as formas e orientações possíveis. Portanto, um ambiente de aprendizagem rico e dinâmico pode superar limitações perceptivas. Softwares geométricos como o Cabri Géomètrie (Baulac, Bellemain & Laborde, 1988), onde uma dada figura é continuamente redesenhada quando o aluno a movimenta ao redor de um de seus componentes tem um grande potencial para fornecer tais ambientes.

Outra questão interessante envolvendo aprendizagem e a interrelação entre o conceito e seus atributos foi levantada por Harris (1987). Ela ensinava crianças sobre figuras geométricas usando atributos da vida cotidiana. A ênfase, então, moveu-se dos atributos regulares para atributos mais "úteis" (por exemplo, o atributo mais útil dos retângulos na fabricação de caixas de papelão é que eles ladrilham o plano). Como esta progressão pode ser representada nos processos de formação de conceitos?

Logo e Conceitos Geométricos Básicos

Uma questão muito complexa é: Qual é o efeito da programação numa "linguagem geométrica" como o Logo sobre a formação de conceitos e vice-versa? Ao estudar esta questão, nós temos que considerar relações tais como procedimento<->figura, figura<->procedimento e subprocedimento<->subfigura (Hillel, 1986). As pesquisas têm indicado que o Logo pode ser usado como um meio de projetar ricos ambientes geométricos, onde as crianças possam atuar e então, com uma intervenção apropriada, vir a compreender uma variedade de idéias e processos envolvendo conceitos geométricos de uma maneira significativamente pessoal (Hoyles & Sutherland, 1989; Noss, 1987). As crianças precisam de oportunidades de se engajar em generalizações indutivas, torna-las explícitas numa codificação de programação e então aperfeiçoa-las. Entretanto, as pesquisas têm indicado que as crianças tem tido dificuldades com a interrelação figura<->procedimento; elas não necessariamente usam idéias geométricas quando trabalham com a Geometria da tartaruga (Hillel & Kieran, 1987; Leron, 1983a). Elas podem tornar-se confusas quanto ao giro da tartaruga e o ângulo sem uma intervenção pedagógica apropriada (Hoyles

& Sutherland, 1989; Rouchier, 1981), e freqüentemente usam mais pistas perceptivas do que analíticas (Kieran, Hillel & Erlwanger, 1986). Por exemplo, Hoyles e Noss (1987b) utilizaram um micromundo baseado no ambiente Logo sobre paralelogramos para investigar como os alunos chegavam a compreender "a essência do paralelogramo" através de modificações do formalismo de um dado programa. Eles identificaram diferenças entre as intuições iniciais dos alunos e suas definições formais e documentaram as maneiras como os alunos progressivamente se tornavam conscientes (e generalizavam) das interrelações embebidas dentro do procedimento paralelogramo usando o Logo. Eles também apontaram as interrelações complexas que existem entre o código simbólico (o procedimento) e a figura. Mesmo quando o comportamento do aluno demonstrava uma interrelação bem próxima, isto não se dava num nível consciente. Parece que a despeito do potencial assumido da programação numa linguagem geométrica no desenvolvimento de conceitos dinâmicos e generalizados, o aluno possui grandes dificuldades em modificar os elementos de programação e seus produtos visuais. Serão necessárias mais pesquisas antes que possamos estabelecer conclusões.

Conceitos de Alto Nível

Têm havido alguma pesquisa bastante intensiva sobre conceitos e relações geométricos de alto nível. Nós citaremos três exemplos.

1 - Simetria Axial

Grenier (1985, 1987) investigou as concepções dos alunos sobre simetria axial em escolas de ensino médio francesas. Ela identificou variáveis que afetam as imagens conceituais dos alunos (concepções) e seu desempenho em tarefas sobre simetria axial. Ela descobriu que a habilidade de construir a imagem de um ponto simples não capacita os alunos a construir a imagem de toda a figura. Os alunos utilizam diferentes procedimentos que fornecem respostas corretas apenas em casos especiais. As variáveis que afetam o desempenho nas tarefas são: a orientação do eixo de simetria, a posição relativa entre diferentes partes da figura e o eixo (fenômeno protótipo) e a idade das crianças.

2 - Medidas

Existe um ponto de vista comum sobre os estágios que a aprendizagem significativa da mensuração geométrica deve seguir:

A. Conservação da quantidade medida (comprimento, área, volume).
B. O significado da unidade de medida e da iteração de unidades (unidades arbi-trárias, unidades padronizadas, utilização correta dos instrumentos de medida); e
C. Desenvolvimento de fórmulas para cálculo da quantidade medida.

Figueras e Waldegg (1984) usaram o teste sobre medidas dos Conceitos de Matemática e Ciência Secundários para avaliar diagnosticamente os conceitos sobre medidas de alunos entre 11 e 13 anos. A intenção era utilizar esta avaliação como orientação para elaboração de atividades de mensuração. Eles descobriram que:

* A conservação da área é muito mais fácil do que a conservação de volume e até mesmo mais fácil que a conservação de comprimento.
* Mais da metade dos alunos usavam as unidades incorretamente.
* Os processos de mensuração (por exemplo: o uso de uma régua para medir comprimentos) como uma iteração de intervalos iguais era feita mecanicamente.
* A maioria das crianças encontrava as áreas e volumes contando as unidades a despeito de sua experiência anterior com fórmulas, mesmo quando a contagem era muito mais complicada (por exemplo: no caso de volumes onde as crianças tinham dificuldades na visualização das unidades que não estavam visíveis).
* O desempenho nas tarefas de mensuração caia drasticamente quando os números envolvidos eram frações.

Figueras e Waldegg desenvolveram e implementaram atividades de aprendizagem e descobriram que a maioria das dificuldades acima inibiam os processos de aprendizagem corretos. Eles argumentaram que "um sistema de medida fixo é introduzido muito cedo no currículo da escola elementar, criando, então, uma barreira para a compreensão completa do conceito de unidade" (pág. 99).

Maher e Beattys (1986) examinaram o desempenho em tarefas de resolução de problemas lidando com o conceito de área num estudo clínico de crianças entre 10 e 14 anos de idade. A meta das tarefas era orientar os estágios de conservação e de iteração da unidade (Estágios A e B, acima). Eles descobriram que os alunos "utilizaram a iteração da unidade quadrada como um esquema subjacente a descoberta da área de uma figura regular, mas não fizeram isto na medida de regiões irregulares" (pág. 168). A maioria das crianças não aplicava o conceito de área ao descrever o tamanho da região, e daquelas que o faziam, algumas expressavam suas respostas em unidades lineares.

Douady (1986) desenvolveu sequências de ensino para o ensino e aprendizagem do conceito de área e observou sua implementação em sala de aula. A conservação era expressa pela movimentação, corte em partes e reconstrução e pela utilização de uma malha quadriculada (duas superfícies sobre a malha que incluam a mesma quantidade de quadrados possuem a mesma área). Ela observou algumas estratégias semelhantes as acima (por exemplo: contagem de unidades e estratégias lineares). Nas entrevistas, ela observou e mesmo induziu conflitos de concepções. Estes conflitos resultaram em mudanças de estratégias.

Como podemos perceber, os estudos anteriores lidam principalmente com os Estágios A e B, descritos anteriormente. É senso comum que geralmente o ensino parte do meio do estágio B, com as unidades padrões de medida de figuras regulares e que isto pode ser a razão dos alunos parecerem não compreender o conceito de mensuração.

3 - Semelhança

O Projeto de Matemática para o Ensino Médio desenvolveu e implementou uma unidade sobre semelhança, acompanhado de uma pesquisa desenvolvida por Friedlander, Fitzgerald & Lappan, em 1984. O conceito de semelhança foi escolhido por que: (a) parece fornecer às crianças imagens mentais concretas sobre proporções e (b) é considerado uma das idéias mais básicas na compreensão da Geometria das medidas indiretas, do desenho em escala, dos modelos em escala e da natureza do crescimento. A unidade foi aplicada e seus efeitos foram investigados através de pré-testes, pós-testes e entrevistas antes e depois de cada etapa. "As entrevistas indicaram as estratégias individuais e os níveis cognitivos do pensamento sobre semelhança como resultantes do ensino. A descoberta mais impressionante foi a ausência de estratégias consistentes entre os indivíduos" (pág. 127). As categorias das estratégias que foram encontradas correspondem às classificações encontradas em outros estudos de raciocínios proporcionais e áreas; por exemplo, estratégias aditivas, estratégias baseadas na visualização e estratégias baseadas em contagens. A estratégia mudava dependendo dos números utilizados nas razões. Um micromundo informatizado sobre o mesmo tema foi recentemente elaborado por Hoyles, Sutherland e Evans (1989). As descobertas relatadas são similares às encontradas nos pré-testes de Friedlander et al., como descritas acima, mas nos pós-testes haviam evidências de uma apreciação da necessidade de estratégias consistentes; isto é, um reconhecimento de que estratégias idênticas são apropriadas dentro de uma determinada classe de problemas e ainda que a estratégia apropriada neste caso é a multiplicação. Esta diferença nos resultados das pesquisas pode ser interpretada como o resultado do feedback visual imediato frente às estratégias incorretas.

Níveis Superiores do Pensamento Geométrico - Conjecturas e Provas

Como em outras áreas da Matemática, os níveis superiores do pensamento geométrico se relacionam ao processo indutivo da elaboração de generalizações; isto é, a elaboração de conjecturas em todos os aspectos de justificativa (prova) das generalizações.

Na abordagem tradicional do ensino da Geometria, o processo de descoberta indutiva, formulado como conjecturas, está praticamente negligenciado. Esta negligência era um resultado do ensino clássico da Geometria Euclidiana como o exemplo típico (protótipo) de um sistema dedutivo - o que tem tido uma série de críticas (Balacheff, 1987b; Freudenthal, 1971; Schoenfeld, 1986). Nas palavras de Freudenthal, "A estrutura dedutiva da Geometria tradicional nunca chegou a ter um desempenho pedagógico convincente... Ela falhou porque sua dedutividade não pode ser reinventada pelo aprendiz, mas apenas imposta" (pág. 417-418).

Há uma concordância de que a falha dos alunos na reinvenção das provas (quarto nível de van Hiele) ou até mesmo em esquemas mais amplos de um sistema dedutivo possui duas causas principais: (a) o sistema lógico, da maneira em que geralmente é ensinado, "fornece apenas o resultado final da descoberta matemática e falha completamente em fornecer ao aprendiz uma visão dos processos em que as descobertas matemáticas são produzidas" (Skemp, 1971, pág. 13); e (b) o aprendiz não possui a maturidade lógica para experimentar ou se conscientizar da necessidade das provas (Balacheff, 1987b). Atualmente, é senso comum de que as descobertas empíricas e indutivas na Geometria são necessárias por que (a) elas introduzem um aspecto de descoberta; (b) pela percepção da generalização como uma conjectura em si mesma, o aprendiz sente a necessidade de provar aquilo que ele ou ela tenha conjecturado como verdadeiro; e (c) experiências indutivas são a base intuitiva sobre a qual a compreensão e a geração de uma prova dedutiva podem ser construídas. Schoenfeld (1986) expressou este ponto de uma maneira mais simétrica, afirmando que "a fundamentação sobre a qual o desempenho geométrico está baseado inclui tanto competências indutivas quanto dedutivas" (pág. 226). As pesquisas cognitivas estão tentando investigar a validade das crenças expressas anteriormente e levantam questões tais como:

1. "Como os alunos fazem a transição do específico para o geral em Geometria?" (Yerushalmy, Chazan, Gordon & Houde, 1986)
2. "Como os alunos formalizam suas hipóteses e generalizações?" (Yerushalmy et al., 1986)
3. Os alunos sentem a necessidade de justificar as conjecturas que eles tenham estabelecido?
4. Quais são os processos e dificuldades que os alunos têm nas provas?
5. "Quais são os sentimentos dos alunos quanto ao papel da prova e quanto a sua validade?" (Fischbein & Kedem, 1982)
6. "Quais são os contextos em que uma prova matemática pode parecer como sendo um instrumento eficiente e relevante na resolução de problemas que as crianças tenham reconhecido desta forma?" (Balacheff, 1987b)

Processos Conjecturais e Processos Dedutivos

O microcomputador estabelece uma nova dimensão às pesquisas e ao ensino da habilidade de fazer conjecturas e de seu valor pedagógico. Softwares como o Cabri Géomètric (Baulac et al., 1988) e o Geometric Supposer (Schwartz, Yerushalmy & Educational Development Center, 1985) criaram um poderoso ambiente de aprendizagem para descobertas indutivas em Geometria, que podem ser formuladas fazendo conjecturas. Por exemplo, o Geometric Supposer permite que os usuários desenhem elementos geométricos, façam medidas nestas construções e mais importante, repitam estas construções sobre figuras aleatórias ou sobre figuras construídas pelos próprios usuários. Neste ambiente de aprendizagem, os alunos se engajam "em atividades significantes de construção da Matemática e geração de hipóteses" (Yerushalmy et al., 1986, pág. 184). Yerushalmy e seus colegas investigaram as três primeira questões anteriores. Eles afirmaram que usar este ambiente "requer um considerável planejamento do professor e esforço durante todo processo tanto do professor quanto dos alunos pois exige que eles assumam uma boa parte da responsabilidade de sua aprendizagem" (pág. 187). Eles descobriram que usando o Supposer: (a) alunos do secundário (com baixo nível de habilidades) eram capazes de pensar sobre uma figura (uma construção) em termos dinâmicos e de vê-la como um representante de toda uma classe, (b) não era fácil para os alunos, fazer conjecturas ("encontrar padrões em seus dados e expressar estes padrões em termos gerais," pág. 188), e (c) os alunos sentiam a necessidade de justificar suas generalizações.

O estudo de Balacheff (1987b) é um exemplo de pesquisa e de ensino que toma a visão unificada de que a conjectura e a prova são estágios necessários dos processos pessoais e tenta definir contextos em que estes processos possam parecer relevantes à resolução de problemas (questão 6, anterior). Ele construiu uma situação de aprendizagem elaborada como "um processo didático em que alunos - de cerca de 12 anos de idade - irão descobrir, então formular como uma conjectura e finalmente provar que a soma das medidas dos três ângulos de um triângulo é 180^{0} (Balacheff, 1987b, pág. 8). No início, os alunos mediram os ângulos de muitos triângulos e compararam seus resultados. Então, cada aluno tinha que predizer a soma dos mesmos triângulos e comentar sobre as possíveis discrepâncias entre as predições e os resultados das medidas. A etapa seguinte era o nascimento de uma conjectura e o último estágio - a construção de uma prova como resultado de um esforço comum dos alunos e do professor.

Em outro estudo, Balacheff (1985) investigou o comportamento conjectural dos alunos quando suas hipóteses eram confrontadas com contra-exemplos. A expectativa era de que quando um aluno descobrisse um fato que contradissesse a hipótese, ele ou ela iriam abandonar a hipótese e procurar outra. Balacheff apresentou o seguinte problema a alunos entre 13 e 14 anos de idade: "Descubra uma maneira de calcular o número de diagonais de um polígono, uma vez que conheçamos a quantidade de vértices que possui" (pág. 224). Os alunos trabalharam em duplas e foram observados. O observador intervinha de tempos em tempos, especialmente de modo a apresentar contra-exemplos às conjecturas incorretas. A análise dos protocolos demonstrou que, contrariamente a expectativa acima, superar uma contradição é um processo complexo. O comportamento dos alunos era de certa forma semelhante aos descritos por Lakatos (1976). As modificações feitas nas conjecturas durante o processo de resolução estavam relacionadas bem de perto com as mudanças de significado dos conceitos envolvidos na questão.

Outro aspecto da relação entre hipótese e prova foi examinado por Schoenfeld (1982). Ele acreditava que as provas, assumindo que uma aprendizagem significativa dos tópicos tenha ocorrido, seriam usadas pelos alunos de modo a examinar a validade de suas hipóteses matemáticas. Infelizmente, isto não ocorre. Schoenfeld observou alunos de faculdade que participavam de seu curso sobre resolução de problemas. Todos eles tinham estudado Geometria na escola secundária e eram competentes em escrever provas geométricas elementares. Schoenfeld lhes apresentou um problema de construção geométrica no qual eles trabalharam em duplas enquanto seu trabalho era filmado. A análise das fitas de vídeo mostrou que os alunos geraram hipóteses através de meios puramente empíricos e intuitivos. Além disso, sua verificação também era puramente empírica; isto é, a utilização da régua e compasso foi orientada mais pelo olho e pela mão do que por análises sistemáticas. As conclusões de Schoenfeld foram de que "os alunos acreditam que a prova é apenas um jogo acadêmico, de sala de aula, uma atividade de pouco ou nenhum valor fora do ambiente artificial de sala de aula" (pág. 173). Como resultado disto, os alunos não se engajarão em provas que estejam em contextos ligeiramente diferentes do contexto comum de provas em sala de aula. A razão disto pode ser ou que os alunos não aceitam a prova como uma forma válida de argumentação ou que eles a rejeitam de todo. Schoenfeld colocou a responsabilidade no currículo. Pode ser que a construção de situações de ensino-aprendizagem, como sugerido por Balacheff (1987b), seja uma possível maneira de melhorar esta situação.

Kramer, Hadas e Hershkowitz (1986) desenvolveram um micromundo por meio do qual os alunos poderiam executar construções de régua e compasso clássicas dedutivamente. O micromundo consiste de objetos (pontos, retas, segmentos, etc), operações sobre estes objetos (as construções básicas) e leis que governam a aplicação destas operações (as leis geométricas dedutivas). O micromundo sendo ainda, auto-corretor e auto-regulador. Alguns alunos do segundo ano secundário que trabalharam com o software foram observados. As observações indicaram que as correções ocorriam nos três níveis em que os autores estiveram atentos: o nível analítico, o nível sintático e o nível de aplicação das regras das construções geométricas. É importante mencionar que é impossível fazer uma construção com este software sem primeiro fazer uma análise cuidadosa e se a análise estiver incorreta, o aluno não terá nenhum produto ou nenhum produto incorreto. E também, o fato de que a legalidade de todo movimento ser observada pelo software ajuda a esclarecer as regras do jogo, algo que não está totalmente claro para muitos alunos que fazem construções geométricas, como Schoenfeld apontou.

Provas e Processos de Prova

Na Geometria Euclidiana, uma prova significa um argumento dedutivo formal. Nas pesquisas cognitivas nós estamos interessados nos vários tipos de provas (justificativas) dos alunos. Balacheff (1982) fez uma distinção entre prova - qualquer meio pelo qual nos convencemos de que uma certa afirmativa seja verdadeira - da prova matemática (demonstração). A última é uma prova como aceita pelos matemáticos. Usando esta terminologia, Braconne e Dionne (1987) investigaram a compreensão de alunos e de professores sobre prova e sobre demonstração. Além disso, eles examinaram se havia uma correlação entre a compreensão dos alunos sobre a demonstração e sua elaboração matemática ou os seus níveis de van Hiele. Como Balacheff, Braconne e Dionne distinguiram vários modos de prova em Geometria, partindo de uma prova fraca ("você pode afirmar pela figura - o primeiro nível de van Hiele) e terminando com uma demonstração. Eles construíram um questionário consistindo de 12 soluções diferentes de um problema geométrico simples retirado de um livro didático francês. Cada solução pertencia a um dos cinco modos de prova sugeridos pelos autores. Ambos os alunos (de 15 anos) e seus professores deveriam reagir e avaliar as 12 soluções do questionário. Foi descoberto que, para os professores, prova e demonstração não eram considerados sinônimos. Por outro lado, a diferença entre os termos não parecia muito clara para os alunos.

Talvez a questão mais natural sobre a concepção de uma prova matemática e seu status seja a seguinte: "Um indivíduo envolvido com uma prova matemática compreende claramente que uma prova formal de uma afirmativa matemática lhe confere o atributo de uma validade a priori, universal e portanto, exclui a necessidade de qualquer verificação posterior?" (Fischbein & Kedem, 1982, pág. 128). Tentando responder esta questão, Fischbein e Kedem elaboraram dois questionários, um algébrico e outro geométrico. O questionário geométrico inclui a seguinte sentença: "ABCD é um quadrilátero e P, Q, R e S são os pontos médios de seus lados. Prove que PQRS é um paralelogramo." Em seguida, havia uma prova formal da sentença. E os alunos foram indagados se eles aceitavam sua validade geral. Ao final de tudo, a seguinte questão foi proposta:

"V é um indivíduo bastante duvidoso. Ele acredita que nós devamos verificar pelo menos uma centena de quadriláteros para estarmos convictos e seguros de que PQRS seja um paralelogramo. Qual é a sua opinião? Explique sua resposta!" As respostas das três séries do secundário foram analisadas e foram encontradas três categorias principais:

1. Consistentemente formal. Os alunos nesta categoria compreendiam corretamente a natureza da prova matemática.
2. Consistentemente empírico. Os alunos nesta categoria tinham uma abordagem empírica das provas matemáticas. Eles acreditam que verificações adicionais dos casos particulares acrescentariam maior validade a sentença que foi provada. A prova em si mesma não garante a validade absoluta da sentença.
3. Basicamente inconsistente. Os alunos nesta categoria demonstram comportamento inconsistente, aceitando a validade absoluta da prova, de um lado, mas não rejeitando a necessidade de verificações adicionais, por outro.

Os dados revelaram que menos de 10% dos alunos eram consistentemente formais e que cerca de 1/3 dos alunos eram basicamente inconsistentes. Metade dos alunos não poderiam ser classificados de acordo com estes critérios.

O Status Ontológico das Entidades Geométricas

O status ontológico das entidades geométricas é quase um problema filosófico, mas chega até o currículo da Geometria. A questão é se as entidades geométricas são parte do mundo físico real e se não são, o que elas são? Existem várias respostas filosóficas a esta questão. As mais comuns são (a) a abordagem formalista (a Matemática deriva de axiomas e não assume-se nenhuma realidade matemática); (b) a abordagem realista (os objetos matemáticos são objetos abstratos que existem no mundo abstrato); e (c) a abordagem construtivista (os objetos matemáticos são construtos psicológicos formados na mente humana). Vinner (1981) examinou esta as visões dos professores em formação e em exercício por meio de um questionário. As respostas caiam em três categorias:

1. Os objetos geométricos são parte do mundo físico (34%).
2. A Geometria lida com as conclusões que podem ser deduzidas de certas hipóteses. Portanto, os objetos geométricos não existem realmente - a abordagem formalista (15%).
3. Os objetos geométricos existem no mundo abstrato. Eles são objetos abstratos - a abordagem realista (47%).

Os professores na primeira categoria podem ter dificuldades com certos conceitos; por exemplo: a densidade ou infinitude de uma reta.

Concluindo as Discussões

Não é fácil escrever uma conclusão sobre este artigo devido a variada natureza das áreas e tópicos das pesquisas. Desta forma, inserimos conclusões sobre as discussões nas diferentes seções do artigo. Nestas, nós apontamos futuras implicações para pesquisas e para o ensino. Entretanto, existem alguns pontos gerais e algumas áreas gerais que necessitarão de pesquisas ou esforços instrucionais no futuro.

* A aprendizagem da Geometria começa quando a criança começa a "ver" e a "conhecer" o mundo ao seu redor e isto pode prosseguir até pensamentos geométricos de alto nível através de processos indutivos ou dentro de sistemas dedutivos. As características e metas das pesquisas e de suas implicações pedagógicas mudam de acordo com o nível de pensamento geométrico. Portanto, é surpreendente que a maior parte das pesquisas que têm sido realizadas nas últimas décadas tenham se concentrado entre a 4a. série primária e o 2o. ano secundário (crianças entre 9 e 15 anos). Existem estudos envolvendo

professores em exercício e em formação, mas quase nenhuma pesquisa envolvendo a pré-escola (excluindo-se exemplos como o Projeto Agam). Parece que embora os pesquisadores tentem compreender os processos que se iniciam muito cedo, eles procuram os traços destes processos em estágios mais avançados. Se considerarmos que a metodologia de pesquisa está encaminhando-se na direção da observação e da documentação detalhada dos microestágios no comportamento do aprendiz e que a tecnologia moderna estimula e refina este encaminhamento, pareceria muito natural começar as observações tão cedo quanto possível. Ainda existe uma necessidade de investir esforços nas pesquisas sobre a evolução dos conceitos geométricos, do pensamento geométrico e sobre o desenvolvimento das habilidades visuais.

* Em relação à Geometria e ao computador, nós vimos anteriormente que a maioria dos softwares que servem às pesquisas e ao ensino da Geometria envolvem altos níveis de interação com o computador. O ambiente informatizado permite a manipulação de objetos específicos sobre a tela de maneira que oriente os alunos a vê-los como representantes de uma classe de objetos ou uma classe de construções com propriedades invariantes. Como exemplo temos o Cabri Géomètrie, no qual a figura geométrica tem um status semelhante ao status de uma variável, sofrendo modificações, mas mantendo suas propriedades relevantes. Com esta base, os alunos são mais capazes de generalizar e de refletir sobre propriedades geométricas. Além disso, um micromundo informatizado pode ser construído naturalmente com objetos visuais sobre os quais as operações possam ser executadas de acordo com determinadas regras. Se estratégias inadequadas forem utilizadas, o feedback visual imediato pode conduzir a um conflito cognitivo e então, provocar que o aluno repense o processo de solução e a análise geométrica da solução. Nós temos visto como diferentes softwares estimulam novos horizontes de pesquisas e de ensino. Entretanto, nos parece que ainda é necessário realizar muitas pesquisas e aplicações dos softwares existentes, incluindo programas comerciais (veja por exemplo, o trabalho de Osta, 1987). Além disso, nós ainda precisamos de softwares adequados ao desenvolvimento de processos e estratégias de provas.

* A visualização e os processos visuais desempenham um papel muito complexo nos processos geométricos. Nós discutimos parte desta complexidade no contexto da formação de conceitos básicos. Há evidências de que esta complexidade continua em níveis mais elevados do pensamento geométrico; por exemplo, Hoz (1979) mostrou que a rigidez perceptiva, na qual os aspectos perceptivos de problemas atuam como perturbadores, afeta a habilidade de provar teoremas. Existem pistas (Yerushalmy & Chazan, in press) de que uma interação dinâmica com um micromundo geométrico como o

Supposer contribua para uma flexibilidade visual. É necessário mais trabalhos para compreendermos melhor as contribuições positivas e negativas dos processos visuais.

* Existe um consenso de que a linguagem é um dos principais aspectos que caracterizam o nível do comportamento geométrico (Bishop, 1978; van Hiele & van Hiele-Geldof, 1958). Infelizmente, existem poucos estudos que abordem este ponto. Novamente, nós acreditamos que é necessário devotar mais esforços de pesquisa aqui.

* A inconsistência individual envolvendo as tarefas geométricas encontradas em alguns projetos de pesquisa geralmente são um subproduto do objetivo principal da pesquisa. Parece válido focalizar este aspecto do comportamento geométrico individual em futuras pesquisas. Além disso, há evidências de que, por um lado, algumas competências geométricas, tais como habilidade visual, tenham "uma natureza altamente individual e pessoal" (Bishop, 1989, pág. 14). Por outro lado, os perturbadores visuais atuam de modo muito semelhante em diferentes indivíduos e populações. Esta questão da natureza das habilidades visuais merece mais pesquisas.

* A interrelação entre os conceitos geométricos e os números é outro subproduto das pesquisas geométricas. O efeito do tipo de número (números elevados, fracionários, etc) sobre o desempenho das tarefas geométricas (por exemplo: semelhança, mensuração) merece mais investigações.

* As situações problema em que a Geometria e a Álgebra estão combinadas são muito comuns nas unidades de ensino (por exemplo: Geometria analítica). Entretanto, nós dificilmente encontramos alguma pesquisa lidando com tais situações problema.

* Por último, mas não a última, está o feedback recíproco entre o ensino e a pesquisa. A direção do mundo real da sala de aula para a pesquisa parece estar muito ativo. Em geral, os pesquisadores tomam os conteúdos instrucionais comuns e tarefas como pontos de partida para suas pesquisas. Mas, apesar do fato de que as pesquisas psicológicas sobre a Geometria estarem orientadas para o ensino, com muitos trabalhos de pesquisa baseados ou resultando em sequências instrucionais, parece que o efeito real das pesquisas sobre a Geometria no currículo, nas estratégias de ensino e na formação dos professores ainda é esporádica e necessita de um esforço mais intensivo e compreensivo.

FUNDAMENTOS E CONCEPÇÃO DO PROJETO AGAM

O trabalho apresentado neste relatório está baseado numa colaboração incomum entre um artista visual e uma instituição devotada à pesquisa científica e à educação. Esta colaboração está centrada num programa e num projeto.

A. O Programa Agam

Durante várias décadas, por sua própria conta e vontade, Yaacov Agam tem estado preocupado com a falta de alfabetização visual da população em geral (Agam, 1984). Como uma expressão de sua preocupação e com a assistência de uma equipe de educadores e psicólogos, Agam criou um currículo em língua francesa para desenvolver a alfabetização visual entre crianças da pré-escola (crianças de 3 a 6 anos de idade).

Existem várias hipóteses subjacentes neste programa. Primeiro, que existe de fato uma linguagem visual, composta de elementos básicos e de suas interrelações. Além disso, como a linguagem verbal, a linguagem visual está baseada num sistema simbólico e ela pode ser aplicada criativamente ao pensamento e na resolução de problemas em muitas áreas. Por esta razão, o ensino da linguagem visual deveria ser encarado como "um ensino básico [e fundamental]" e deveria começar bem cedo, dentro do sistema formal de ensino escolar.

O próprio programa é sistemático, progredindo numa progressão lógica de um conceito para o seguinte, enquanto incorpora habilidades específicas com cada conceito. Pedagogicamente, o programa enfatiza uma abordagem de atividades orientadas, com muitos materiais manipulativos, representações múltiplas do mesmo conceito, e trabalho em pequenos grupos.

Uma pequena parte do programa foi implementado por um curto período de tempo, primeiro na França e mais tarde na Venezuela. Embora o programa contasse com o entusiasmo dos alunos e professores da pré-escola, sua implementação nestes países não foi sustentada.

B. O Projeto Agam

Na primavera de 1983, o Sr. Agam visitou o Weizmann Institute of Science, uma instituição devotada a pesquisa básica em Matemática e Ciências naturais. Ele apresentou o programa ao staff diretor do Departamento de Ensino de Ciências do Instituto, especializado no desenvolvimento, implementação, pesquisa e avaliação do currículo de ciências dentro do sistema escolar de Israel. O Departamento se concentra na pesquisa curricular e desenvolvimento de áreas de Física, Matemática, Química e Geologia para alunos da escola primária e secundária. O Programa Agam lida com uma área temática diferente e com crianças mais jovens. Apesar destas diferenças, devido ao interesse do staff na fundamentação e estrutura do programa, o Projeto Agam foi iniciado.

Os objetivos do Projeto Agam são de (1) adaptar o currículo do Programa Agam para as pré-escolas de Israel; (2) implementar o programa em pré-escolas em Israel; (3) avaliar a implementação do programa e (4) conduzir pesquisas educacionais e cognitivas relevantes, e (5) desenvolver possíveis extensões ao programa.

O primeiro ciclo de desenvolvimento e pesquisa foi conduzido durante 1983-1985. Este ciclo concentrou-se em 4 pares de turmas de pré-escola; cada turma pré-escolar experimental foi emparelhada com uma turma similar de comparação. Com base nos resultados muito promissores (Eylon et al., 1986), um segundo ciclo de desenvolvimento e pesquisas foi conduzido durante 1985-1987, desta vez com 25 pares de turmas da pré-escola. Este relatório resume este segundo ciclo de trabalho.

Desde seu início, os objetivos do Projeto Agam incluiam o desenvolvimento, a implementação e a avaliação de um programa educacional específico para crianças da pré-escola: o Programa Agam. Ao mesmo tempo, o staff do Projeto Agam foi tomado pelo interesse especial de desenvolver uma compreensão sobre as "questões mais amplas" envolvidas no programa. Em outras palavras, como as áreas de cognição visual e de treinamento visual estavam relativamente subdesenvolvidas, um objetivo importante do Projeto Agam tem sido explorar os fundamentos teóricos e pedagógicos destas áreas.

Então, o Projeto Agam pode ser caracterizado como um esforço de reunir ao mesmo tempo teoria, pesquisa e prática no desenvolvimento da cognição visual. Esta interface entre o desenvolvimento curricular e a pesquisa educacional pode ser caracterizada como "pesquisa em contexto" (veja Eylon e Linn, 1989).

O staff do Projeto Agam inclui educadores matemáticos e de Ciências, psicólogos cognitivos e educadores pré-escolares, como também funcionários técnicos e administrativos.

C. Visão Geral do Relatório

O relatório relativo ao trabalho desenvolvido durante o ciclo de desenvolvimento e pesquisa no período de 1985-1987 está dividido em três partes.

Na parte 1, nós começamos com uma revisão sobre a significância da cognição visual, apresentando uma breve história sobre as pesquisas de inteligência humana, a natureza da cognição visual e o treinamento da cognição visual. Nos capítulos 2 e 3, nós descrevemos o Programa Agam em vários níveis diferentes e discutimos sua implementação nas pré-escolas de Israel; incluindo aqui um tratamento sobre a essência do programa de treinamento de professores.

Na parte 2, nós descrevemos nossa metodologia de pesquisa, que integra um trabalho tanto qualitativo quanto quantitativo. Do capítulo 5 ao 9, apresentamos nossas descobertas da pesquisa em termos de habilidades e conceitos visuais básicos, efeitos de transferência cognitiva, percepção das crianças, percepção dos professores e efeitos sobre crianças especiais.

Na parte 3, nós discutiremos estes resultados dentro do contexto de pesquisa e prática educacional. Baseado nestes resultados, nós concluímos o relatório com recomendações específicas para o futuro.

Neste artigo, devido a limitações de tempo e espaço, apresentaremos apenas a primeira parte do relatório que diz respeito a fundamentação teórica do Programa e Projeto Agam. Os interessados na leitura integral do relatório devem solicitá-lo a Secretaria da Pós-Graduação em Educação Matemática - USU.

"A Filosofia está escrita neste grande livro - ou seja, o Universo - que permanece continuamente aberto a nossa contemplação, mas ele não pode ser compreendido a menos que primeiro compreendamos a linguagem e aprendamos a interpretar os caracteres em que ele está escrito. Ele está escrito na linguagem da Matemática, e seus caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem os quais é humanamente impossível compreender uma única palavra deste livro; sem isto, nós estaríamos perambulando perdidos num labirinto escuro."

(Galileu Galilei, Il Saggiatore, 1623).

"Meu método de linguagem visual .... (tem) o objetivo de introduzir no sistema escolar uma educação visual, paralela e integrada com a educação verbal. Desta forma, nós seremos capazes de equilibrar e de desenvolver tanto as nossas capacidades verbais quanto visuais."

(Yaacov Agam, 1981).

Parte I

I. A Significância da Cognição Visual

Quando eu era um menino crescendo na longínqua Rockaway, eu tinha um amigo chamado Bernie Walker. Nós dois tínhamos "laboratórios de ciências" em casa, e iríamos fazer vários "experimentos". Um dia, estávamos discutindo sobre alguma coisa - devíamos estar com onze ou doze anos na época - e eu disse, "O pensamento não passa de uma conversa interior consigo mesmo".
"Ah, é mesmo?!", disse Bernie. "Você conhece a forma maluca do cambota [eixo da manivela] de um carro?"
"Sim, o que tem ela?"
"Bom. Então me diga: como você a descreve quando você está conversando consigo mesmo?"
Foi então que Bernie me mostrou que os pensamentos podem ser tanto visuais quanto verbais.

Richard P. Feynman (1988)
Físico Ganhador do Prêmio Nobel

Antes de descrever o Programa Agam em detalhes, seria útil contextualizar este currículo dentro da perspectiva das discussões sobre cognição visual.

Esta discussão começará com uma exposição sobre a inteligência humana e com uma asserção bem documentada de que a cognição visual desempenha um importante papel na inteligência humana. Em seguida, a cognição visual será explorada brevemente em termos de seus dois aspectos complementares: reconhecimento visual e representação visual. Com este referencial, será possível explorar a significância da cognição visual em campos específicos e gerais. A discussão se encerra com um resumo dos principais pontos e com duas conclusões centrais.

A. Cognição Visual e Inteligência Humana

Através de nossos sentidos, nós recebemos diferentes tipos de informação, isto é, verbal, visual, acústica e cinestética. Os pesquisadores no campo da inteligência humana tentam compreender a interação entre estas informações e as operações mentais de um indivíduo.

Um dos primeiros pesquisadores da inteligência humana que reconheceu a importância da inteligência espacial (como também sua indepêndencia das inteligências verbal e lógica) foi o pioneiro psicometricista L. L. Thurstone. Outros pesquisadores, tais como Truman Kelley e A. A. H. Koossy, deram continuidade ao seu trabalho pioneiro.

Recentemente, a importância da cognição visual para a inteligência humana tem sido reiluminada. Como Pinker (1984) afirma:'

> *"Esta cognição visual, não menos do que a linguagem ou a lógica, pode ser um talento fundamental para a compreensão da inteligência humana."*

Pinker se baseia no trabalho de pesquisadores como: Shepard e Cooper (1982), Jackendoff (1983) e Johnson-Laird (1983).

Para apreciarmos a interrelação entre a cognição visual e a inteligência humana, um passo inicial e óbvio seria questionar: em que constitui a inteligência humana? Vários pesquisadores têm tentado responder a esta questão e têm chegado a diferentes conclusões.

1. Uma Breve História das Pesquisas sobre Inteligência

Existe um amplo espectro das diferentes abordagens sobre o estudo da inteligência. Nos extremos estão duas idéias:

(1) a inteligência é um conceito unitário, único;

(2) as inteligências são múltiplas.

No início do século, os testes de Alfred Binet (Binet, 1911) foram elaborados como instrumentos empíricos para identificar as crianças parcialmente retardadas e com dificuldades de aprendizagem que necessitariam de um auxílio e tratamento especial. Apenas bem mais tarde, os teóricos americanos da inteligência humana - tais como H. H. Goddard, L. M. Terman, E. L. Thorndike e R. M. Yerkes - promoveram uma nova visão de que os resultados dos testes de Q.I. serviriam para medir uma entidade unitária e inata - a inteligência (Gould, 1981). Isto tornou-se a base das abordagens "psicométricas." [E com isto a psicologia também ganharia um status quantitativo e mais científico - fato que atraiu muitos teóricos, profissionais e estudantes da área, é claro!]

Pouco tempo depois, um biólogo, Jean Piaget, analisou as respostas de crianças a estes testes e observou que existia uma correlação entre a idade das crianças e seus erros característicos. Esta descoberta motivou Piaget a desenvolver uma teoria única e poderosa sobre a cognição humana.

A teoria de Piaget está baseada na noção de que os indivíduos desenvolvem suas potencialidades mentais em estágios; estes estágios dependem da idade do indivíduo e do desenvolvimento de operações lógico-matemáticas específicas. Piaget criou um modelo de inteligência humana que está relacionado às categorias básicas de tempo, espaço e causalidade. A fundamentação filosófica desta abordagem está baseada em Kant, que argumentou que o pensamento racional baseia-se sobre operações lógicas.

Outra abordagem do estudo da inteligência humana é a psicologia de processamento de informação. Os adeptos desta abordagem concentram seus estudos sobre como as pessoas resolvem problemas específicos, em termos de entrada [percepção; identificação], processamento [análise] e saída [conclusões; ações] de informações. Em outras palavras, eles tentam analisar e compreender cada um dos vários passos executados por um solucionador de problemas, desde o momento em que as informações contextuais são recebidas até o momento em que a solução é estabelecida.

De acordo com Gardner (1983), estas três abordagens - o teste psicométrico do Q.I., a teoria de Piaget sobre o desenvolvimento cognitivo e a psicologia do processamento de informação - concentram-se apenas sobre aspectos particulares da inteligência humana enquanto ignoram outros. Gardner propõe que existem muitos tipos diferentes de inteligência, cada uma baseada sobre um "sistema simbólico" único e cada uma diferente das restantes.

De acordo com seu ponto de vista, as outras teorias não são sensíveis o suficiente para levar em consideração a ampla variedade e variabilidade da inteligência dentro das culturas humanas. Estas teorias não se referem a biologia do cérebro nem explicam o fenômeno da criatividade humana. Gardner argumenta que a habilidade de usar diferentes sistemas simbólicos como instrumentos para expressão e comunicação é unicamente humana e não é partilhada pelo restante do reino animal. Baseado nisto, Gardner propõe uma teoria de inteligências múltiplas, cada qual fundamentada sobre um sistema simbólico diferente.

Gardner propõe sete tipos diferentes de inteligência humana: verbal, lógico-matemática, visual-espacial, musical, cinestética, interpessoal e intrapessoal. Cada sistema simbólico correspondente serve como uma "linguagem" distinta para o tipo de inteligência correspondente. Além disso, o desenvolvimento de uma inteligência particular depende do desenvolvimento do sistema simbólico correspondente.

É útil manter em mente várias observações, em conexão com esta teoria de inteligências múltiplas. Primeiro, cada tipo de inteligência contém uma variedade de aspectos diferentes. Por exemplo, analisando a inteligência verbal, uma pessoa pode ser excelente na escrita em prosa, mas não na expressão oral. Segundo, as diferentes inteligências são distintas e não dependem uma da outra. Esta asserção é fundamentada pela observação comum: geralmente é fácil para uma pessoa desenhar enquanto ouve música (isto é, utilizando dois tipos diferentes de inteligência simultaneamente), mas é praticamente impossível que uma pessoa simultaneamente escute uma música enquanto tente cantar outra. Terceiro, é importante reconhecer que cada indivíduo possui um "perfil" de inteligências único, com algumas pessoas destacando-se em mais de um tipo de inteligência.

Esta breve discussão sobre as pesquisas em inteligência humana estaria incompleta sem a menção do papel essencial do estímulo ambiental. As pesquisas indicam claramente que sem um estímulo adequado, isto é, sem a interação vital entre o organismo e o ambiente, o desenvolvimento da inteligência estará frustado. É especialmente importante que este estímulo ambiental ocorra desde os primeiros anos de vida da criança.

2. Cognição Visual: O Que É Isto?

Como mencionado anteriormente, alguns dos primeiros pesquisadores no estudo da inteligência humana identificaram a habilidade espacial como distinta das habilidades verbais e lógicas. Muitos psicométricos, usando instrumentos estatísticos baseados sobre a análise de fatores, tentaram "provocar/induzir" os componentes da habilidade espacial encontrados nos testes de inteligência. Seus numerosos esforços - durante mais de 50 anos - geraram uma variedade de termos e conceitos concorrentes (Guttman et al., 1990).

De acordo com Gardner (1982), a inteligência espacial inclui as seguintes capacidades:

(1) perceber e reconhecer instâncias do mesmo elemento;
(2) transformar e manipular estas percepções;
(3) formar imagens mentais e transformá-las, e
(4) produzir uma imagem gráfica da informação espacial.

Embora estas capacidades possam ser independentes entre si, Gardner sugere que elas operam como uma "família" e que a utilização de cada operação pode muito bem reforçar a utilização das outras. É interessante notar que as habilidades de criar e de transformar as imagens mentais não são dependentes dos estímulos visuais físicos; indivíduos cegos desde o nascimento também possuem estas habilidades (Por esta razão, Gardner fala de "inteligência espacial" em vez de "inteligência visual", embora o termo utilizado na presente discussão seja "cognição visual").

A definição de Pinker da cognição visual, que inclui a concepção de Gardner da inteligência espacial, é que ela consiste de dois componentes complementares:

(1) Reconhecimento Visual, que focaliza a representação da informação visual do indivíduo, e

(2) Representação Visual, que focaliza em como os processos de memória e de raciocínio atuam sobre os objetos visuais e as representações visuais na produção de imagens mentais.

Existe uma variedade de teorias que tentam explicar como as pessoas processam a informação visual, tanto em termos de reconhecimento visual quanto representação visual. Apresentaremos a seguir, um sumário destas teorias (para um tratamento mais detalhado, sugerimos a leitura do Apêndice 1 do relatório).

2.1. Reconhecimento Visual

Como um indivíduo absorve a informação visual? Embebida nesta questão está um mistério não resolvido: qual é a diferença, caso exista, entre percepção visual e cognição visual?

De acordo com uma escola de pensamento, a percepção precede e não inclui cognição. Por exemplo, na teoria de Marr e Nishihara (1978, 1982) existem processos visuais primários que estabelecem a base para o reconhecimento visual e a representação visual.

Por outro lado, uma visão contrária é apresentada por Arnheim (1969), que defende que a percepção visual é caracterizada por importantes processos cognitivos. Enquanto a posição de Arnheim reflete uma abordagem filosófica mais global, a pesquisa cognitiva de Uttal (1983) é semelhante em orientação. Em suas investigações de detecção de forma Uttal define os estágios de percepção como detecção, discriminação, reconhecimento de percepção. Como Arnheim, Uttal identifica a percepção visual incluindo a cognição visual.

2.2. Representação Visual

Como um indivíduo representa e manipula as imagens mentais? Novamente, as diferentes teorias que tratam desta questão representam duas escolas de pensamento diferentes: a proposicional e a imagista.

A abordagem proposicional argumenta que as imagens mentais são representadas pelas proposições lógicas e que a experiência de alguém "ver" imagens mentais detalhadas é secundária, isto é, um "epifenômeno". Por exemplo, Olson e Bialystock (1983) resumem suas pesquisas com a argumentação de que as "estruturas espaciais" não-imagistas e lógicas são "o acessório da mente; as leis e representações usadas na percepção e no pensamento sobre espaço. Elas são as estruturas do espaço interior". Estas proposições são básicas tanto para o pensamento espacial quanto para o verbal.

A abordagem oposta é tomada pela escola imagista de pensamento, que argumenta que as imagens mentais são imagens visuais internalizadas. Por exemplo, Kosslyn (1980, 1981, 1984, 1988) desenvolveu e testou uma teoria da representação mental que está baseada em operações visuais específicas.

É interessante notar que cada uma destas posições aparentemente contrárias está baseada em trabalhos experimentais empíricos. Talvez estas abordagens não sejam mutuamente exclusivas. De qualquer modo, a tendência atual no campo da cognição visual, como um todo, é duplamente ramificado: (1) identificar os processos de cognição visual básicos que possam ser representados e estimulados pelo computador, e (2) estabelecer a conexão entre estes mesmos processos de cognição visual e os processos neurológicos específicos do cérebro.

B. Significância em Vários Campos

Não apenas a cognição visual é um aspecto importante da inteligência humana, como descrito anteriormente, mas ela também desempenha um papel significante em vários campos dos empreendimentos humanos.

Falando em termos gerais, como na citação anterior de Pinker (1984), a cognição visual é, pelo menos, tão importante para a compreensão da inteligência humana quanto são as áreas da linguagem ou da lógica. Gardner (1982) propõe vários usos gerais deste tipo de inteligência: auto-orientação em vários locais, reconhecimento de objetos e cenários, trabalho com representação gráfica da realidade (por exemplo: mapas, diagramas, representações bi ou tridimensionais), estar sensível às dimensões artísticas (por exemplo: a tensão, o equilíbrio e a composição de uma pintura), estar sensível as similaridades entre diversos domínios (isto é, possuir uma habilidade metafórica) e uso de modelos ou imagens mentais em vários tipos de resolução de problemas.

Mais especificamente, algumas pesquisas têm tentado ligar a cognição visual com o sucesso em conteúdos de domínios específicos. Um dos primeiros projetos de pesquisa deste tipo foi conduzido por Smith (1964), que testou as habilidades espaciais de um grande número de crianças de escolas elementares britânicas. Baseado em suas descobertas, Smith estabeleceu as seguintes conclusões:

* As escolas colocam a ênfase central sobre o desenvolvimento das habilidades verbais e negligencia o desenvolvimento das habilidades espaciais. Como um dos resultados, as escolas produzem crianças com habilidades verbais mais desenvolvidas do que crianças com habilidades visuais bem desenvolvidas.
* As pesquisas longitudinais mostram que o bom desempenho em testes de medida da habilidade espacial são excelentes indicadores

do futuro bom desempenho em Matemática, tanto entre meninos quanto meninas.

* Estes testes de habilidades espaciais são capazes de medir habilidades tais como a habilidade de pensar abstratamente e analiticamente; a habilidade de perceber relações espaciais entre duas e três dimensões; a habilidade de manipular objetos manualmente, dentre outras habilidades.

* Estas habilidades mencionadas acima são necessárias para o bom desempenho em áreas de Matemática superior, Egenharia, e vários campos da ciência e das profissões tecnológicas.

* Testes verbais não servem para testar as habilidades apropriadamente nestas áreas, um fato que geralmente é ignorado nas escolas.

Estas conclusões empiricamente baseadas estão em ressonância com os sentimentos mais intuitivos de muitos engenheiros e arquitetos. Por exemplo, em seu livro Invention and Evolution: Design in Nature and Engineering, French (1989) contrasta o pensamento verbal com o pensamento visual e conclui que não se pode "projetar" apenas com palavras:

"O *homo jabber (falante)* não é o final de um percurso evolutivo que olha superiormente para o humilde *homo faber (fazedor): o* engenheiro e o arquiteto."

Shepard (1978) explica a importância da representação visual na resolução de problemas, nas ciências e nas artes, apresentando uma variedade de exemplos da vida real. De acordo com estes exemplos, uma grande quantidade de eminentes cientistas construiu suas teorias com base em imagens mentais específicas (por exemplo: Einstein, Watson e Crick). A vantagem de pensar através de imagens mentais, de acordo com Shepard, é que podemos simultaneamente ver diferentes conexões e interrelações dinamicamente. Shepard e Cooper (1982) apontaram que a utilização de analogias visuais, baseadas em imagens mentais concretas, é bastante efetiva na explicação e na compreensão de conceitos abstratos na ciência e na matemática (por exemplo, os campos eletromagnéticos).

De acordo com uma ampla variedade de pesquisas educacionais, parece não haver dúvida de que a habilidade espacial está altamente correlacionada e/ou diretamente relacionada ao bom desempenho em matemática, engenharia e em ciências (Battista et al., 1982; Bishop, 1978, 1980; Clements, 1983; Linn e Peterson, 1986; Salomon, 1974; Stuart e Plunket, 1979). Entretanto, muitas controvérsias e questões em aberto permanecem relacionadas a natureza da habilidade espacial, seu desenvolvimento, seus sub-componentes e suas interrelações com o bom desempenho em tarefas específicas (Eisenberg e Dreyfus, 1989; Mitchelmore, 1980).

C. O Exercício da Cognição Visual

Considerada a importância educacional da cognição visual, permanece uma questão óbvia: A Cognição Visual é treinável?

De acordo com as pesquisas, a resposta é afirmativa. Mas é necessário apontar, entretanto, que a esmagadora maioria destes estudos concentram-se em crianças em fase escolar do segundo segmento da escola primária e da escola secundária - normalmente da 4a. série em diante (veja uma revisão destas pesquisas em Ben-Chaim et al., 1985). Em um dos pouquíssimos estudos realizados com crianças da pré-escola, Cox (1978) demonstrou que crianças de 5 anos de idade podem ser treinadas em habilidades de tomada de perspectiva; além disso, estas crianças demonstraram a habilidade de transferir esta habilidade para novos problemas, desde que próximos aos problemas iniciais.

Várias revisões que avaliam os programas da pré-escola concluem que as crianças da pré-escola normais podem ser treinadas em habilidades visuais (Grossman, 1970; Fowler, 1983; pág: 235-242). Entretanto, estes programas foram conduzidos principalmente dentro do referencial da arte educação. Outros programas que desenvolvem habilidades visuais podem ser encontrados no campo da educação especial, por exemplo, o programa de percepção visual de Frostig-Horne (Weiderholt & Hammill, 1971) e outros (Kephart, 1971); (Getman, Kane, Halgren & McKee, 1968). A prática comum, então, limita o ensino do pensamento visual na pré-escola às artes e à educação especial.

Esta negligência dos programas do desenvolvimento da cognição visual das crianças da pré-escola é ainda mais surpreendente, se considerarmos (1) a importância da cognição visual para inteligência, como discutido no início deste artigo, (2) o fato de que a representação visual desempenha um papel significativo no pensamento das jovens crianças (Kosslyn, 1980), e (3) o interesse corrente de desenvolvimento das habilidades do pensamento.

O ensino das habilidades de pensamento é reconhecido como altamente prioritário em educação (Glaser, 1984, 1985) e uma variedade de programas educacionais para escola elementar tem sido desenvolvida para ensinar várias habilidades cognitivas (Chance, 1986; Costa, 1985; Nickerson, Perkins & Smith, 1985; Segal, Chipman & Glaser, 1985). Exemplos destes programas são o Instrumental Enrichment Program (Feuerstein, Jensen, Hoffman & Rand, 1985); Philosophy for Children (Lipman, 1985); o Problem Solving and Comprehension Program (Whimbley & Lochhead, 1980); o CoRT Thinking Program (de Bono, 1976) e o Productive Thinking Program (Covington, 1985). Estes e outros programas cobrem vários aspectos importantes do pensamento. Entretanto, a ênfase está principalmente no pensamento verbal, conceitual e lógico. O Instrumental Enrichment Program é uma exceção pois inclui um desenvolvimento sistemático das habilidades do pensamento visual como parte de um programa mais amplo que inclui também habilidades verbais e lógicas; entretanto, este programa é devotado a crianças com dificuldades, e não para crianças normais.

Resumindo, existem fortes evidências de que as habilidades visuais podem e devem ser ensinadas, mesmo na pré-escola, mas a prática educacional está muito reduzida, quase inexistente, neste sentido.

D. Conclusões

Os seguintes pontos podem ser considerados claros a partir das discussões anteriores:

(1) **A cognição visual é um aspecto importante do pensamento humano e da inteligência humana**. Se aceitarmos que a inteligência humana é um conceito unitário, a cognição visual é um aspecto essencial desta inteligência. Caso contrário, se aceitarmos a teoria das inteligências múltiplas (Gardner, 1982), a cognição visual é uma inteligência humana específica por si mesma.

(2) **As pesquisas indicam claramente que a cognição visual possui signifi-câncias bastante amplas**. Esta significância tem sido documentada, tanto em domínios específicos como Matemática, Ciências, Engenharia, Arquitetura e Artes quanto em termos gerais.

(3) **O desenvolvimento (ensino) da cognição visual tem sido tradicionalmente negligenciado, limitando-se aos campos da arte educação e da educação especial.** As escolas enfatizam o desenvolvimento da cognição verbal, que está baseada num sistema simbólico verbal, ainda que a linguagem verbal se desenvolva "naturalmente". Os estímulos ambientais deste processo natural podem ser bastante benéficos. Da mesma forma, as escolas deveriam desenvolver a cognição visual que está baseada sobre um sistema simbólico visual e que também se desenvolve "naturalmente". Este último desenvolvimento deve ser orientado a todas as crianças; ele não deve ser encarado como um esforço de duplicação ou de substituição da educação especial ou da arte educação.

(4) **O treinamento sistemático e bem inicial da cognição visual fornece vantagens especiais**. As fundamentações desta hipótese provêm de pesquisas educacionais, embora ainda sejam necessários mais estudos nesta área.

É importante notar que as ciências cognitivas atualmente fornecem aos pesquisadores uma orientação e instrumentos para avaliação e para estudo da cognição visual. Como resultado, tanto as pesquisas básicas quanto as pesquisas aplicadas neste campo estão em fase de crescimento.

Duas conclusões são inevitáveis:

> (1) Existe uma necessidade significativa de um programa educacional, elaborado sistematicamente para desenvolver a cognição visual em jovens crianças.
>
> (2) Deve ser conduzida uma avaliação e uma pesquisa relacionada a tal programa educacional, de acordo com os avanços contemporâneos das ciências cognitivas.

Fundamentados nestas concepções, resultados de pesquisas e necessidades apontadas pelas mesmas, o Instituto Weizmann está desenvolvendo o Projeto Agam que inclui 36 unidades.

1. Círculos	*10. Horizontal, Vertical & Oblíquo*	*19. Formas Típicas*	*28. Intuição Numérica*
2. Quadrados	*11. Triângulos*	*20. Proporções*	*29. Composição*
3. Padrões	*12. Círculos, Quadrados e Triângulos*	*21. Vermelho*	*30. Primeira Dimensão*
4. Círculos e Quadrados	*13. Variação de Forma*	*22. Amarelo*	*31. Segunda Dimensão*
5. Identificação Instantânea	*14. Simetria*	*23. Azul*	*32. Terceira Dimensão*
6. Horizontalidade	*15. Linhas Curvas*	*24. Cores Secundárias (Tintas)*	*33. Quarta Dimensão*
7. Verticalidade	*16. Grande, Médio & Pequeno*	*25. Branco, Petro & Cinza*	*34. Letras*
8. Horizontal & Vertical	*17. Ângulos*	*26. Trajetórias*	*35. Gramática Visual*
9. Obliquidade	*18. Pontos*	*27. Do Olho para a Mão*	*36. Criatividade*

Cada uma das 36 unidades que compõem o Programa Agam possuem as mesmas 5 categorias: de atividades: (1) atividades de Identificação; (2) atividades de Memória; (3) atividades de Reprodução; (4) atividades Reprodução Memorial; (5) atividades de Produção Criativa. Além destas categorias outras atividades envolvendo (a) Desenvolvimento de Precisão Visual e (b) Resolução de Problemas também estão em desenvolvimento.

As 36 unidades foram aplicadas e avaliadas, estando atualmente em fase de reelaboração ou de extensão. Os interessados na descrição da estrutura geral das unidades, bem como nos resultados das pesquisas envolvendo esta segunda fase do Projeto Agam poderão solicitar o relatório completo à Secretaria da Pós-Graduação em Educação Matemática - USU.

Visualização em Geometria - As Duas Faces da Moeda

Rina Hershkowitz
Weizmann Institute of Science
Rehovot, Israel

Existe um consenso entre os educadores matemáticos e pesquisadores que a visualização, ou habilidade espacial, é importante porque ela amplia uma visão intuitiva e global e a compreensão dé muitas áreas da Matemática. (Usiskin, 1987).

Como a Geometria inclui muitos elementos visuais, muito tem sido escrito e realizado em teoria, pesquisa e áreas curriculares relativo a interrelação entre a visualização e a aprendizagem da Geometria. Por exemplo:

1. De acordo com a **teoria** de van Hiele, que está sendo largamente discutida atualmente, a visualização é o primeiro nível e um nível necessário na hierarquia do "pensamento geométrico" (Wirszup, 1976).
2. As **pesquisas** demonstram que existem interrelações entre a habilidade espacial e o desenvolvimento do pensamento geométrico (por exemplo: Bishop, 1983; De Guire, 1982).
3. Os educadores matemáticos que estão envolvidos no **desenvolvimento curricular** recomendam um curso intuitivo visual na Geometria antes ou em paralelo ao curso dedutivo (Del Grande, 1987; Fruedenthal, 1973; Schoenfeld, 1986; Usiskin, 1987).

Neste artigo, tentaremos mostrar que o papel da visualização, dentro do processo de desenvolvimento de conceitos geométricos, é extremamente complexo e atua em duas direções:

1. Por um lado, nós não podemos formar uma imagem de um conceito e de seus exemplos sem visualizar seus elementos.

2. Mas por outro lado, estes elementos visuais podem limitar e empobrecer a imagem conceitual (para imagem conceitual veja Vinner, 1983).

As discussões que se seguem e envolvem estas questões estão baseadas em dados experimentais. Uma investigação sobre o desenvolvimento e aquisição de conceitos geométricos básicos foi realizada em duas escolas em que o ensino da Geometria estava bem organizado e os professores estavam preparados. Em ambas as escolas, todos os alunos nas 5as., 6as., 7as. e 8as. séries participaram da pesquisa. Se os alunos devem aprender conceitos geométricos básicos, então é importante que os professores da escola primária se sintam confortáveis em relação aos mesmos, portanto nós também investigamos 142 professores primários em formação (estagiários - PRE) e 25 professores primários em serviço (ST).

Os conteúdos e as tarefas foram selecionados do silabário geométrico da escola primária, que inclui: identificação, desenho e raciocínio relacionados a conceitos básicos, seus atributos, seus exemplos e contra-exemplos e algumas interrelações entre estes elementos. As crianças terão visto estes conceitos ou de forma estruturada através das suas experiências escolares ou de forma não estruturada através de suas vivências ambientais, familiares e sociais. Portanto, as estratégias dos processos de ensino-aprendizagem, pelas quais as crianças estabeleceram os conceitos, somente pode ser descrita de forma vaga e imprecisa, baseada em nossa familiaridade com as situações de aprendizagem envolvendo adultos e crianças; nas maneira comuns de ensino da Geometria da escola primária, e na análise dos textos dos livros didáticos. As principais características das estratégias de ensino nas situações de ensino não formais e também frequentemente no ensino da escola primária são: **incompletude** (apenas alguns dos elementos são apresentados), e o **desconhecimento ou inconsciência** do professor e até mesmo dos livros didáticos da existência de outros elementos.

É muito comum encontrar aprendizes que tenham sido introduzidos a conceitos apenas através de alguns poucos exemplos. A generalização dos atributos do conceito são apresentadas (quando são) pelo professor ou pelo texto didático. Mas geralmente, o aprendiz está envolvido de forma receptiva e passiva no processo de aprendizagem. De modo a nos aproximarmos mais dos processos de formação de conceitos, nós acrescentamos situações controladas inovadoras em nossas investigações.

Os Exemplos "Bitrian" e "Biquad"

Aqui a situação de aprendizagem inicia com a definição verbal de um "conceito". Nós inventamos as seguintes definições:

> 1. Um **bitrian** é uma figura geométrica consistindo de dois triângulos que possuem um vértice em comum. (Veja Hershkowitz, Bruckhelmer & Vinner, 1987).
> 2. Um **biquad** é uma figura geométrica consistindo de dois quadriláteros que possuem em comum um lado.

Solicitamos a metade de cada grupo (alunos e professores) que identificasse bitrians e biquads dentre um conjunto de figuras, e a outra metade que desenhasse dois bitrians e dois biquads. Cerca de 60%-70% dos alunos e 80%-90% dos professores identificaram os três exemplos mais "fáceis" de cada conceito, ou desenharam pelo menos um exemplo de cada conceito corretamente (veja Figura 1).

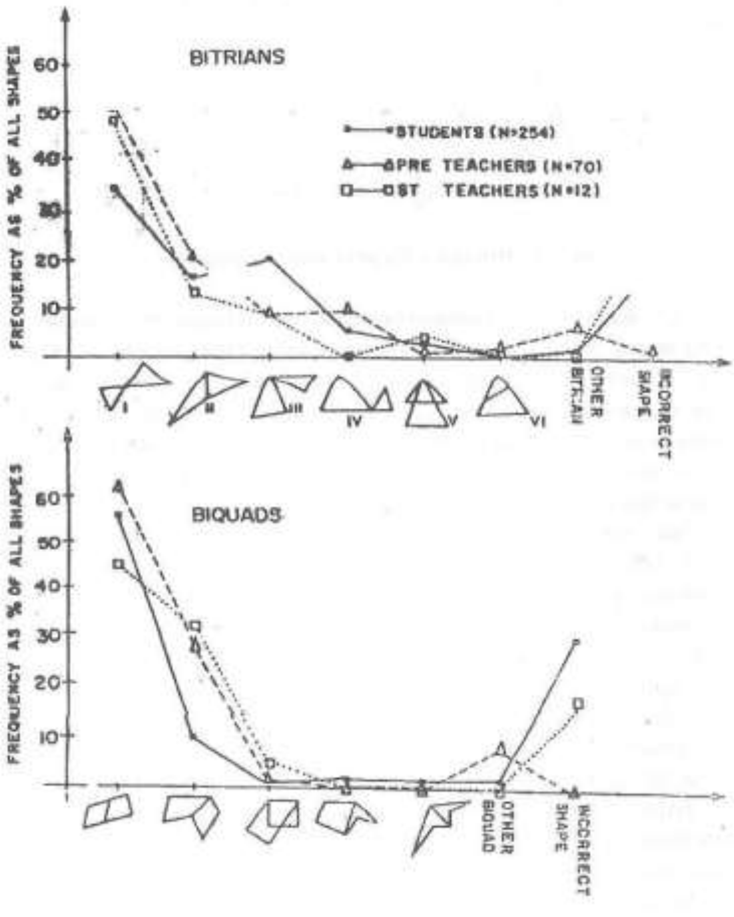


Figura 1. Frequências dos tipos de bitrians e de biquads desenhados pelos professores e pelos alunos.

Se analisarmos as frequências dos bitrians e dos biquads desenhados pelos alunos e pelos professores (PRE e ST), poderemos esboçar duas conclusões:

1. **O fenômeno do modelo protótipo.** Cada conceito possui um conjunto de atributos críticos (aspectos relevantes) e um conjunto de exemplos. Todos os exemplos do conceito são matematicamente equivalentes, no sentido de que eles satisfazem a definição do conceito e contém todos os seus atributos críticos, mas eles são diferentes uns dos outros visualmente e psicologicamente. Existem "super"-exemplos - protótipos - (Rosch & Mervis, 1975) que tendem a ser muito mais populares do que todos os outros. (O bitrian mais popular, tanto na tarefa de

identificação quanto na tarefa de desenho, está indicado na Figura 2a e o biquad mais popular está indicado na Figura 2b.)

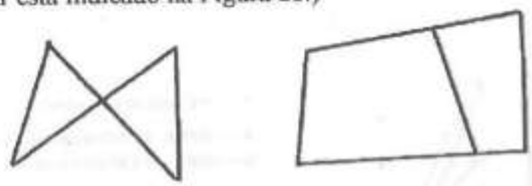


Figura 2. Bitrian e Biquad mais populares.

2. Os **padrões de comportamento** em relação aos exemplos do conceito na tarefa de desenho são muito similares entre alunos, professores estagiários e professores em serviço. Na tarefa de identificação, os professores de ambos os grupos tiveram desempenhos melhores do que os alunos, mas o padrão permaneceu similar. Encontramos um outro padrão similar para outras análises destas tarefas quando separamos a população entre as variáveis independentes de série, sexo e origem sócio-cultural.

Nesta situação de aprendizagem, o conceito foi apresentado verbalmente sem nenhum exemplo simples, e novamente os resultados demonstram que as crianças desenvolveram uma imagem conceitual correta, mas incompleta. Nós não podemos responsabilizar a incompletude de um livro didático ou o conhecimento limitado do professor pois os conceitos envolvidos aqui eram totalmente novos para todos. Mas estas descobertas são típicas de crianças sobre muitos conceitos geométricos básicos do silabário geométrico primário e até mesmo ginasial em muitos países. A seleção fixa de alguns exemplos de conceitos e a negligência de outros exemplos, parece ser um reflexo dos processos cognitivos que atuam de forma semelhante sobre diferentes indivíduos.

Em seguida, continuaremos a descrever, através de resultados de pesquisas, alguns elementos que desempenham um papel nestes processos.

A Quantidade de Atributos Críticos de um Conceito

A maioria dos conceitos básicos em Geometria são **conjuntivos**; por exemplo, um triângulo isósceles pode ser visto como a conjunção dos seguintes atributos críticos: (a) Um **triângulo** (b) que possui **dois lados** (c) que são **iguais**. Na realidade se esta é a estrutura conjuntiva ou não depende do aprendiz e do estágio de aprendizagem da Geometria. Num estágio inicial "um triângulo" é também uma conjunção, enquanto mais tarde ele já passa a ser considerado como uma entidade única (Miller, 1956). Não daremos prosseguimento a esta discussão, mas admitiremos que existe alguma arbitrariedade no estabelecimento do número de atributos críticos.

No exemplo do biquad, nós temos uma conjunção dos seguintes atributos críticos: (a) **dois quadriláteros**, (b) que possuem **um lado** (c) **em comum**. A Figura 3 mostra as respostas dos alunos de 5a. e 6a. série à tarefa de desenhar dois biquads.

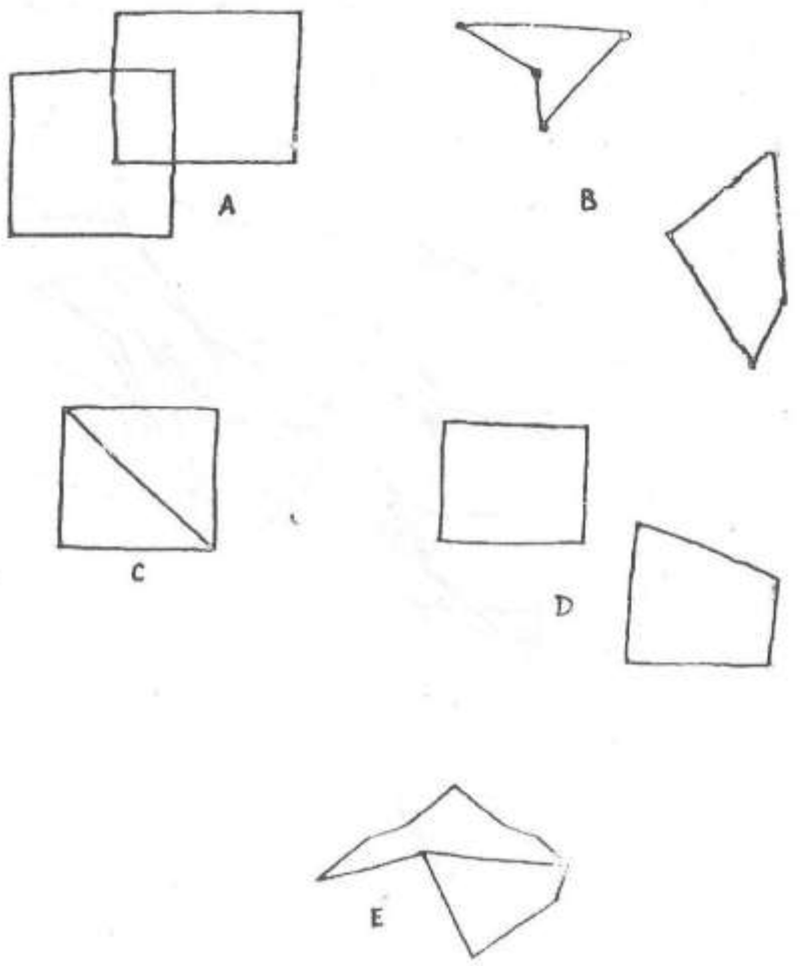


Figura 3. Respostas dos alunos de 5a. e 6a. séries a tarefa
de desenhar dois biquads.

Os alunos B e D "deram atenção" apenas ao atributo (a); o aluno A desenhou dois quadriláteros que tinham alguma coisa em comum, mas não um lado; o aluno C desenhou o lado comum mas com triângulos e não com quadriláteros. Apenas o aluno E considerou os três atributos críticos de um biquad. Percebemos que os atributos críticos do biquad possuem alguma coisa em comum com a formação do conceito.

Outra análise que mostra o efeito da quantidade de atributos na formação do conceito está apresentada na Figura 4.

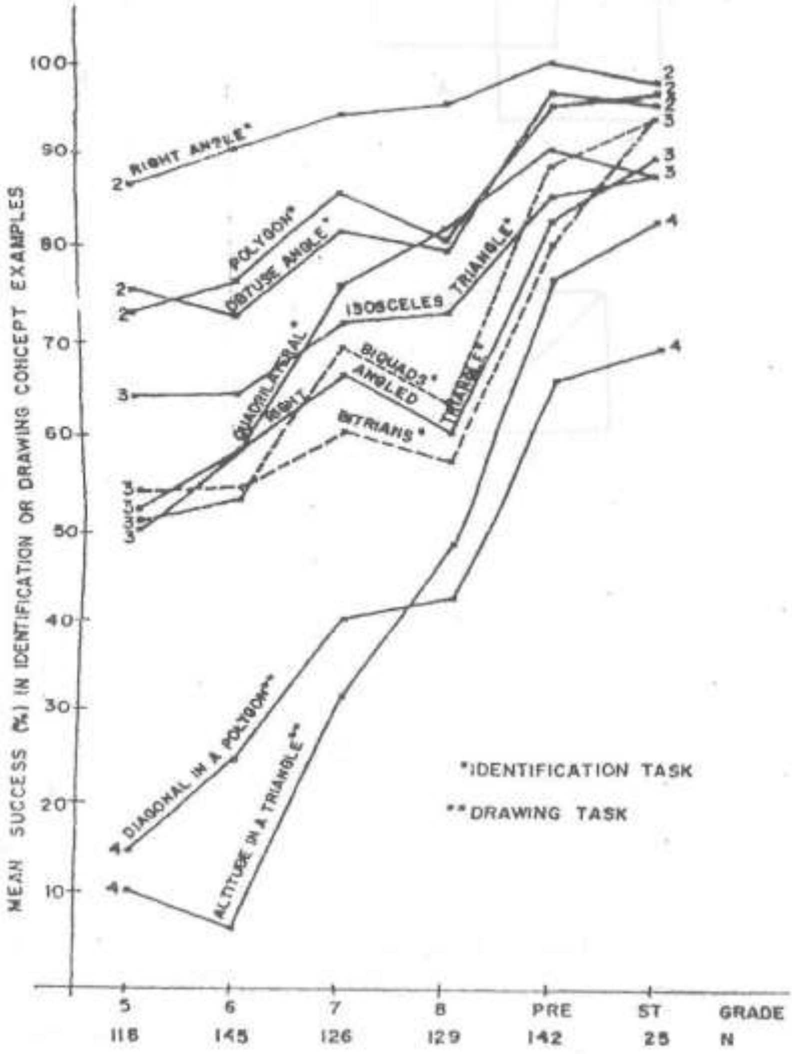


Figura 4. O desempenho médio na identificação ou no desenho dos exemplos do conceito. (A quantidade de atributos críticos de cada conceito é dada ao final de cada gráfico do desempenho médio nas tarefas).

Cada linha na Figura 4 mostra a percentagem dos acertos dos diferentes subgrupos (séries: 5a., 6a., 7a. e 8a. e professores em exercício e estagiários), nas tarefas de identificação ou de desenho envolvendo um dos conceitos investigados. Nas tarefas de identificação, solicitamos aos sujeitos que identificassem exemplos do conceito num conjunto de exemplos positivos e negativos. Nas tarefas de desenho, solicitamos que eles desenhassem alguns exemplos de determinado conceito. Os conceitos foram analisados como conjunções de seus atributos críticos (a quantidade de atributos críticos do conceito está escrito ao final de cada linha na Figura 4). A Figura 4 indica que existe uma correlação negativa entre a quantidade de atributos do conceito e o desempenho médio nas tarefas. O desempenho médio cresce, melhorando conforme a quantidade de atributos diminui.

As diferenças no desempenhio médio para os diferentes "tipos" de conceitos são grandes para os alunos mais jovens (5a. série) e diminuem conforme a série aumenta. As diferenças são menores para os dois grupos de professores. O fato de que, para cada subgrupo, os conceitos com a mesma quantidade de atributos "se agrupem" fortalece o argumento de que a quantidade de atributos críticos é uma variável crítica na formação do conceito. O fato de que o gráfico do desempenho médio para as tarefas de identificação dos biquads e bitrians cair no agrupamento das "conjunções de 3 atributos" fortalece esta descoberta. Ela mostra que o número de atributos conduz a comportamentos semelhantes independente da experiência anterior e do método de "ensino" do conceito.

Além disso, descobrimos que a mesma análise para o exemplo protótipo de cada conceito mostra um padrão muito semelhante; enquanto a análise dos exemplos mais difíceis fornece um padrão bastante diferente que não apresenta o agrupamento mencionado. As descobertas anteriores não eram inesperadas, mas elas levantam uma questão crucial: Como a quantidade de atributos críticos de um conceito afeta a formação do conceito via códigos visuais, códigos analíticos ou combinação de ambos?

Nas tarefas do biquad ou bitrian, por exemplo, quando a definição verbal foi dada e o aprendiz criou sua imagem conceitual diretamente, podemos assumir que o pensamento analítico foi utilizado. Mas, o fato de que uma figura fixa era **o** conceito (o fenômeno do protótipo) para muitos aprendizes fundamenta a suposição de que os elementos perceptivos-visuais também desempenham algum papel na formação do conceito. O fato de que os gráficos dos desempenhos médios na identificação ou no desenho dos exemplos mais difíceis de cada conceito não exibir nenhum padrão de agrupamento, como na Figura 3 é uma evidência adicional de que não se trata de um processo puramente analítico. Tentaremos nos aproximar mais desta questão através da análise de alguns outros exemplos.

Elementos Visuais na Identificação de Triângulos Isósceles e Triângulos Retângulos A coleção de triângulos na Figura 5 serviu a duas tarefas: a identificação de triângulos retângulos e a de triângulos isósceles.

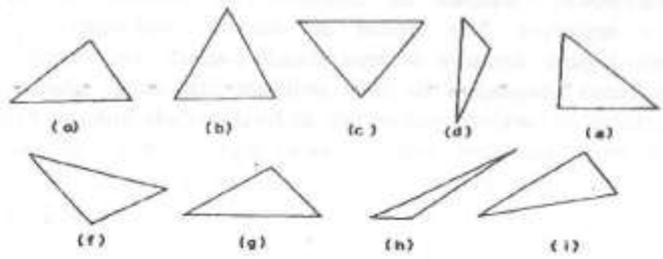


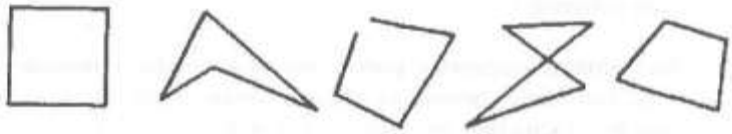
Figura 5.Triângulos da Tarefa de Identificação de Isósceles e Retângulos

Na Figura 5 existem três triângulos retângulos (**e**, **f** e **g**) em três orientações diferentes e quatro triângulos isósceles (**b**, **c**, **e** e **i**) novamente em orientações diferentes. As descobertas (veja Hershkowitz, 1987; Hershkowitz et al., 1987) mostram um forte efeito negativo do sistema de referência (neste caso, os lados "verticais e horizontais" da página). O exemplo popular (o protótipo) entre os triângulos retângulos é o triângulo (e), cujos lados perpendiculares estão numa posição vertical-horizontal, e tanto os alunos quanto os professores sentiram muita dificuldade na identificação de outros exemplos positivos (f e especialmente g). Similarmente mas menos extremo, o triângulo isósceles protótipo é (b), que se "apoia" em sua base (base horizontal), e o desempenho de identificação é reduzido para os triângulos (c), (e) e especialmente (i).

Este efeito da orientação é bem conhecido (por exemplo, Fisher, 1978) e é um exemplo de um processo perceptivo visual em que os sujeitos (os alunos e até mesmo os professores) consideram uma figura como um exemplo de um conceito através de um julgamento visual. O indivíduo não pode manter um ítem separadamente do campo em que está presente - sua vizinhança (Bryant, 1974; Witkin et al., 1977). Em outras palavras, nós temos aqui um fenômeno protótipo, onde o protótipo é um resultado de nossas limitações perceptuais visuais que afetam a habilidade de identificação dos indivíduos - tanto alunos quanto professores. Esta conclusão está baseada no fato de que fornecer a definição verbal do conceito a metade dos sujeitos de cada subgrupo, não teve nenhuma influência sobre o desempenho nas tarefas.

Julgamento Visual e Não-Visual no Exemplo dos Quadriláteros

A tarefa (Vinner & Hershkowitz, 1983) era: Entre as seguintes figuras (Figura 6) indique aquelas que são quadriláteros. Para cada figura que não é um quadrilátero explique o porquê.



i ii iii iv v

Figura 6. Figuras da tarefa de identificação de quadriláteros.

O exemplos do conceito e os atributos críticos serão ligeiramente diferentes para diferentes definições de quadriláteros. Então, **"um quadrilátero é uma figura fechada de quatro lados"** inclui a figura iv como exemplo, enquanto **"uma figura fechada de quatro lados cujos lados não se interceptam"** não inclui.

Como poderíamos esperar, uma melhoria considerável com a faixa etária na identificação da figura v (quadrilátero convexo) e na figura ii (quadrilátero côncavo) foi observada na população de alunos (de 37% na 5a. série para 82% na 7a. série para a figura v e de 20% para 70% para a figura ii). Alguns professores não aceitaram estas figuras como exemplos de quadriláteros. Por outro lado, em todas as séries, a maioria dos alunos identificou um quadrado como um quadrilátero e o mesmo é verdadeiro para quase todos os professores. "Comportamento constante" também foi encontrado na identificação da figura não fechada iii e da figura iv, que possui lados que se interceptam. Para a maioria dos alunos (cerca de 90%) nos diferentes grupos etários, e para a maioria dos professores, estas duas figuras eram contra-exemplos.

Aqui, novamente nós temos o fenômeno protótipo. Mas ele diminui dramaticamente com a idade (série escolar). A análise das justificativas dos alunos de porque uma determinada figura **não** é um quadrilátero fornece algumas informações sobre a natureza do fenômeno de protótipos. Nós identificamos algumas categorias bastante claras sobre os diferentes tipos de raciocínio:

1. Raciocínio visual baseado na aparência de toda a figura (primeiro nível de van Hiele). Por exemplo, "não parece com um quadrilátero; ele se parece com dois triângulos". Este tipo de raciocínio pode conduzir a respostas corretas ou incorretas.

2. Raciocínio baseado em atributos não críticos, geralmente atributos de apenas um exemplo protótipo. Por exemplo, "Todas as figuras, exceto o quadrado, não são quadriláteros porque elas podem ter lados iguais mas não possuem ângulos iguais."

3. Raciocínios baseados em atributos críticos. Por exemplo, "não é um quadrilá-tero porque não é fechada, portanto não é um polígono, e todo quadrilátero é um polígono."

As duas últimas categorias podem ser consideradas refletindo o segundo nível de van Hiele, porque os alunos usaram atributos em seus raciocínios. Quando o raciocínio está baseado em atributos não críticos, ele conduz a respostas incorretas, e quando o raciocínio está baseado em atributos críticos, ele conduz a respostas corretas.

Na Figura 7, nós ilustramos a variação com a faixa etária (série escolar) da frequência percentual das três categorias de justificativas para a figura iii, a "figura aberta". A frequência de justificativas baseadas no julgamento **visual** (1) é pequeno, mas não desaparece completamente mesmo entre os professores, enquanto a frequência de justificativas baseadas em julgamentos **não-visuais** (2 e 3) é bastante elevada. A frequência de justificativas corretas baseadas nos principais atributos conceituais (3) cresce dramaticamente da 5a. série para a 7a. série e então, torna-se estável, mas diminui para os professores. A frequência de justificativas incorretas baseadas no protótipo (2) diminui e desaparece completamente para os professores.

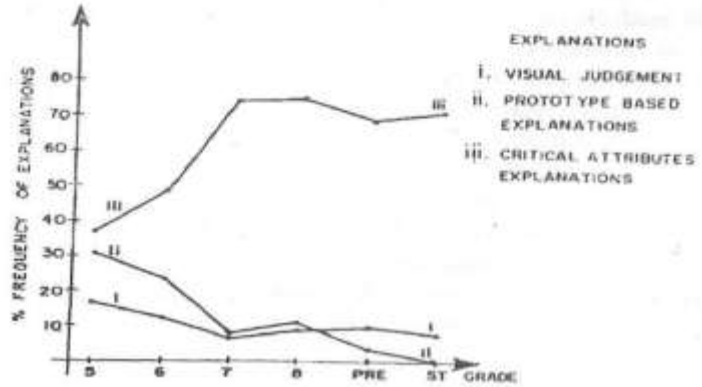


Figura 7. Frequências das categorias das justificativas dos respondentes que afirmaram que a "figura aberta"

(Figura 5) não é um quadrilátero.

Elementos Visuais e Não-Visuais no Exemplo da Altura de Triângulos

O próximo exemplo é mais complicado; a tarefa era desenhar a altura em relação ao lado "*a*" em cada um dos 14 triângulos de 4 tipos diferentes: isósceles, acutângulo, obtusângulo e retângulo. Existem três ou quatro triângulos de cada tipo em diferentes orientações. O desempenho para os triângulos do mesmo tipo em diferentes orientações é muito semelhante - indicando que o efeito de orientação (ou sistema de referência) não está presente aqui. Isto sugere que o processo de formação do conceito neste caso é diferente daquele no triângulo retângulo. Alguns exemplos de respostas incorretas desta tarefa são ilustrados na Figura 8.

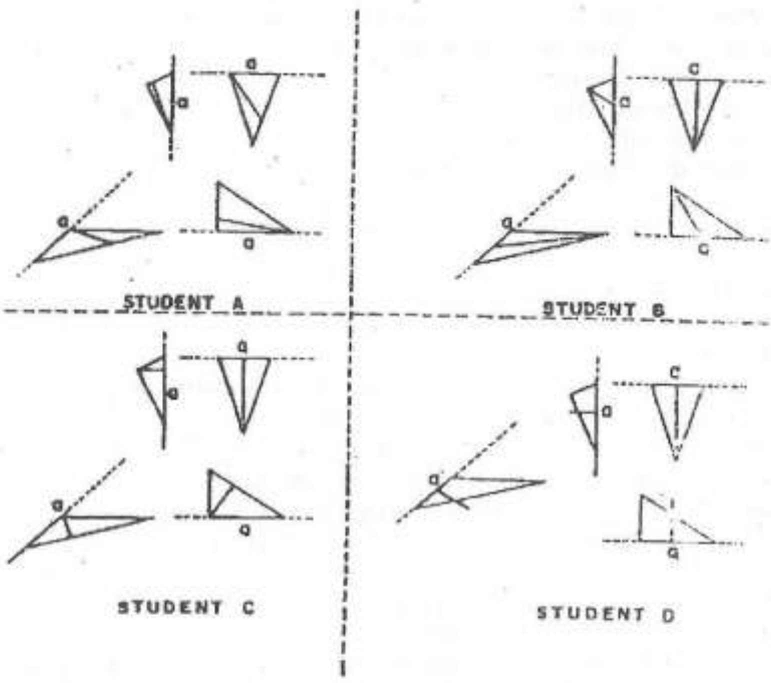


Figura 8. Alguns exemplos de respostas incorretas da tarefa da altura de triângulos.

Nós podemos analisar as respostas de acordo com os atributos críticos da altura de triângulos: (a) A **perpendicular** (b) que passa pelo **vértice** (c) **oposto ao lado** a **ou** (d) a sua **extensão**.

Os alunos B e D consideraram apenas dois atributos críticos, e o aluno A apenas um. Mas o aluno B desenhou sistematicamente uma mediana ao lado ***a*** e o aluno D desenhou o bissetor perpendicular. O aluno A também desenhou sistematicamente **algum** segmento **interior** do triângulo a partir de um dos vértices do lado ***a***. O aluno C desenhou a altura em relação ao lado ***a*** nos dois primeiros triângulos, mas no triângulo obtusângulo, onde a altura é externa ao triângulo, e no triângulo retângulo, onde a altura é um dos lados, ele desenhou uma altura em relação a outro lado diferente de ***a***, provavelmente para obter uma altura **interna** ao triângulo.

A maioria dos alunos e alguns dos professores possui uma imagem conceitual da altura de triângulo que contém apenas segmentos interiores ao triângulo. Para um triângulo isósceles isto geralmente conduz a respostas corretas, porque a altura é a mediana e o bisetor perpendicular também. Nos triângulos acutângulos, a resposta correta também não contradiz esta imagem visual. Mas nos outros dois tipos de triângulos, esta imagem conceitual pode conduzir apenas a respostas incorretas.

A Figura 9 mostra a frequência dos tipos de respostas dos alunos para os triângulos obtusângulos e retângulos ao longo das séries. A quantidade de alunos que não respondeu a esta tarefa foi bastante elevada nas 5a. e 6a. séries, diminuiu dramaticamente na 7a. série e ainda mais na 8a. série. Isto parece ser reflexo do ensino. Este tópico é ensinado ao final da 6a. série, sendo repetido como parte do ensino dos cálculos de áreas nas 7a. e 8a. séries. A interpretação desta curva "sem resposta" é que os alunos começaram a pensar que eles sabiam o conceito. Mas o que, de fato, eles aprenderam?

A quantidade de alunos que tinham formado o conceito corretamente aumenta de acordo com a seriação, como poderíamos esperar, mas mesmo na 8a. série ainda é menor do que 30%. Em paralelo, existe outro grupo cuja quantidade aumenta - aqueles que formaram o principal conceito errôneo de que a altura do triângulo é um segmento **interior** do triângulo. A frequência de "outros erros" não mostra nenhuma tendência clara ao longo das séries, mas também é bastante elevada. Antes da aprendizagem formal, a maioria da população (5a. e 6a. séries) admitem que eles não estão familia-rizados com o conceito e eles não produzem nenhuma resposta. Daqueles que responderam, a maioria produziu respostas incorretas e asistemáticas. A aprendizagem formal, pelo menos nesta fase, produz dois grupos - aqueles que formaram o conceito correto e aqueles que formaram o "conceito errôneo dominante", enquanto que a quantidade daquelesqueproduziram "outros" conceitos errôneos é estável.

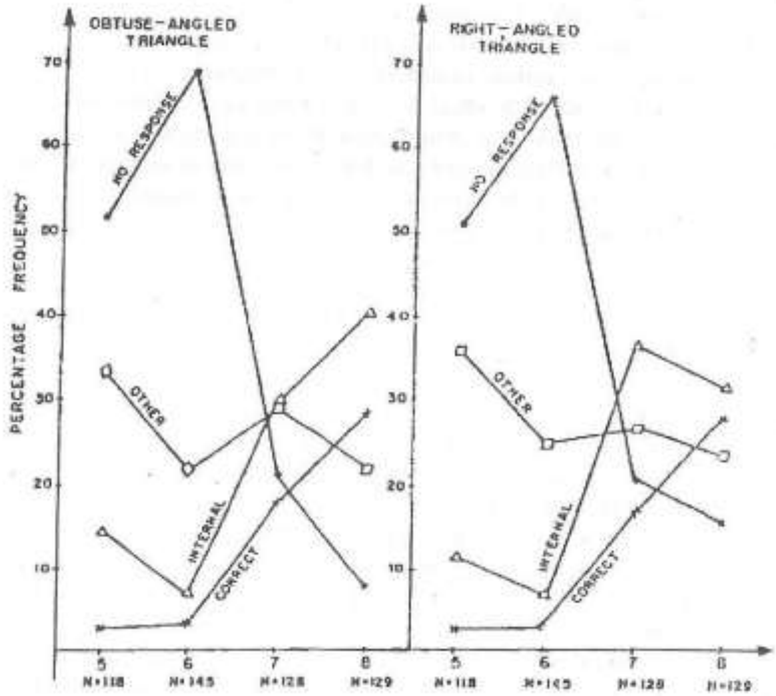


Figura 9. Frequências das respostas ao teste da altura para os triângulos obtusângulos e retângulos.

Parece razoável assumir que muitos alunos (e alguns professores) formam um protótipo para a altura - um segmento interno ao triângulo. Eles não podem desenhar uma altura que contradiga esta imagem visual que eles desenvolveram, e desta forma desenham incorretamente segmentos internos ao triângulo.

Discussões

Os conceitos matemáticos são derivados de sua definição Matemática. A definição Matemática estabelece um corte claro e preciso na distinção entre as instâncias que são exemplos daquele conceito e os exemplos que não são.

Os exemplos dos conceitos básicos na Geometria são figuras geométricas. O processo de desenvolvimento do conceito inicia desde a primeira infância e existe uma concordância geral de que as crianças mais jovens captam primeiro a aparência total da figura e isto é realizado através de códigos visuais (veja, por exemplo, a teoria de van Hiele em Crowely, 1987). Esta visualização é um instrumento necessário na formação dos conceitos geométricos.

Por outro lado, diferente do julgamento baseado na definição Matemática, o julgamento visual não faz um corte claro distintivo entre os exemplos conceituais e outras instâncias. Ao contrário, ela coloca algumas limitações na habilidade individual de formar todos os exemplos conceituais.

Nós discutiremos este ponto, usando os seguintes resultados. Nós descrevemos anteriormente alguns exemplos do comportamento de alunos (entre 5a. e 8a. séries) e de professores em tarefas geométricas. Em cada tarefa, nós tínhamos um exemplo que era muito mais popular do que os outros - o exemplo protótipo. Se nós examinarmos os exemplos protótipos, nós encontraremos em cada um deles, alguns atributos específicos, além dos atributos críticos do conceito (aqueles atributos que cada exemplo positivo do conceito deve possuir), que são dominantes e que "desviam e distircem nossa atenção". Por exemplo, (a) a posição vertical-horizontal do triângulo retângulo protótipo; (b) os quatro lados iguais e os quatro ângulos iguais do quadrado como exemplo de quadrilátero; (c) o atributo de ser interno ao triângulo do conceito de altura, e (d) o atributo de estar sobre a mesma reta para os lados dos biquads ou bitrians.

Parece razoável assumir que o atributo adicional do exemplo protótipo, desvia nossa atenção porque ele é visualmente muito forte (Fisher, 1978) e geralmente é registrado em nossas mentes espontaneamente através de códigos visuais.

Nós encontramos que quando as crianças formam suas imagens conceituais, elas geralmente estão com este primeiro exemplo protótipo em mente. Isto foi descoberto usando uma escala Guttman de análise das respostas dos diferentes grupos etários nas tarefas de identificação ou de desenho. A escala de Guttman de análise dos resultados das tarefas do biquad e do bitrian também indicam que os indivíduos geralmente não formam nenhum exemplo do conceito a menos que eles já tenham formado o exemplo protótipo. Estas descobertas estão relatadas em Hershkowitz e Vinner, 1983.

Como, então, as crianças ampliam suas imagens conceituais além dos exemplos protótipos? Nós identificamos alguns tipos diferentes de comportamento.

1. O exemplo protótipo é usado como o sistema de referência e o julgamento visual é aplicado a outras instâncias. Isto parece ser o comportamento mais comum na identificação dos triângulos retângulos, onde os sujeitos falharam na identificação dos exemplos que contradizem o protótipo vertical-horizontal, e na tarefa da altura dos triângulos, onde os sujeitos falharam ao desenhar alturas que contradizem sua imagem conceitual de altuura interna.

2. O exemplo protótipo é usado como o sistema de referência, mas o sujeito baseia seu julgamento nos próprios atributos do protótipo e tenta impor estes atributos aos demais exemplos do conceito. Quando isto não é possível, ele não aceita a figura como um exemplo do conceito.

3. Os atributos críticos são usadosa como sistema de referência na formação dos conceitos geométricos. Neste caso, existe uma chance de que o indivíduo formará imagens conceituais que estejam menos visualmente baseadas (ou mesmo que sejam completamente não visuais).

Em ambos os tipos 1 e 2, o exemplo protótipo é considerado como o representante do conceito, e os sujeitos julgam todos os exemplos pela sua "distância" visual deste representante. Temos aqui, julgamentos protótipos que se aproximam da imagem conceitual; nas palavras de Fisher, eles criam "conceitos visualmente baseados" (Fisher, 1978). O fenômeno dos "conceitos visualmente baseados" expressa a si mesmo em nossos estudos no fato de que as respostas aos exemplos mais difíceis não apresentam o padrão de agrupamento que foi encontrado para o desempenho médio das respostas de todos os exemplos (Figura 3) e para os exemplos mais fáceis. As respostas para os exemplos mais difíceis eram principalmente um produto da tendência visual.

Nós podemos interligar os diferentes tipos de comportamento ao modelo de van Hiele. O primeiro tipo é puramente visual (isto é, o primeiro nível de van Hiele). O segundo tipo está baseado na formação visual do protótipo, mas o julgamento está baseado incorretamente sobre os atributos dos protótipos. Isto pode representar uma transição do primeiro nível de van Hiele para o segundo, mas contradiz a discretude dos níveis declarada por van Hiele. O terceiro tipo claramente representa o segundo (e até mesmo o terceiro) nível de van Hiele.

No exemplo dos quadriláteros, nós vimos os três tipos de julgamento. O comportamento Tipo 2 era bastante elevado para os alunos da 5a. série, diminuindo com a idade e desaparecendo completamente nos professores. O comportamento Tipo 3 aumenta dramaticamente da 5a. série para a 7a. série. Mas o comportamento Tipo 1 era bastante estável e pequeno entre os diferentes grupos de alunos e de professores. Podemos concluir que o comportamento difere conforme a experiência e o conhe-cimento de determinado conceito.

Neste estudo, nós descobrimos que o comportamento sofre modificações de um conceito para outro. Por exemplo, os alunos e professores que demonstraram comportamento analítico (Tipo 3) na tarefa dos quadriláteros falharam ao identificar o triângulo retângulo numa orientação diferente do vertical-horizontal.

Quais são as implicações para o ensino? É desejável que os alunos baseiem seus julgamentos e raciocínios nos atributos críticos (definições) e que superem todas as tendências visuais. Mas as crianças nos estágios iniciais podem criar suas próprias imagens conceituais apenas visualmente. Como a formação de um conceito visualmente tendenciosa pode ser prevenida neste estágio visual?

Nós descobrimos uma variedade completa de visões entre dois pontos de vista extremos: O primeiro, como nos estudos russos (por exemplo, Zykova, 1969), tende a colocar a responsabilidade sobre a limitada experiência visual que nós oferecemos as crianças através dos materiais e métodos instrucionais, e tenta ampliar as imagens conceituais baseadas visualmente enriquecendo as experiências visuais (mais exemplos, orientações diferentes, etc.) O segundo ponto de vista extremo coloca a responsabilidade sobre nossas limitações perceptuais; isto é, o indivíduo irá impor suas tendências visuais sobre sua imagem conceitual, independente da riqueza dos exemplos conceituais que ele tenha encontrado (Usiskin, 1987).

Nós acreditamos que existem evidências de que o processo real está em algum lugar entre estes dois pontos de vista. Em qualquer caso, deveríamos fornecer um "universo" tão completo quanto possível e intrameá-lo no ensino desde os estágios mais iniciais. Mais tarde, deveríamos encorajar as estratégias de ensino em que os atributos críticos sejam utilizados de formas diferentes e vívidas; por exemplo, o conceito é formado pela aprendizagem de tentativa e erro através de uma sequência de exemplos positivos e negativos. O aprendiz adquire o conceito - os atributos críticos um a um - através do feedback das tentativas em cada etapa da sequência (veja Hershkowitz et al. 1987)

References

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 175-203). New York: Academic Press.

Bryant, P. (1974). Perception and understanding in young children. New York: basic Book

Crowley, M.L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), Learning and teaching geometry K-12 (pp. 1-16). Reston, VA: National council of Teachers of Mathematics.

DeGuire, L. J. (1982). Mathematical abilites: The view from factor analysis. In S. Wagner (Ed.), Proceedings of the fourth annual meeting of the North American chapter of psychology of mathmatics education (pp. 1-7).
Athens, GA: Psychology of Mathematics Education - North American Chapter.

Del Grande, J. J. (1987). Spatiai perception and primary geometry. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds), Learning and teaching of Mathematics.

Fisher, N. (1978). Visual influences of figure orientation on concept formation in geometry. In R. Lesh (Ed.), Recent research concerningthe development of spatial and geometric concepts (pp. 305-321). Columbus, OH: Eric Clearinghouse.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Holland: D. Reidel Publication Company.

Hershkowitz, R., Bruckheimer, M., & Vinner, S. (1987). Activities with teachers based on cognitive research. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), Learning and teaching geometry K-12 (pp. 222-235). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1983). The role of critical and non-critical attributes in the concept image of geometricl concepts. In R. Hershkowitz (Ed.), Proceedings of the 7th PME conference (pp. 223-228). Rehovot, Israel: Weizmann Institute of Science.

Hershkowitz, R. (1987). The acquisition of concepts and misconceptions in basic geometry - or when "A little learning is dangerous thing". In J. D. Novak (Ed.), Proceedings of the second international seminar: Misconception and educational strategies in sience and mathematics (Volume III, pp. 238-251). Ithaca, NY: Cornell University.

Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information. Psychological Review, 63, 81-97.

Rosch, E., & Mervis, C. B. (1975). Family resemblances: Studies in the internal structure of categories. Cognitive Psychology, 7, 578-605.

Schoenfeld, A. H. (1986). On having and using geometric knowledge. In J. Herbert (Ed.), Conceptual and procedural Knowledge: The case of mathematics (pp. 225-264). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in chool geometry. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), Learning and teaching geometry K-12 (pp. 17-31). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. ZDM, 83 (1), 20-25.

Witkin, A. H., Moore, C. A., Goodenough, D. R., & Cox, P. W. (1977). Field-dependent and field indepent cognitive styles and their educational implications. Review of Educational Reserch, 47 (1), 1-6.

Wirszup, I. (1976). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. In J. L. Martin (Ed.), Space and geometry (pp. 75-98).
Columbus. OH: Eric Clearinghouse.

Zykova, V. I. (1969). The psychology of sixth grade pupils' mastery of geometric concepts. English translation in J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), Soviet Studies in the psychology of learning and teaching mathematics (pp. 149-188). Chicago, IL: University of Chicago.

este artigo foi publicado anteriormente em
FOCUS ON LEARNING PROBLEMS IN MATHEMATICS
Winter Edition, 1989, Volume 11, Number 1
Center for Teaching/Learning of Mathematics

ATIVIDADES COM PROFESSORES BASEADAS EM PESQUISAS COGNITIVAS

Rina Hershkowitz; Maxim Bruckhelmer & Shlomo Vinner

Introdução

Um conhecimento geométrico básico é fundamental para que a criança interaja efetivamente com seu ambiente, como também para que ela inicie um estudo mais formal da Geometria. Este conhecimento básico, que compreende conceitos geométricos, seus atributos e relações geométricas simples deveriam, em geral, ser adquiridos (desenvolvidos) através de experiências (vivências) geométricas antes do ensino secundário.

Se as crianças devem aprender estes fundamentos, então é importante que os professores da escola elementar estejam confortáveis com estas idéias e as maneiras de auxiliar/orientar as crianças neste processo. Mas as pesquisas (Hershkowitz e Vinner, 1984) têm mostrado que os professores possuem padrões de concepções errôneas similares aos dos alunos do segundo segmento (5a. à 8a. séries).

Após descrever alguns padrões de semelhança entre as concepções errôneas dos alunos e dos professores, nós discutiremos algumas atividades para professores que podem não apenas ajudá-los na aprendizagem de conceitos geométricos mas também fornecerão um modelo muito útil do ponto de vista de aplicação em sala de aula.

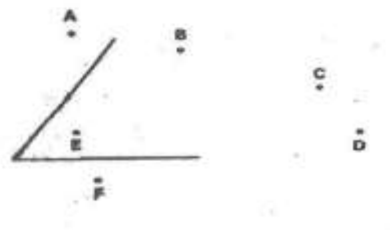
Exemplos de Imagens Conceituais Geométricas Apresentadas por Alunos e por Professores

A noção de imagem conceitual foi introduzida como a coleção de imagens mentais que um individuo possui de um determinado conceito (Vinner e Hershkowitz, 1980). A Imagem Conceitual de um indivíduo pode ser completa, parcial ou incorreta. Uma imagem conceitual parcial não possui todos os aspectos incluídos na definição do conceito. Uma imagem conceitual incorreta inclui ítens que não pertencem à definição do conceito.

Os exemplos que se seguem foram aplicados a 518 alunos (entre a 5a. e 8a. séries); 142 professores primários em estágio (PRÉ) e 25 professores primários em exercício (ST) em Israel. As respostas destes ítens nos permitiu comparar as imagens conceituais de alunos e de professores envolvendo certos conceitos geométricos e identificar alguns possíveis fatores que influenciam sua formação.

Exemplo 1: O Conceito de Ângulo

Se as crianças compreenderem o conceito de um ângulo, então elas perceberam que o desenho de um ângulo numa página de papel representa apenas parte daquele ângulo. Esta compreensão foi verificada através da questão apresentada na figura 1.



No seguinte desenho,
circule todos os pontos que
estão no interior do ângulo.

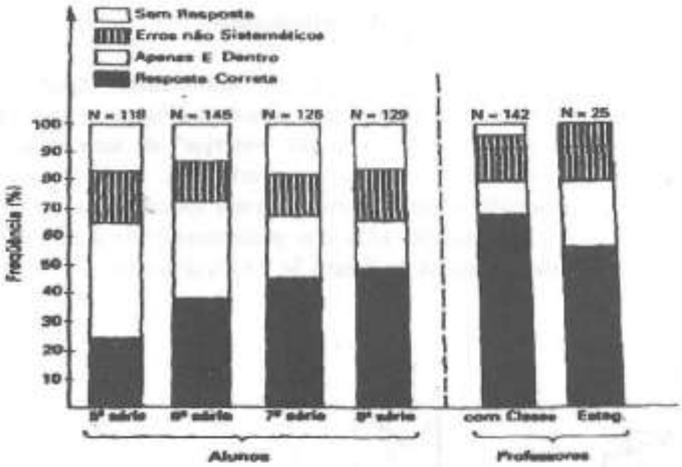


Figura 1. Tarefa sobre Concepção de Ângulo
e Resultados.

Os resultados sugerem menos da metade dos alunos concebem um ângulo como uma "entidade infinita". (de 25% na quinta série para 50% na oitava série). De modo semelhante, apenas um pouco mais da metade dos professores (68% dos professores em estágio e 55% dos professores em exercício) tinham o conceito correto de um ângulo.

Exemplos 2 e 3: Altura de um Triângulo e Diagonais de um Polígono

Em tarefas que requeriam o desenho de uma altura em diferentes tipos de triângulos ou todas as diagonais a partir de um vértice de um polígono concâvo, os professores (ST e PRE) tiveram um desempenho apenas um pouco melhor do que os alunos. Muitos professores, como muitos alunos, possuiam imagens conceituais incompletas ou imagens conceituais que incluiam elementos incorretos. Aqui temos dois exemplos:

a) Quando solicitamos que professores e alunos desenhassem a altura em relação ao lado *a* no triângulo obtusângulo (figura 2), alguns desenharam a mediana do lado *a* e outros desenharam o bisetor perpendicular de *a*. A incompletude dêsta imagem conceitual e sua aplicação incorreta foram expressas exatamente da mesma maneira pelos alunos.

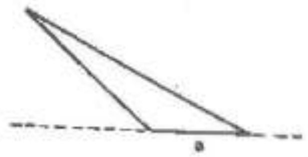


Figura 2. Triângulo Obtusângulo.

b) Professores, como também alunos, desenharam apenas as diagonais interiores do vértice A dos polígonos concâvos (Figura 3). No caso do quadrilátero concôavo (figura 3c), a noção "interior" de suas imagens conceituais de uma diagonal provocaram perturbações, confundindo o conceito. Rejeitando a possibilidade de uma diagonal exterior, ou eles não desenharam nada (40% dos alunos; 12% dos professores) ou desenharam algo parecido com a linha tracejada na figura 3c. (53% dos aluños; 49% dos professores).

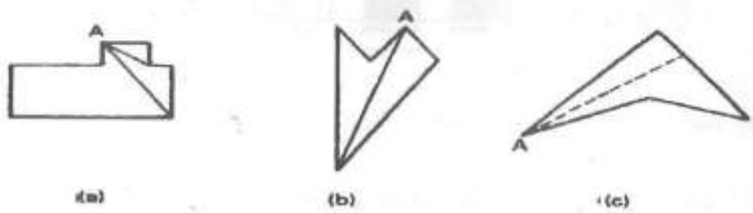


Figura 3. "Diagonais" de Polígonos Concâvos

Exemplo 4: O Impacto do Fator de Orientação (Inclinação)

O gráfico da Figura 4 mostra uma comparação entre a identificação de um triângulo retângulo em três orientações diferentes feitas por professores e por alunos. (Na atividade, eles tinham que identificar todos os triângulos retângulos numa determinada coleção de triângulos).

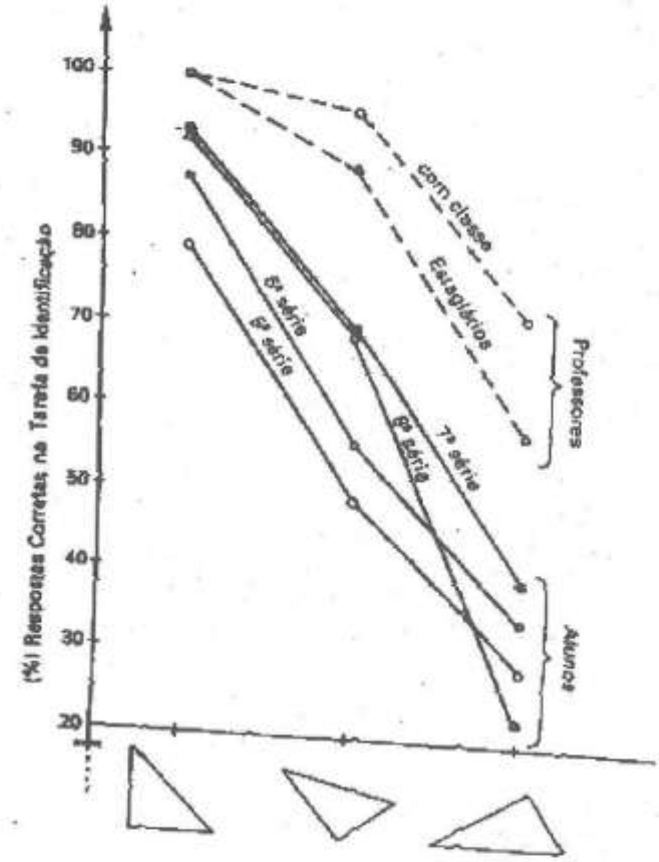


Figura 4. Desempenho de alunos e de professores na identificação de triângulos retângulos.

Embora, os professores tenham tido um desempenho bem melhor do que os alunos, como esperado, as suas respostas também exibem o mesmo padrão que os alunos. Desta forma, seus desempenhos foram melhores quando o ângulo reto estava orientado verticalmente (como desenhado normalmente), diminuiram quando o ângulo reto foi girado de 45^{o}, e diminuíram drasticamente quando o ângulo reto estava no "topo" da figura.

Exemplo 5: O "Bitrian"

O objetivo deste ítem era investigar o papel de uma definição verbal na formação do conceito relevante. Nós apresentamos a seguinte definição:

> Um "bitrian" é uma figura geométrica consistindo de dois triângulos que possuem um vértice em comum. (Um ponto está servindo como vértice para dois triângulos).

Metade de cada um de nossos grupos (alunos e professores) recebeu a tarefa de identificar bitrians entre outras figuras, e a outra metade dos grupos recebeu a tarefa de desenhar dois bitirans diferentes. As frequências das figuras construídas pelos professores (PRE e ST) e pelos alunos está indicada na figura 5. O padrão dos professores e dos alunos é muito semelhante em ambas as tarefas do bitrians (Hershkowitz e Vinner, 1984). Em ambas as tarefas, os professores e os alunos partiam do mesmo ponto: o conceito era novo para todos (professores e alunos). A definição verbal apresentada criou imagens conceituais muito semelhantes em ambas as populações. Isto é, a frequência relativa dos exemplos dados ao conceito mostram o mesmo padrão em ambas as populações. Em termos de validade matemática não há nada que distingua o bitrian (i) da figura 5 do bitrian (v), por exemplo, mas parece haver uma considerável diferença psicológica.

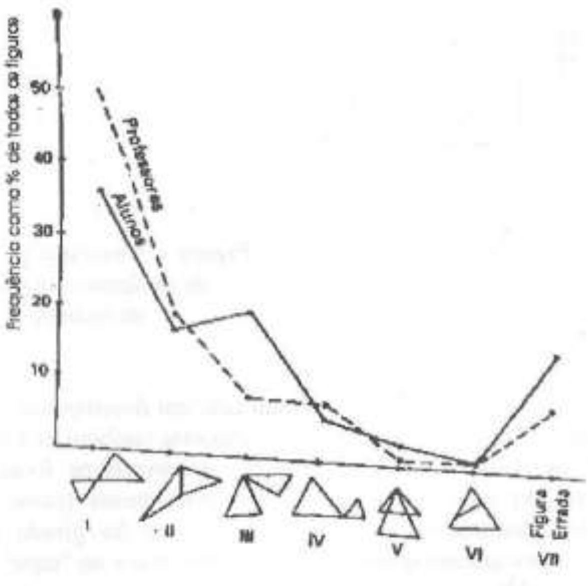


Figura 5. As frequências percentuais das figuras bitrians desenhadas pelos professores e pelos alunos.

Os exemplos anteriores, que são parte de um estudo bem mais amplo, fornecem evidências do baixo nível do conhecimento envolvendo as figuras geométricas basicas e seus atributos que os alunos possuem ao final da escola elementar e no início do segundo segmento. Os estudos baseados nas teorias de van-Hiele (Usiskin, 1982; Hoffer, 1983) têm mostrado que isto provoca muitas dificuldades em níveis mais altos da aprendizagem geométrica. Este baixo nível de conhecimento geométrico que também foi encontrado em professores da escola elementar (em formação e em exercício) em Israel levantam dúvidas sobre sua capacidade de modificar/transformar esta situação. Existe uma necessidade óbvia dos professores em formação e em exercício participarem de atividades envolvendo os conceitos geometricos básicos e seus atributos.

Um ponto ainda mais crítico é a similaridade evidenciada entre os professores e os alunos nos padrões de imagens conceituais incompletas ou incorretas. Isto nos fez levantar a conjectura de que os processos de formação de conceitos geométricos e os fatores que inibem esta formação atuam de forma semelhante nos indivíduos: alunos; professores estagiários e professores em exercício. Parece que existe uma necessidade de tornar o professor, e o futuro professor, familiares com estes processos e suas concepções errôneas associadas. Estas conclusões servem de base para as atividades apresentadas a seguir.

Atividades Para Professores

Ao planejarmos e desenvolvermos este trabalho para professores em serviço, nós adotamos o ponto de vista de que ensinar os professores da mesma forma que eles tinham sido anteriormente ensinados, seria ineficiente, aborrecido e insultante. Nos pareceu razoável supor que se os professores se tornassem explicitamente conscientes das imagens conceituais incompletas ou incorretas, eles estariam numa melhor posição para compreender as causas dos erros e concepções próprias dos alunos e desta forma, estariam melhor preparados para intervir adequadamente sobre a formação dos conceitos geométricos em suas salas de aula. Portanto, nós elaboramos atividades que permitissem aos professores adquirirem conceitos geométricos como também compreenderem os processos e dificuldades envolvidos na formação conceitual. Os objetivos explícitos das atividades eram:

1. melhorar as imagens conceituais dos professores sobre alguns conceitos geométricos;
2. desenvolver a compreensão do professor do:
   - papel da definição conceitual;
   - papel dos exemplos conceituais e contra-exemplos relevantes;

- papel dos atributos críticos e atributos não-críticos. (*)
3. modelar estratégias de ensino adequadas a sala de aula.
4. fornecer experiências na avaliação das dificuldades e das concepções errôneas dos alunos.

Nós incluímos duas amostras de atividades e as reações típicas de um grupo de 20 professores primários que mantinham um encontro de estudos semanal conosco, durante o período escolar.

Atividade 1: O "Trianquad"

Fase 1. Uma discussão não estruturada foi mantida sobre os modos comuns de ensino dos conceitos geométricos básicos, desde a pré-escola, com especial interesse sobre o papel da definição, dos exemplos conceituais, e os modos de representação dos exemplos na sala de aula e nos livros didáticos.

Fase 2. O exercício do "Trianquad" foi dado aos participantes (vide Figura 6) como uma possível estratégia de ensino (Herron et al., 1976). Esta tarefa apresenta a formação de um conceito através de sucessivas tentativas, usando um conjunto de exemplos e contra-exemplos. O participante gradualmente descobre que atributos um trianquad deve ter e quais não precisa ter (mas pode ter) e quais não pode ter. Ao final, é solicitado a definição de um trianquad.

Dezessete dos vinte professores redigiram uma definição que incluía os três atributos críticos do trianquad (uma figura geométrica consistindo de um quadrilátero e um triângulo com um vértice em comum). Os restantes três professores apresentaram erros em um dos atributos.

Quatro dos dezessete professores adicionaram informações desnecessárias ou incorretas baseadas em atributos não críticos de exemplos particulares. Aqui temos alguns exemplos:

* As figuras podem estar contidas uma na outra, sobreporem-se ou estarem separadas uma da outra. (Correta, mas desnecessária)

* O triângulo é menor do que o quadrilátero. (Incorreto)

* O trianquad é um polígono de 7 lados. (Incorreto)

Convém mencionar que a habilidade dos professores de verbalizar a definição era muito melhor do que os alunos de 6a. e de 8a. séries numa atividade semelhante.

(*)Atributos críticos (relevantes) são aqueles atributos que um exemplo deve ter de modo a ser um exemplo de determinado conceito. Atributos não-críticos (irrelevantes) são aqueles atributos que apenas exemplos particulares possuem.

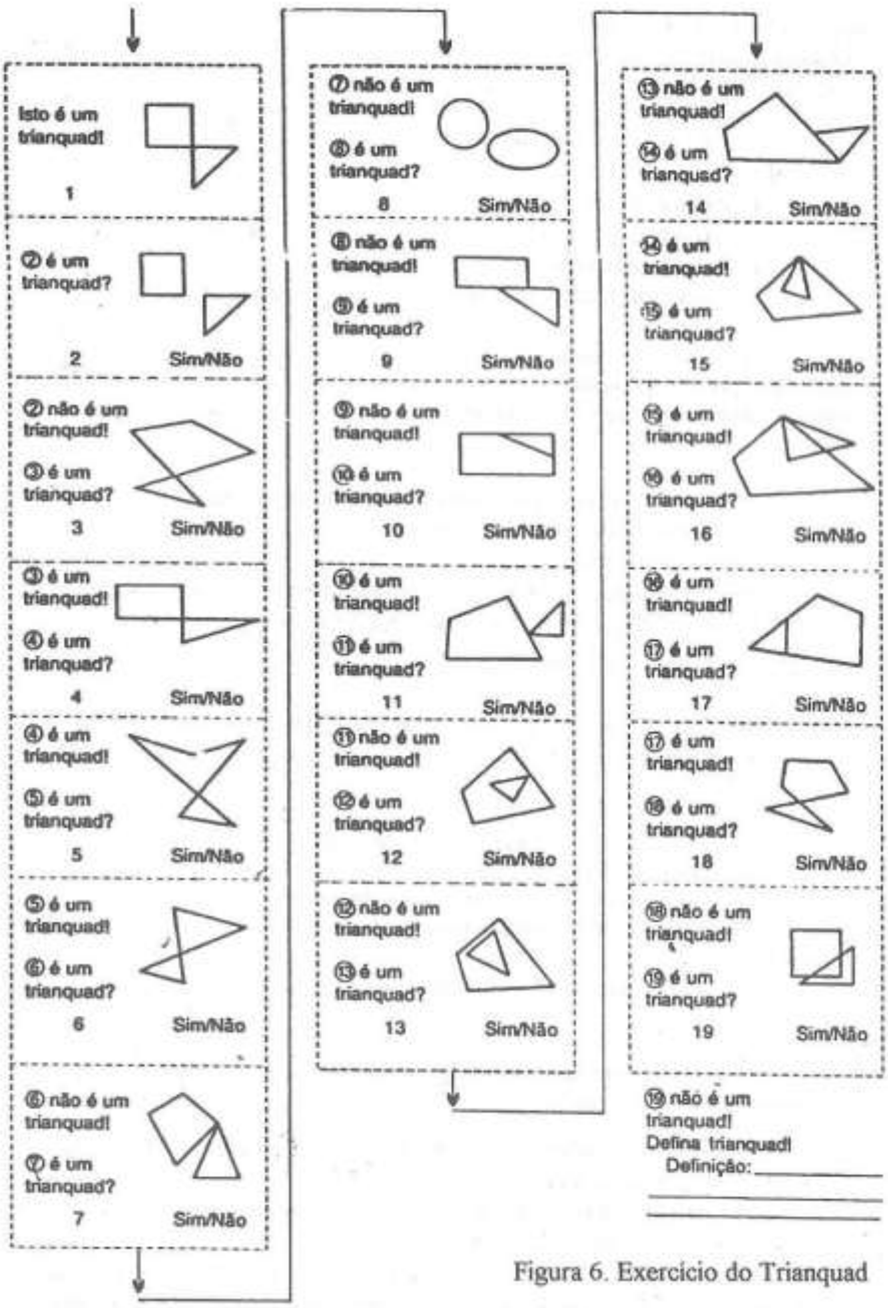


Figura 6. Exercício do Trianquad

(*)Atributos críticos (relevantes) são aqueles atributos que um exemplo deve ter de modo a ser um exemplo de determinado conceito. Atributos não-críticos (irrelevantes) são aqueles atributos que apenas exemplos particulares possuem.

Fase 3. Foi feita uma análise do exercício do trianquad através de uma discussão orientada. Transcrevemos a seguir alguns trechos desta discussão (PE denota o pesquisador e P os professores).

PE: Como o conceito de um trianquad é desenvolvido nesta atividade?

P: Através de exemplos.

P: Alguns deles eram erros - os exemplos não eram verdadeiros.

P: "Eles" indicavam os nossos erros.

P: Havia um feedback também ... (uma resposta imediata)...

A discussão continuou sobre as definições de um trianquad. Nós discutimos porque "polígonos de sete lados" era uma definição incorreta (nós não temos 7 lados no exemplo 10 e mesmo assim este é um trianquad), e assim por diante.

P: E sobre o vértice em comum; só pode ser apenas um?

PE: Qual é a opinião de vocês?

Vários Professores:

Sim. Não. Eu escrevi apenas um. Não. Eu escrevi pelo menos um...

P: "Eles" não nos deram um exemplo de um trianquad que tivesse mais de um vértice em comum, como este  , por exemplo, assim é apenas um.

P: Sim, mas por outro lado, "eles" não nos deram um exemplo com 2 vértices em comum, dizendo que não é um trianquad, portanto nós não sabemos.

Desta forma, a discussão caminhou naturalmente nos levando às características de uma definição conceitual. Nós concordamos que tais definições deveriam ser mínimas por um lado, mas sem ambiguidades de outro. Em outra parte da discussão, a questão das características dos exemplos e dos contra-exemplos foi levantada.

PE: Para que ítens (números) suas hipóteses estavam erradas e porquê?

P: Eu fiz uma hipótese errada para o número 5  porque ele não era um quadrilátero "regular".

P: Eu errei o número 7  porque eu tive a impressão de que os lados estavam em linha reta.

P: Os exemplos iam nos ensinando, mas por outro lado, nós tinhamos que ser muito cuidadosos.

P: O número 10  não estava claro. Eu não errei nele, mas foi dificil para eu aceita-lo porque eu via a figura apenas como um pentágono e um triângulo com um lado em comum.

Vemos que os professores perceberam o efeito perturbador que alguns atributos dos exemplos podem provocar (tais como os atributos não críticos na figura número 7), e os fatores perceptivos (como no número 10) que inibem nossa habilidade de reconhe-cer alguns exemplos do conceito.

Fase 4. Nós usamos o exercício do trianquad como um modelo de aquisição/construção de um conceito. Nós escolhemos conceitos cujas imagens não estavam bem desen-volvidas para as populações de alunos e de professores. Um exemplo involvia desenhar a altura em relação a um lado num determinado triângulo (veja Figura 7).

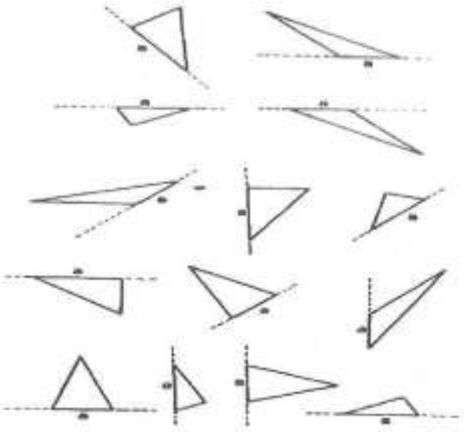


Figura 7. Os triangulos apresentados na tarefa de altura de triângulos.

No início, o pesquisador e os professores analisaram juntos o conceito de altura de um triângulo, e então o pesquisador apresentou alguns erros típicos dos alunos e discutiu estes erros com os professores. A figura 8 mostra a resposta de um aluno.

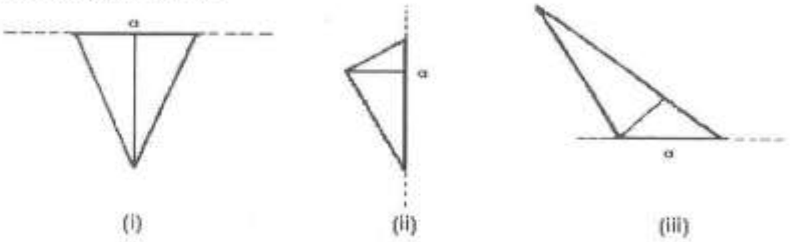


Figura 8. "Alturas" desenhadas pelo mesmo aluno.

PE: O que vocês acham deste aluno? O que ele desenhou?

P: Ele acertou no triângulo isósceles (número i) e no segundo (número ii).

P: No triângulo obtusângulo (número iii) ele decidiu que o vértice estava em

baixo.

P: Assim era mais fácil para ele.

P: Aqui a altura solicitada ought exige a extensão do lado *a*. A necessidade de uma altura externa não está clara para o aluno.

Como trabalho de casa, solicitamos que os professores criassem uma atividade que desenvolvesse o conceito de altura, usando o exercício do trianquad como um modelo e os erros do aluno como base para os contra-exemplos relevantes. Uma análise dos trabalhos de casa mostrou que a maioria deles contruiu um conjunto equilibrado de exemplos e contra-exemplos (os erros comuns) numa ordem ólgica razoável.

Um mês após esta atividade, solicitamos que os professores desenhassem as alturas do mesmo conjunto de triângulos (Figura 7). Desta vez, todos os vinte responderam corretamente a todos os tipos de triângulos enquanto antes apenas 8 tinham acertado corretamente todas as alturas dos triângulos.

Atividade 2: Quadriláteros

Fase 1.

A figura 9 foi apresentada e os participantes tiveram que criar três definições diferentes para os quadriláteros nos conjuntos A, B e C. Observe que cada um dos quadriláteros é representativo de um número infinito de tais figuras incluídas em cada um dos conjuntos A, B e C. Como usual, o diagrama de Venn é utilizado para mostrar a inclusão entre os conjuntos. (isto é: $A \subseteq B \subseteq C$).

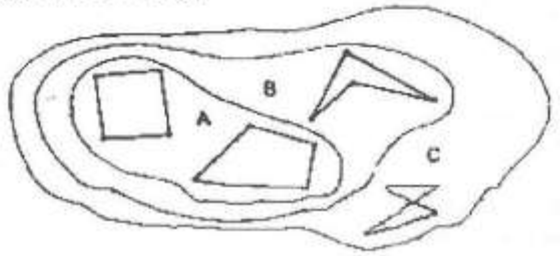


Figura 9. Conjuntos de Quadriláteros.

Parte da discussão que envolveu a verbalização da definição dos quadriláteros incluídos apenas no conjunto A foi a seguinte:

P: "Quadriláteros" com lados paralelos....

PE: ? ? ? ?

P: Apenas por acaso...

PE: ? ? ? ?

P: Uma figura fechada com 4 lados.

PE: E a figura do conjunto B não é uma figura fechada com 4 lados?

Professores: Sim! Ela possui quatro lados.

PE: Mas ela não está incluída no conjunto A.

Professores: Côncavos e convexos...

P: Quatro lados e quatro ângulos...

P: Um ângulo menor do que 180^{o}.

P: Polígonos de 4 lados sem nenhum ângulo agudo.

PE: ? ? ? ? ?

Mesmo professor (corrigindo a si mesmo): ... que não tenham nenhum ângulo maior do que 180^{o}.

P: E sobre esta figura? Isto é um polígono?

PE: O que é um polígono?

P: Uma figura fechada cujos lados são segmentos retilíneos.

PE: Então, isto é um polígono?

Professores: Sim!

P: Mas uma figura geométrica deve ter uma área, e qual é a área desta figura?

PE: ??????

Os participantes concluíram que se esta figura é um polígono ou não depende da definição que adotarmos.

P: Para nos assegurarmos devemos adicionar à definição de A que lados opostos (sem extensões) não devem se interceptar.

A discussão produziu as seguintes três definições:

Conjunto A: Polígonos de 4 lados cujos ângulos internos são menores do que 180^{o} e cujos lados opostos não se interceptam.
Conjunto B: Polígonos de 4 lados cujos lados opostos não se interceptam.
Conjunto C: Polígonos de 4 lados (lados opostos podem se interceptar).

No processo de verbalização das definições, os participantes explicitamente destacaram o seguinte:

* A interrelação de inclusão entre os conjuntos.
* Quando um conjunto se torna maior, os requisitos necessários tornam-se menores (são menos restritivos; possuem menos atributos críticos)
* Existe alguma arbitrariedade nas definições, mas do momento em que uma definição é adotada, ela se torna o critério final para decidir se um exemplo pertence ou não pertence ao conceito.

Fase 2. Solicitamos que os participantes fizessem uma "análise conceitual" do conceito de quadrilátero de acordo com as três definições, partindo com o conjunto A. Eles procuraram exemplos adicionais, listaram todos os atributos dos quadriláteros convexos, e neste processo estabeleceram uma distinção entre os atributos críticos e os não críticos.

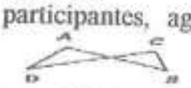
A busca de atributos críticos dos conjuntos B e C criou uma oportunidade para os professores superarem algumas de suas próprias concepções errôneas. Por exemplo, um dos atributos que foi sugerido para os quadriláteros do conjunto A foi de que cada um tinha duas diagonais. Enquanto examinava este atributo no conjunto B, um dos participantes exclamou: "Alguns quadriláteros aqui só possuem uma diagonal!!". Sua imagem conceitual (como a de muitos outros participantes) incluia apenas diagonais que fossem internas a figura. A discussão sobre diagonais, e uma definição seguida de exemplos e contra-exemplos, permitiu que o professor e seus colegas descobrissem por si mesmos onde estavam as diagonais das figuras do conjunto C.

Outra surpresa ocorreu quando os participantes discutiram a soma dos ângulos internos dos quadriláteros. Esta soma era facilmente visível ser 360^{o} para os conjuntos A e B. Mas e quanto ao conjunto C? Não foi fácil aceitar que aqui a soma é menor do que 360^{o} . Muitos professores queriam incluir o par de ângulos opostos. Isto conduziu a uma cuidadosa re-escrita da definição dada para o conjunto C, que assumiu uma forma semelhante a dada por Galbraith (1981):

> Um quadrilátero é o que você obtém se você tomar quatro pontos A, B, C, D num plano e uní-los com segmentos de reta AB, BC, CD, DA!

Ficou claro, então, quais são os ângulos internos nesta figura.

Neste ponto, uma discussão inevitável se iniciou se era ou não era aconselhável considerar estas figuras como quadriláteros no ensino da Geometria na escola elementar. Os participantes, agora, apreciaram porque muitos livros didáticos elementares



adotam a definiçãodo conjunto B como "a definição" dos quadriláteros.

Fase 3. Os participantes foram informados sobre alguns resultados de pesquisas sobre este tópico (Hershkowitz e Vinner, 1983). Isto incluiu uma descrição de como as imagens conceituais dos alunos sobre quadriláteros mudam de acordo com a série escolar, dos simples quadrados a todos os quadriláteros convexos, e então, também aos quadriláteros côncavos.

> Nestas pesquisas, solicitou-se aos alunos que explicassem porque eles concluiram que uma determinada figura não era um quadrilátero. Algumas destas explicações foram apresentadas aos professores e analisadas numa discussão em grupo.
>
> Galia (5a. série): Esta figura não parece um quadrilátero.
>
> 
>
> Johnny (6a. série): Isto não é um quadrilátero porque são dois triângulos combinados.
>
> 
>
> Miriam (7a. série): Isto não é um quadrilátero porque possui seis lados e seis ângulos.
>
> 
>
> Alex (6a. série): Isto não é um quadrilátero porque não possui quatro lados iguais e quatro ângulos iguais.
>
> 

Os professores se detiveram aos diferentes níveis de raciocínio. Galia e Johnny aparentemente julgaram as figuras pela sua aparência global (nível 0 de Van Hiele), enquanto Miriam e Alex relacionaram os atributos da figura (nível 1 de Van Hiele). Miriam relacionou um atributo crítico do conceito de quadrilátero (quatro lados, quatro ângulos). Ela rejeitou a figura como um exemplo do conceito porque ela não pode encontrar estes atributos. Alex relacionou atributos não críticos (os atributos do quadrado de quatro lados iguais e quatro ângulos iguais), como se eles fossem os atributos críticos dos quadriláteros (isto é, como se eles fossem necessários a todos os exemplos do conceito de quadrilátero).

Esta discussão foi seguida por um exercício contendo 24 explicações diferentes de alunos. Os participantes, trabalhando em duplas, deveriam avaliar e analisar as explicações. Neste processo, houve clara evidência do crescimento da apreciação dos professores sobre o papel dos diferentes atributos na formação da imagem conceitual e, ainda mais, como alguns atributos não criticos dominantes conduzem a várias concepções errôneas (vide explicação de Alex).

Estas duas atividades exemplificam um modelo para treinamento de professores em exercício composto por importantes componentes. Existe, é claro, o componente do conhecimento geométrico no sentido de que após estas atividades a concepção dos professores dos conceitos discutidos está muito melhorada. Mas como isto é realizado num nível didático avançado, os professores são levados a considerar metaconceitos como definição, exemplos e contra-exemplos como também a se conscientizarem e analizarem as reações de seus alunos. Nós acreditamos que este tipo de atividade possa contribuir para romper o ciclo vicioso de concepções errôneas tanto dos professores quanto dos alunos em Geometria.

REFERÊNCIAS

Galbraith, P. L. "Aspects of Proving: A clinical Investigation of Process". Educational Studies in Mathematics 12 (fevereiro de 1981): 1-28.

Ferron, Dudley J., E. Kundayo Agebebi, Larry Cattrell e Thomas W. Sills. "Concept Formation as a Function of Instructional Procedure". Science Education 60 (julho-setembro de 1976): 375-88.

Hershkowitz, Rina e Shlomo vinner. "The Role of Critical and Non critical Attributes in the Concept Image of Geometrical Concepts". In Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, ed. Rina Hershokowitz, p. 223-28. Rehovot, Israel: Weizmann Institute of Science, 1983.

______. "Children's Concepts in Elementary Geometry: A Reflection of Teachers' Concepts? "In Proceedings of the Eighth International conference for the Psychology of Mathematics Education, ed. Beth Southwell, Roger Eyland, Martin Cooper, John Conroy e Kevin Collis, p. 63-69. Darlinghurst, Austrália: Mathematical Association of New South Wales, 1984.

Hoffer, Alan. "Van Hiele - Based Research". In Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, ed. Richard Lesh e Marsha Landau, p. 205-27. Nova Iorque: Academic Press, 1983.

Usiskin, Zalman. Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. Department of Education, University of Chicago. (ERIC Document Reproduction Service nº SE 038813), 1982.

Vinner, Shlomo e Rina Hershkowitz. "Concept Images and Common Cognitive Paths in the Development of Some Simple Geometrical concepts". In proceedings of the fourth International conference for the Psychology of Mathematics Education, ed. Robert Karplus, p. 177-84. Berkeley: Lawrence Hall of Science, University of California, 1980.

Artigo publicado em Learning and Teaching Geometry, K-12 - NCTM 1987 Yearbook

LOCI e PENSAMENTO VISUAL

Rina Hershkowitz, Alex Friedlander (The Weizmann Institute of Science)
Tommy Dreyfus (Center for Technological Education)

LOCI é um software desenvolvido para fornecer aos estudantes a oportunidade de construir uma imagem conceitual visual, geométrica e qualitativa da noção de lugar geométrico - *locus*. As atividades pedagógicas foram elaboradas para levar os alunos de uma familiaridade inicial com as caracteristicas/propriedades do ambiente até o estágio onde eles sejam capazes de definir e investigar seus próprios *loci*.
Um dos dez ítens de um questionário administrado após a aprendizagem com o LOCI foi analisada. Este ítem requer a identificação desenhos de lugares geométricos - loci - que satisfazem uma determinada condição. As respostas dos alunos foram dadas em diferentes níveis de pensamento visual. Os modos de raciocínio mais frequentemente empre-gados foram categorizados como local e global. Alguns alunos raciocinaram sistematicamente em todos ou na maioria dos casos, mas outros alunos modificavam seu raciocínio caso a caso.

Fundamentação

Nos textos didáticos típicos do segundo grau, o conceito de lugar geométrico é definido formalmente, explicado e exemplificado em algumas poucas linhas. Então, os métodos computacionais de encontrar as equações algébricas de uma classe bastante limitada de lugares geométricos são discutidos extensivamente. Claramente, os autores destes textos didáticos esperam que os alunos se tornem especialistas nestes métodos computacionais algébricos, e os usem da mesma forma que os professores . Nenhuma atenção parece ser dedicada aos aspectos intuitivos, qualitativos e geométricos, que estão no âmago da idéia de um lugar geométrico; toda a essência do conceito de um lugar geométrico permanece obscurecida atrás das computações. O processo requisitado do aluno consiste na análise de uma situação que geralmente é apresentada verbalmente, traduzi-la para uma linguagem algébrica e então executar computações de acordo com regras formalizadas. Os processos de intuir, visualizar, explorar, conjecturar, definir, construir e dinamicamente transformar, que são tão importantes na matemática não encontram seu lugar neste tipo de atividade.

O Software

Com o objetivo de fornecer aos alunos a oportunidade de desenvolver um imagem conceitual visual, geométrica e qualitativa da noção de lugar geométrico, nós desenvolvemos um ambiente de aprendizagem computadorizado - um micromundo - chamado LOCI. Quando estiver trabalhando neste ambiente, o aluno estará integralmente no controle de sua própria atividade. Ele poderá escolher quatro tipos de ação:

- Definir um lugar geométrico (locus);
- Construir pontos deste locus definido;
- Fazer conjecturas sobre sua forma; ou
- Transformar o locus modificando os dados em sua definição.

Estas ações serão, então, brevemente descritas.

Definir um lugar geométrico (locus):

O software solicita que o usuário fixe dois elementos geométricos sobre a tela. Estes elementos podem ser dois pontos ou duas retas ou um ponto e uma reta. Então, o software solicita que o usuário decida se o lugar geométrico - locus - deverá ser determinado pela soma, pela diferença ou pela razão entre as distâncias destes dois elementos. Para dar um exemplo concreto, poderíamos escolher o locus em que todos os pontos cuja soma de suas distâncias a determinado ponto e uma determinada reta seja constante. O software também solicita que o usuário também decida qual o valor desta soma constante. Então, os dois elementos, o valor da distância entre eles, como também uma formulação verbal da definição surge sobre a tela (Fig 1). Para nossa surpresa, nós descobrimos que este conjunto básico gera 64 casos diferentes, dependendo não apenas da escolha dos elementos e da relação entre as distâncias (soma, diferença ou razão) mas também da posição relativa dos elementos e se a o valor da escolha é menor, igual ou maior do que a distância entre os elementos. Em outras palavras, uma variedade de situações bem limitada mas extremamente rica a ser investigada foi criada.

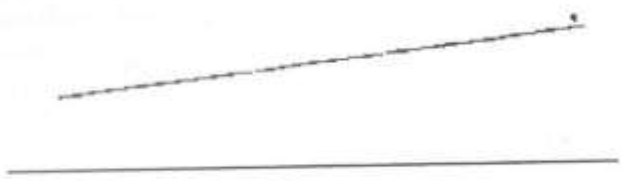


figura 1

Find all points whose distances from
the point A and the line b have a fixed sum of 32 units.

The distance between b and A is 29 units.

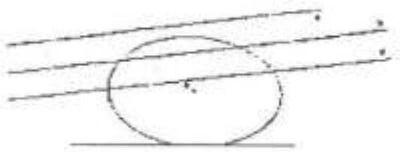


figura 2

Find all points whose distances from
the point A and the line b have a fixed sum of 32 units.
The distance between b and A is 29 units.

Construir pontos do locus definido

Uma vez que um lugar geométrico tenha sido definido pelas condições geométricas que seus pontos satisfazem, o aluno pode tentar construir pontos que pertençam ao lugar geométrico. Para realizar este objetivo, ele(a) pode desenhar circunferências (de um determinado raio ao redor de um ponto escolhido) e paralelas (numa distância escolhida a determinada reta), e marcar os pontos de interseção entre estas circunferências e as paralelas. Por exemplo, na figura 1, poderíamos interceptar a circunferência centrada no ponto A com raio de 50 unidades com as paralelas a reta b, distantes 32 unidades da mesma (Figura 2). Finalmente, é possível apagar as construções auxiliares, deixando apenas os pontos de interseção sobre a tela. Este procedimento permite que o aluno verifique num estágio mais avançado se estes pontos pertencem ou não ao locus definido.

Fazer conjecturas

Com base nas construções executadas e no raciocínio geométrico qualitativo, o aluno poderá rapidamente ser capaz de aventurar-se numa estimativa sobre a forma completa do lugar geométrico. O ambiente de aprendizagem propõe uma lista de 22 escolhas possíveis para o lugar geométrico, tais como: um ponto; uma elipse; vazio; segmentos de parábola; e outros. Se a conjectura estiver correta, o computador irá desenhar o lugar geométrico sobre a tela como também descrevê-lo verbalmente. Em nosso exemplo, o lugar geométrico consiste de dois segmentos de parábola (Figura 3). Em qualquer momento, o usuário pode escolher construir mais pontos para fazer novas conjecturas. Se um número suficiente de construções já tiver sido realizado - 6 construções, no mínimo - também é possível obter o lugar geométrico sobre a tela sem ser necessário fazer uma conjectura correta sobre sua forma.

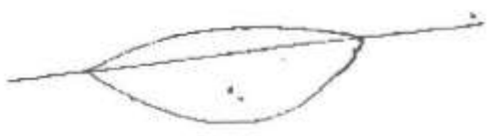


figura 3

The locus is this partial parabolas.

figura 4

The locus is a segment.

Transformar o locus

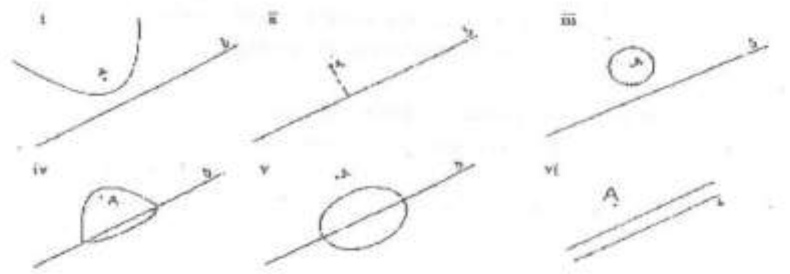
Após o lugar geométrico ter sido obtido sobre a tela, é possivel transformá-lo dinamicamente modificando ou a posição dos dois elementos básicos ou o valor escolhido para a soma, diferença ou razão das distâncias. Em nosso exemplo, poderíamos, por exemplo, diminuir o valor da soma das distâncias ao ponto A e a reta b até que se igualasse a distância entre estes dois elementos; neste momento, o lugar geométrico se degenera transformando-se num segmento de reta (Figura 4). Se a soma for reduzida mais ainda, o lugar geométrico torna-se vazio, e o computador irá conformar este fato.

A Experiência

O ambiente de aprendizagem LOCI têm sido utilizado com dois grupos experimentais: com uma turma inteira (do segundo ano secundário) e com um pequeno grupo de alunos(do primeiro ano secundário). Em ambos os grupos, os alunos foram orientados através de Fichas de Trabalho determinadas e durante cerca de 4 períodos de aulas. Durante estas atividades, os alunos foram levados de uma familiarização inicial com as caracteristicas do ambiente até o estágio onde eles eram capazes de definir e de investigar seus próprios lugares geométricos. Os alunos construiram pontos discretos de acordo com determinadas definições de lugares geométricos, utilizaram sua intuição para visualizar suas formas correspondentes e exploraram as transformações provocadas pela mudança das constantes envolvidas na definição original. Durante as atividades, o professor atuou como um consultor e na fase de síntese e conclusões, ele conduzia uma discussão com o grupo ou com a turma.

Finalmente, um questionário doi administrado para a classe experimental para verificar a compreensão dos alunos sobre os conceitos relacionados ao lugar geométrico. Para ilustrar os resultados obtidos, analizaremos as respostas de alguns alunos sobre os seguintes ítens deste questionário:

> *Dados uma reta b e um ponto A. Decida para cada um dos seguintes desenhos se ele é (ou não é) o lugar geométrico dos pontos com a soma das distâncias ao ponto A e a reta b fixa. Explique sua resposta.*



O desenho iv é o lugar geométrico com a soma fixa maior do que a distância entre o ponto A e a reta b, e o desenho ii é o lugar geométrico quando a soma é igual a distância entre A e b. Todos os outros desenhos não satisfazem a esta condição.

A tabela 1 apresenta alguns dos dados obtidos pelas respostas dos alunos. Como podemos ver, a maioria dos alunos foram capazes de indicar os desenhos corretos da definição apresentada.

Tabela 1. Respostas dos alunos ao ítem analisado.

		Corretude das respostas *				Tipo de raciocínio **			
desenho	resposta correta	correta	parcial-mente correta	incor-reta	sem justifi-cativas	parece que é	local	global	outros
i	91	65	22	9	4	--	32	46	21
ii	87	4	70	22	4	--	--	71	29
iii	100	65	9	13	13	--	18	68	14
iv	65	4	22	35	39	13	30	20	27
v	91	35	22	22	22	4	42	31	23
vi	100	61	13	13	13	4	17	71	16

* percentagem do número total de alunos; ** percentagem do número total de justificativas.

Tipos de Raciocínio

Na maioria dos casos, algum tipo de justificativa foi apresentada, mas não necessáriamente uma justificativa correta. As percentagens dos argumentos corretos foi acima de 60% sempre que o desenho não correspondia a uma determinada definição (exceto no caso da elipse).

A quantidade de argumentos corretos caiu quando o desenho era o lugar geométrico solicitado. Aqui, até mesmo os alunos que apresentaram respostas corretas falharam em considerar ambos os aspectos do lugar geométrico:

1. Todos os pontos do desenho satisfazem as condições definidas, e
2. Apenas estes pontos satisfazem as condições.

A maioria dos alunos relatou apenas o primeiro aspecto. Por exemplo, Amir disse no caso ii que o segmento de reta é o lugar geométrico definido e explicou:

> *"A soma das distâncias de cada ponto [sobre o segmento] à reta [b] e ao ponto [A] é igual a distância entre a reta [b] e o ponto [A]."*

Apenas Yiftah considerou também o segundo aspecto. Ele escreveu no caso ii a seguinte justificativa:

> *"Não há nenhum outro ponto [além daqueles sobre o segmento] cuja soma das distância [a reta b e ao ponto A] seja igual ao comprimento do segmento."*

Estas respostas podem ser o resultado do fato de que o software LOCI enfatiza principalmente o primeiro aspecto do conceito de lugar geométrico.

A maioria dos argumentos estava baseada em diferentes níveis de pensamento visual:

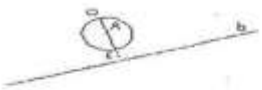
a. Muito poucos alunos usaram argumentos do tipo: "Porque é assim que parece para mim". Isto pode ser considerado um raciocínio no primeiro nível de van Hiele (julgamento do desenho pela sua aparência como um todo e não pela análise de suas propriedades.).

b. Mais de 70% das justificativas (exceto no caso iv), empregaram pensa-mento analítico-visual. Este tipo de raciocínio pode ser subdividido em local e global.

Raciocínio Local

Este tipo de raciocínio está baseado na análise de um ou de um número limitado de pontos do desenho.

Este raciocínio é apropriado sempre que o desenho não é um exemplo do lugar geométrico definido, pois então estes pontos podem servir como contra-exemplos da definição. Por exemplo, Tal explicou no caso ii:



A circunferência A não é o lugar geométrico, pois as distâncias do ponto E e O ao ponto A são r, mas a distância do ponto O a reta b é maior do que a distância do ponto E a reta b.

Um raciocínio local semelhante foi apresentado por Yiftah também, mas ele expressou isto numa linguagem simbólica:

AD + DB = AC + CB

Ambos os alunos escolheram estes dois pontos sobre o desenho e fizeram uma análise baseada em considerações visuais, para mostrar que estes pontos não satisfazem as condições necessárias do lugar geométrico definido.

Raciocínio Global

Muitos alunos usaram considerações globais nas seguintes três maneiras:

* Um ou vários pontos sobre o lugar geométrico foram utilizados como representantes de todos os pontos do lugar geométrico. Podemos considerar como exemplos as justificativas de Amir apresentadas anteriormente (onde o desenho representa o lugar geométrico) ou a seguinte justificativa de Dudu para o caso v (onde o desenho não representa o lugar geométrico definido):

> *"Cada par de pontos simétricos está a mesma distância da reta b, mas a diferentes distâncias do ponto A. Portanto, a soma não será fixa."*

Este tipo de raciocínio reflete a compreensão do aluno sobre o conceito de lugar geométrico como o conjunto de todos os pontos com uma determinada propriedade.

* Outros alunos empregaram raciocínio global considerando o desenho como um continuum de pontos. Amir, por exemplo, escreveu para o caso i:

> *"Não! [a parábola não é o lugar geométrico] porque conforme nós caminhamos pela parábola, as distâncias tanto ao ponto A quanto a reta b são aumentadas."*

Hilah explicou no caso iii (a circunferência):

> *"... porque as distâncias ao ponto A são sempre as mesmas e as distâncias a reta b estão mudando."*

* Alguns alunos relacionaram globalmente a diferentes partes do desenho. Tal apresentou a seguinte justificativa no caso v (eleipse):

> *"As distâncias dos pontos do arco inferior a reta b é igual as distâncias dos pontos do arco superior a reta b. Mas as distâncias dos pontos do arco inferior de A são maiores do que as distâncias dos pontos sobre o arco superior ao ponto A."*

Todos os raciocínios apresentados acima mostram algum nível de pensamento visual e exceto o primeiro nível, todos, exceto o primeiro, também são analíticos.

Resultados Adicionais

Finalmente, gostaríamos de apresentar algumas descobertas adicionais da pesquisa.

> * Quase todos os raciocínios globais que foram apresentados estavam corretos ou pelo menos, parcialmente corretos.
> * Alguns alunos empregaram raciocínios tanto globais e locais simultaneamente no mesmo caso.
> * Outros raciocínios (incluídos na tabela 1 como "outros"), eram principalmente alguma repetição verbal das condições definidas. Alguns poucos alunos basearam suas justificativas em "visto casos semelhentes"durante seu trabalho com o software.
> * Alguns alunos raciocinaram sistematicamente em todos ou na maioria dos casos, mas outros alunos modificaram seu raciocínio de caso para caso. Por exemplo, Yiftah usou justificativas globais nos casos i, ii, v e vi; justificativa local no caso ii, e uma justificativa no primeiro nível de van Hiele no caso iv.

Nos parece que o nível da situação problema afeta o nível de raciocínio - o último cai quando as situações se tornam mais complexas.

Para maiores informações sobre a aplicação deste software procurar a Prof.ª Janete B. Frant na coordenação do Mestrado em Educação Matemática na Universidade Santa Úrsula.

ALGUNS DADOS SOBRE RINA HERSHKOWITZ

- Nasceu em Israel em 28 de maio de 1835.
- É casada e tem quatro filhos.
- Fez seus estudos em Israel onde em 1964 obteve o diploma de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, Física e Educação pela Universidade Hebraica de Jerusalém.
- Em 1979 obteve o grau de Mestre (M.A.) na Universidade de Tel Aviv, Israel.
- Em 1990 obteve o grau de Doutora (Ph.D.) na Universidade Hebraica de Jerusalém, Israel.
- De 1960 à 1967 foi professora de Matemática e Física em escolas de 1º e 2º grau em Israel.
- De 1967 à 1969 trabalhou preparando os programas de Matemática para 6ª e 8ª séries do 1º grau na Televisão Educativa de Israel.
- Desde 1967 é membro do grupo de Matemática do Science Teaching Department do Weizman Institute of Science, Israel, com o encargo de escrever livros-texto e guias para professores, realizar cursos de educação continuada para professores em exercício, assim como atividades de pesquisa e avaliação e supervisão as atividades dos outros membros do grupo.
- Desde 1976 participa e coordena programas, congressos e encontros sobre Educação Matemática (ICME e ICMI) e Psicologia da Educação Matemática (PME) tendo apresentado mais de 25 trabalhos em reuniões internacionais em França, USA, Austrália, Canadá, Índia, África do Sul e outros.

Seu Campo de trabalho, nos últimos anos, é centrado no Ensino da Geometria, mas se ocupa também com Educação Matemática, fazendo parte do corpo editorial do Journal For Research in Mathematic Education Gognition and Instruction.

- Em 1971 recebeu o Prêmio Shalit (Israel).
- Em 1972 recebeu a ajuda financeira para o Fundo Educacional Amos de Shalit.

- É membro de entidade de Pesquisa em Educação Matemática de Israel do PME (Grupo Internacional para a Psicologia da Educação Matemática) desde 1979.
- Publicou mais de 30 artigos em revistas e em anais de congressos, só em colaboração com outros especialistas, sobre Educação Matemática, Geometria, Cálculo, Álgebra.

Salientamos:

- Some Cognitive Factores as Causes of Mistakes in Addition of Fractions (com Vinner S. e Bruckheimer M.)

- The Role of Critical and Non-Critical Atributes in The Concept Image of Geometrical Concepts (Com Vinner S.)

- Algorithm Leading to absurdity, leading to Conflict, leading to Algorithm Review (com Markovitz Z. e Bruckeimer M.)

- Using Microcomputer to Enhance the Teaching and learning of secondary Mathematicos (com Zehai N.)

- Incipient "Algebraic" Thinking in Pre-Algebra Students (com Friediander A. e Arcavi A.)

- Publicou uma dezena de capítulos de livros, só ou em colaboração com outros especialistas ,sempre sobre os assuntos de sua especialização.
- Publicou uma mais de 30 artigos em Hebraico e em Ingles resultados de pesquisas.
- Foi Editora dos anais do 7ª PME em 1983.
- Foi autora de uma série de 5 livros-textos para estudantes de final do 1º grau em Israel e os relativos guias para o professor de 1969 à 1974.
- Foi co-autora de 4 livros texto para alunos de 1º grau em Israel de 1969 à 1981.
- Foi co-autora de 6 unidades de programas de recuperação de alunos socialmente carentes e 2 guias respectivos para docentes, em Israel de 1977 à 1979.
- Foi consultora de uma série de livros sobre Projetos de Matemática Secundária (Singapura) de 1985 à 1988.
- É consultora do 2 séries de livros para cursos de final do 1º grau em Israel desde 1979.
- Foi consultora de uma série de livros guia para Professores de 1980 à 1983.
- Foi consultora de 20 unidades do Programa Agan para Educação Visual de 1984 à 1991.

- É consultora de alguns programas de cursos desenvolvidos pelos membros do Grupo de Matemática do Departamento de Ensino das Ciências do Instituto Weizman de Israel.
- Foi professora -convidada em 1993 no Curso de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, Brasil.