A MATEMÁTICA E A GEOMETRIA NAS LEIS DE KEPLER E DA GRAVIDADE.

Mathematics and Geometry in Kepler's law and in the garvity law

Renato J.C. Valladares[1]

Instituto de Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula – IEM/USU.

Este artigo foi transcrito da Revista de Ciência e Tecnologia números 11/12, volume 6 de junho de 1998.

PALAVRAS-CHAVE: - Formalização matemática; Geometria; Leis de Kepler; Gravitação.

KEYWORDS: Mathematical formalization; Geometry; Kepler's laws; Gravitation.

RESUMO

São dois os objetivos principais deste trabalho, ambos voltados para questões relativas ao ensino/aprendizagem, onde se pretende criar uma forte motivação matemática apresentando temas de interesse e importância indiscutíveis, cuja compreensão é viabilizada por esta ciência.

O primeiro objetivo é mostrar o grande alcance cultural da formalização matemática, usando como exemplo o enorme desenvolvimento da Física, Astronomia, Matemática e suas infinitas aplicações, ocorrido a partir do século XVI e que se estende até hoje.

O segundo objetivo dá seqüência a um painel apresentado na 3ª Reunião Especial da SBPC, realizada em Florianópolis, em maio

[1] Renato J.C. Valladares, Professor do Mestrado em Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula - MEM/USU - R. Fernado Ferrari 75 Prédio VI s/ 1.205, Botafogo, Rio de Janeiro R.J. Cep: 22.231 - 040. Tel: (021)551-5542.

de 96. Neste é dada uma interpretação geométrica da gravidade que pode facilitar em muito, sua compreensão por parte dos estudantes.

Para alcançar estes objetivos, buscou-se o exemplo de fatos históricos bem conhecidos, onde fica claro que é necessário dispor do máximo de conhecimentos sobre uma dada questão, para que se possa dar a ela, a melhor solução possível.

Evidenciou-se, assim, a importância do estudo das diversas ciências e, em especial, da matemática, para o equacionamento de um problema real.

ABSTRACT

This paper has two main objectives, both of them related with the teaching/learning process, where we intend to build up strong motivation concerning Mathematics, presenting topics of unequivocal interest and importance, whose comprehension is made feasible through this science.

The first objective is to show the enormous cultural achievement of the Mathematical formalization, taking as an example the increasing development of Astronomy, Mathematics, Physics and their endless applicabilities, which started to occur in the 16th century and has been occurring until today.

The second objective gives sequence to a panel presented at the 3rd SBPC Special Meeting which took place in Florianópolis in May, 1996. The aim is to give a geometrical interpretation of Gravity, which can enlighten the students'comprehension.

To reach both objectives we looked for well-known historical facts that shows the real necessity of having better knowledge about certain question. So, the best solution comes naturally.

Therefore, we realized the importance of the study of Mathematics among other sciences and thus, have a bearing on the equation of a real problem.

INTRODUÇÃO: UMA CAMPANHA PARA REDUZIR OS AFOGAMENTOS.

Lendo o jornal O Globo de 17/09/95, pag. 16, lá estava uma reportagem sobre afogamentos nas praias do Rio de Janeiro. Sob o título "EM GERAL, AFOGADO MORA LONGE DA PRAIA", lia-se que de acordo com estatísticas do SALVAMAR, o perfil da maioria dos afogados é o seguinte: Homem solteiro que sabe nadar, com idade média de 22 anos e morando longe da praia. Lê-se ainda que o maior número de atendimentos dos guarda vidas se dá nos fins de semana ensolarados dos meses de janeiro e fevereiro, entre 10 e 14 horas

Imaginemos agora que o SALVAMAR decida promover uma campanha para reduzir os riscos de afogamento. Todos concordamos que as opções a seguir são inteiramente inadequadas:

1) As mensagens deveriam enfatizar que os banhistas estariam mais seguros não indo à praia entre 10 e 14 horas;

2) Similar ao item (1), alertando para os perigos existentes nos fins de semana ensolarados dos meses de janeiro e fevereiro.

3) Deve ser desestimulada a freqüência à praia, dos homens solteiros residentes longe do mar, que estejam na faixa dos 22 anos.

Não obstante nossa discordância com os itens acima, uma campanha enfatizando um ou mais dentre eles, pode acabar sendo bem sucedida. Afinal, não se pode negar que se a população for convencida a não ir à praia nos fins de semana ensolarados do verão, visto que nos outros dias do ano esta forma de lazer é menos atraente ou menos possível, a freqüência ao banho de mar terminaria por se reduzir. Consequentemente, o número de afogamentos também se reduziria. Fato semelhante ocorreria se os jovens solteiros deixarem de freqüentar a praia.

Entretanto, por mais que tal campanha pudesse reduzir os afogamentos, temos plena convicção que algo errado estaria. O erro, evidentemente, está no custo excessivamente alto a ser pago pela solução, a qual privaria uma parte significativa da população de uma importante opção de lazer, reduzindo assim, as potencialidades da sociedade no equacionamento dos seus problemas, maximizando os benefícios das soluções encontradas.

Observa-se, assim, que as estatísticas feitas pelo Salvamar, embora mostrem o problema dos afogados, não são suficientes para apontar as melhores soluções. Novos estudos devem ser feitos, buscando maiores e melhores informações sobre a questão.

OS NÍVEIS DO CONHECIMENTO E DAS SOLUÇÕES.

A situação imaginada anteriormente deixa claro que para maximizar os benefícios da solução de um problema, deve-se obter o máximo de informações sobre todas as questões envolvidas.

Assim, para exercitar o raciocínio, vamos supor a existência de uma sociedade com um problema de afogamentos semelhante ao que foi descrito, mas cujo único conhecimento disponível para resolvê-lo fosse a estatística do Salvamar. Para fixar idéias, diremos que esta sociedade tem conhecimento de nível 1 sobre o problema, e que a solução apresentada tem eficácia de nível 1.

Como é evidente que a solução de nível 1 não é satisfatória (mesmo para quem hipoteticamente desconheça a existência de um solução melhor), é de se esperar que a tal sociedade faça um esforço no sentido de adquirir mais conhecimento sobre o assunto, com o objetivo de elevar o nível de sua solução.

Mantidas as devidas proporções, foi mais ou menos isto que aconteceu com o conhecimento da astronomia, da mecânica e da matemática nos séculos XVI e XVII, como veremos na seqüência.

DE PTOLOMEU A COPÉRNICO.

Como é do conhecimento geral, até o meado do século XVI, o sistema aceito na astronomia era o geocêntrico, concebido na antigüidade por Ptolomeu e que considerava a Terra como o centro do Universo. A alternância de dias e noites era explicada por um suposto movimento da abóboda celeste que, levando consigo todos os astros, inclusive o Sol, diariamente executava uma rotação completa em torno da Terra, considerada imóvel em coerência com o senso comum.

As estrelas eram consideradas fixas na abóboda celeste. Limitava-se, assim, sua movimentação, à volta diária ao redor da Terra, dada por esta abóboda. O aparente deslocamento anual do Sol através das constelações zoodiacais, ocasionando a alternância das 4 estações, era visto como conseqüência de uma suposta rotação anual deste astro em torno da Terra, segundo uma órbita circular denominada círculo deferente. A Lua tinha um movimento similar e o seu círculo deferente, assim como o do Sol, eram ambos centrados na Terra.

Já para os planetas então conhecidos, Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno (a Terra não era considerada planeta), admitia-se uma movimentação mais complicada, uma vez que órbitas circulares centradas na Terra não eram capazes de explicar o movimento retrógrado destes astros, que ocasionalmente tinham invertido o sentido de seu deslocamento através das constelações zoodiacais.

Concebeu-se então para explicar o movimento planetário, um sistema de epiciclos, cuja proposição era de que os planetas percorressem órbitas circulares, cujos centros por sua vez também descrevessem circunferências, os círculos deferentes, centrados na Terra (Fig. 1).

Fig.1. Movimento planetário num sitema de epiciclos.

A alternância de dias e noites; das quatro estações do ano, bem como o movimento dos planetas estavam satisfatoriamente explicados para as necessidades práticas da época, tais como a pecuária, a agricultura e a navegação. Esta última era feita próxima á costa ou no máximo, atravessando o Mar Mediterrâneo que se situa bem ao norte da linha do Equador e tem sua maior extensão no sentido Leste-Oeste, ocupando no sentido Norte-Sul, cerca de 7 graus da esfera terrestre. Assim, navegar no Mediterrâneo impunha uma variação pequena de latitude e prendia o navegante na parte superior do hemisfério norte, possibilitando que a observação de uns poucos astros (Sol, Lua, Estrela Polar, etc.) fosse suficiente para orientar a navegação. O pensamento religioso, consolidado ao longo de muitos séculos, estava perfeitamente adaptado a esta visão do Universo e a atribuía à criação divina.

Em outras palavras, o nível de conhecimento astronômico oferecido pelo sistema geocêntrico permitia encontrar soluções de nível satisfatório para os problemas práticos da época.

Tudo teria continuado assim, não fosse a ocorrência de fatos históricos bem conhecidos que por volta do século XV impuseram a alguns povos europeus a imperiosa necessidade de navegar pelo mundo afora. Os navios abandonaram a segurança das águas costeiras ou mediterrânicas e ganharam o Atlântico no rumo do mar aberto. Os barcos que foram para o Sul em breve se defrontaram com um céu diferente. A Estrela Polar desapareceu e em seu lugar surgiram novas constelações. Os planetas, entretanto, continuavam lá como uma promessa de orientação para os navegantes que sabiam muito bem que quando só se vê o mar e o céu, somente neste último podem encontrar o seu caminho.

Fazia-se, portanto, necessária a orientação pelos planetas. Como o geocentrismo, por usar a Terra como referencial, tornava complicado o movimento destes astros, em muito pouco tempo o recurso dos epiciclos, que não passava de uma aproximação das órbitas referenciadas à Terra, mostrou sua insuficiência para dar a confiabilidade que se fazia necessária.

A procura de uma solução melhor para tal problema impôs, desta forma, a melhora do nível de conhecimento do movimento planetário. A princípio, ampliou-se a idéia dos epiciclos, admitindo-se que os planetas moviam-se em órbitas que eram combinações de diversos círculos, sendo que o último deles era um círculo deferente centrado na Terra.

Se por um lado tal concepção explicava melhor a movimentação destes astros, por outro lado tornava extremamente complicadas as suas órbitas, tornando praticamente impossível que um planeta pudesse orientar um navegante em meio ao oceano, a bordo de uma precária caravela que, de acordo com a tecnologia da época, dispunha de pouquíssimos recursos de apoio à navegação.

A suposta elevação de nível do conhecimento sobre o movimento dos planetas, não tinha a correspondente elevação de nível da solução do problema prático a que se propunha. Algo portanto, devia estar errado na teoria dos epiciclos.

Só havia uma maneira de saber, pesquisar mais e, principalmente, pesquisar melhor sobre os planetas. Foi aí que surgiu a genialidade do astrônomo polonês Nicoláu Copérnico que em 1543, publicou o livro "De Revolutionibus Orbium Celestium", onde era apresentada a concepção heliocêntrica, aceita até hoje, que apresentava o Sol como centro do sistema planetário, do qual a Terra era um simples planeta, que como os demais, orbitava em torno do Sol fazendo um movimento anual de translação que do ponto de vista de quem estava na Terra, dava a impressão que o Sol é que se deslocava através das constelações, conforme pode ser observado na figura 2.

Fig.2. Órbita da Terra em torno do Sol.

A alternância de dias e noites era explicada por um movimento de rotação que a Terra (já concebida com a forma esferoidal) descrevia em torno de si própria, com duração de um dia.

O movimento dos planetas passou a ser descrito de forma simples, ao alcance da compreensão de qualquer marinheiro, sendo que o deslocamento retrógrado, calcanhar de Aquiles do sistema geocêntrico, tornou-se perfeitamente explicável e mesmo previsível como um movimento aparente causado pela composição dos movimentos da Terra e de cada um dos planetas em redor do Sol (Fig. 3).

Fig.3. Composição de movimentos da Terra e de cada planeta ao redor do Sol.

O curioso disto tudo é que os inquisitores da Igreja, tão atentos a tudo aquilo que pudesse ser visto como uma heresia, não perceberam de pronto o quanto de revolucionário havia no trabalho de Copérnico, entendendo-o como sendo apenas um método geométrico muito prático para os navegantes calcularem as posições dos planetas no céu, e não como uma nova concepção do mundo que transformava num simples "subúrbio" a Terra que, na concepção religiosa, era a parte mais importante do Universo e, portanto, o centro das atenções divinas.

Não foi, entretanto, necessário muito tempo para que este aspecto herege fosse percebido e os defensores do sistema heliocêntrico fossem perseguidos pela inquisição. São bem conhecidos os caso de Giordano Bruno, condenado à morte em 1600 e de Galileu Galilei, que alguns anos mais tarde foi obrigado a reconhecer publicamente o cunho herege dos resultados de suas pesquisas.

Mas, a repressão religiosa não foi suficiente para calar a nova ciência que então surgia. Astrônomos, matemáticos, cartógrafos e assemelhados continuaram adotando e pesquisando o sistema heliocêntrico. Novos fatos eram descobertos continuamente, aperfeiçoando e fundamentando as descobertas de Copérnico, tornando-as irreversíveis.

No fim do século XVI, o astrônomo alemão Johannes Kepler baseado em fatos obtidos em longas observações que davam continuidade ao trabalho de outro astrônomo, o dinamarquês Tycho Brahe, enunciou suas famosas leis do movimento dos planetas, que explicavam com grande precisão o deslocamento destes astros através das constelações. A seguir, transcreveremos a primeira destas leis.

Primeira lei de Kepler: *Cada planeta (inclusive a Terra) se move por uma órbita em forma de elipse ao redor do Sol, que ocupa um de seus focos.*

Tal lei corrigia um erro que foi cometido por Copérnico e que talvez tivesse sido uma derradeira influência do geocentrismo no espírito daquele sábio, o qual dizia que as órbitas dos planetas eram circulares e centradas no Sol.

Pouco mais de meio século mais tarde, o matemático inglês Isaac Newton descobria, em suas pesquisas, as leis fundamentais da mecânica e da gravitação universal que preconizavam regras gerais e abstratas que se aplicavam a todos os astros que se movessem no universo. Para fazer estas descobertas, Newton, dentre outros conhecimentos, baseou-se nas leis de Kepler.

As pesquisas de Newton possibilitaram uma demonstração matemática para as leis de Kepler, que como foi visto, estavam na própria base das pesquisas de Newton. Formou-se assim, um ciclo extremamente promissor onde a observação dos fatos e a abstração motivada por esta observação se alternavam e se completavam, possibilitando o enorme avanço científico que todos nós conhecemos.

É interessante destacar que hoje, passados quase quatro séculos das descobertas destes fatos, qualquer estudante com quatro semestres de formação matemática universitária pode entender perfeitamente as suas demonstrações. Este sem dúvida, é um dos muitos frutos colhidos pela humanidade, no fértil campo plantado pelos Copérnicos, Keplers, Galileus e Newtons da vida.

O PORQUE DA FORMALIZAÇÃO MATEMÁTICA.

Tendo em vista que as descobertas de Copérnico aperfeiçoadas pelas leis de Kepler já forneciam elementos suficientes para um cálculo bem preciso da posição de um planeta, cabe aqui questionar sobre a importância de uma fundamentação matemática para aquelas descobertas.

A primeira resposta ao questionamento se encontra onde foi visto que a formulação matemática destas leis, as tornou acessíveis a um número muito maior de pessoas, democratizando o seu conhecimento, fazendo progredir a ciência e, por extensão, a humanidade.

A segunda resposta decorre do fato de que por mais exatas que tivessem sido as observações de Kepler, haveria sempre a possibilidade delas não estarem totalmente corretas (como de fato não estavam! Veja a terceira resposta adiante). Assim é que baseado nesta suposição o astrônomo italiano Giovanni Cassini apresentou em 1680 as curvas hoje conhecidas como ovais de Cassini e que propunham um modelo alternativo às elipses de Kepler para as órbitas dos planetas. Em 1687, as descobertas de Newton puseram fim às dúvidas levantadas por Cassini.

Como este último foi um astrônomo brilhante, autor de diversas descobertas significativas sobre os satélites e os anéis de Saturno além de ter feito importantes observações sobre os movimentos da Lua, cabe especular se não foi ao ser matematicamente convencido da veracidade das leis de Kepler que ele sentiu-se liberado da tentativa de contestá-las e assim, canalizar o seu talento em direções mais produtivas.

A terceira resposta leva em conta o fato de o modelo matemático usado para mostrar as leis de Kepler envolver apenas dois astros; o Sol e um planeta. Como no sistema solar existe mais de um planeta, além de outros astros, cujos campos gravitacionais interagem, ficou logo claro que o modelo teórico usando apenas dois astros devia chegar a um resultado diferente do modelo real. Como o modelo teórico chega a equações que descrevem uma órbita elíptica percorrida de uma forma muito precisa, concluiu-se que na prática, as órbitas não deviam ser bem assim.

Observações mais detalhadas não tardaram a mostrar que isto efetivamente ocorria; isto é, as órbitas dos planetas eram imperfeitas relativamente ao modelo teórico. As imperfeições, então denominadas *perturbações*, eram confirmadas pelas leis de Newton.

Ao fim de algum tempo foram criados modelos matemáticos que descreviam, justificavam e previam as perturbações nas órbitas dos diversos planetas. Este estudo teve o mérito de transformar as perturbações em vantagens, capitalizando-as pela ciência e, assim, colhendo-se diversos frutos como, por exemplo, o que veremos em seguida.

No ano de 1781 o astrônomo inglês William Herschel descobriu o planeta Urano e em decorrência disto, muitos astrônomos dedicaram-se aos estudos necessários para o cálculo da órbita do novo astro. Nestes cálculos foram detectadas perturbações que não podiam ser atribuidas à influência dos planetas conhecidos. Conjecturou-se então a hipótese de existir um oitavo planeta ainda desconhecido, mas que seria o responsável por aquelas perturbações.

“Transformava-se assim, pela primeira vez, um problema astronômico num problema matemático” [1]. A questão foi resolvida simultaneamente e de forma independente pelos matemáticos Le Verrier (francês) e Adams (inglês) que chegaram à conclusão que efetivamente devia haver um outro planeta, cuja localização foi muito bem determinada. Faltava, entretanto, descobrir o tal planeta.

Finalmente, seguindo as indicações de Le Verrier e Adams, o astrônomo alemão Galle, em 1846 ao vasculhar o céu com suas lentes, realizou a descoberta física de Netuno, cuja existência matemática fora determinada tempos antes. Entre a localização prevista pelos matemáticos e aquela efetivamente ocupada pelo planeta, havia uma diferença mínima.

É interessante notar que o tempo decorrido entre as descobertas dos dois planetas, 65 anos, é bem menor que a duração de uma volta completa de Urano em redor do Sol (84 anos). Isto significa que a possibilidade matemática de descrever a órbita de Urano viabilizou todas as informações necessárias à descoberta de Netuno, antes que o próprio Urano efetivamente a percorresse.

A descoberta de Plutão, já no século XX, seguiu mais ou menos os mesmos passos.

Ainda foram notadas algumas perturbações na órbita de Mercúrio, que a princípio levaram à conjectura da existência de um décimo planeta, interior a Mercúrio. Até o ponto em que estamos informados, tal hipótese hoje está descartada, pois estudos feitos com base na teoria da relatividade atribuem estas perturbações à curvatura do Universo nas proximidades do Sol, ocasionada pelo forte campo gravitacional.

A quarta resposta leva em conta o aspecto “verdade geral” que a fundamentação matemática empresta às leis da natureza, libertando-as dos limites impostos pelas condições em que foram originalmente concebidas. Para isto, basta considerar que por melhores que tivessem sido as pesquisas que determinaram as leis de Kepler, elas se basearam apenas nas observações dos planetas conhecidos na época. Assim, ao ser descoberto um novo planeta, haveria sempre a hipótese de sua órbita não ser kepleriana. Isto dificultaria enormemente a determinação dos seus movimentos, uma vez que estes estudos teriam que começar da estaca zero.

Como se isto não bastasse, realizações técnico-científicas que têm ocorrido de forma sistemática a partir da segunda metade do século XX seriam enormemente dificultadas por um eventual desconhecimento matemático das leis de Kepler. Para aquilatar estas dificuldades, basta pensar no problema sério em que se tornaria o cálculo da órbita de um satélite artificial, antes do seu lançamento. As conseqüências destas dificuldades teriam repercussão dramática nas comunicações, na navegação aérea e marítima, na astronáutica, na astronomia e, por extensão, em praticamentes todas as atividades humanas.

Enfim, é muito difícil imaginar como seria o mundo de hoje, sem o conhecimento matemático das leis de Kepler.

Tais considerações nos levam à seguinte especulação: Só para efeito de raciocínio, admitamos que não tivesse sido dada uma formulação matemática para as leis de Kepler. Neste caso, a exemplo do que fez Cassini, muitos astrônomos iriam buscar defeitos nestas leis. Como tais defeitos efetivamente existem sob a forma das perturbações citadas na terceira resposta, mais dia menos dia, eles seriam detectados. Em conseqüência, as leis de Kepler teriam sido superadas e o desenvolvimento científico teria seguido em outras direções.

Cabe portanto especular: Quais seriam estas direções? Como teria se dado o desenvolvimento da humanidade? Como seria o mundo de hoje?

UMA VISÃO GEOMÉTRICA DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL.

É sabido que *“matéria atrai matéria na razão direta do produto de suas massas e na razão inversa do quadrado da distância”*. De tal forma conhecemos e acreditamos nesta lei formulada por Isaac Newton na penúltima década do século XVII, que não nos preocupamos em formular perguntas do tipo "por que exatamente o quadrado da distância? Por que não a própria distância, seu cubo ou seu logaritmo?" Embora hoje não se façam mais estas perguntas, um dia elas foram feitas, como se pode depreender da leitura de [3] pp. 709/713. A interpretação cuidadosa dos fatos indicou a resposta certa.

Em apoio às razões que levam à gravitação universal, dando seqüência a [4], apresentaremos uma de cunho geométrico, extremamente simples, que embora não sendo uma demonstração, é forte o bastante para criar a expectativa da gravidade ser (como de fato é) inversamente proporcional ao quadrado da distância.

Não é difícil aceitar que a força de gravidade que um astro A exerce sobre um ponto material p situado a uma distância d, incida igualmente sobre qualquer outro ponto distante d de A. Isto é, a força gravitacional se distribui de maneira uniforme ao longo da região eqüidistante d de A, devendo portanto, incidir de maneira tão mais fraca em cada um de seus pontos, quanto maior for a área da região (Fig.4).

Fig.4. Esquematização da força gravitacional.

Como esta região é justamente a esfera E de centro A e raio d, segue-se que a força gravitacional que incide em cada ponto de E deve ser inversamente proporcional à sua área.

Mas a área da esfera é diretamente proporcional ao quadrado do raio d e, por conseguinte, a força exercida por A sobre p, deve ser inversamente proporcional ao quadrado da distância d.

Considerações similares, levam-nos a crer que o brilho de uma estrela é inversamente proporcional ao quadrado da distância. Isto é verdade (veja [1] pag 403).

Aprofundando os raciocínios acima, é fácil admitir que a força gravitacional em um suposto Universo n-dimensional seja inversamente proporcional à potência n-1 da distância. Este assunto é tratado em [4] e em outro artigo que estamos preparando.

CONCLUSÃO

De tudo o que foi visto, pode-se concluir a importância da formulação matemática dos problemas colocados pela vida, em geral, e pela ciência, em especial. Uma boa interpretação matemática para uma determinada questão, possibilita um melhor entendimento de muitos aspectos envolvidos e, não raro, conduzem a uma solução abrangente que ultrapassa os limites do problema original, possibilitando generalizar muitos dos métodos desenvolvidos, para outras situações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[1]- Bakulin, P.I. e outros. Curso de Astronomía General. Editorial Mir, Moscou - 1983.

[2]- Boorstin, Daniel. Os descobridores. Editora Civilização Brasileira. Rio de Janeiro - 1989.

[3]- Simmons, George. Cálculo com Geometria Analítica. Mc Graw-Hill Editora. São Paulo - 1988.

[4]- Valladares, Renato J.C. - Porque a Gravidade é Inversamente Proporcional ao Quadrado da Distância? - Anais da 3ª Reunião Especial da SBPC, Florianópolis, 1996 - pag. 419.