Grafos no Ensino Fundamental e Médio: Matemática, Interdisciplinaridade e Realidade

JORGE BRIA, CARLOS ALBERTO NUNES COSENZA E GILDA HELENA BERNARDINO DE CAMPOS

INTRODUÇÃO

Apresentamos neste trabalho uma discussão sobre possível inserção dos *grafos e suas aplicações* no Ensino Fundamental e Médio, reproduzindo a essência da tese de Doutorado em desenvolvimento na COPPE/UFRJ por parte do primeiro autor, a partir de sua experiência acumulada, em estudos em grafos nos últimos anos, enquanto professor de Matemática de 1° e 2° graus anteriormente, em docência no Curso de Graduação em Matemática da UFF ao longo de mais de duas décadas até hoje e por seu envolvimento mais recente em projetos e pesquisas em Educação Matemática, experiência essa que se soma a significativos frutos colhidos de uma muito feliz parceria de orientadores, os dois outros autores.

Uma das principais motivações dos três autores à publicação deste artigo foi a plena consciência de que *grafos e suas aplicações* é tema completamente desconhecido da maioria dos professores. Mas não deveria sê-lo... Isto é o que pretendemos mostrar! Evidentemente de forma bastante sintética, mas suficiente para que o leitor, talvez com breve consulta à nossa *Bibliografia Sugerida*, venha a concordar conosco:

Grafos e suas aplicações seriam, inquestionavelmente, muito oportunos e viáveis no Ensino Fundamental e Médio em nosso país!

Certamente, estão os grafos altamente credenciados como um dos fortes candidatos naturais a serem incluídos como novos tópicos da Matemática para tais níveis de ensino. Propor grafos para estes (e, a partir daí, efetivamente investir em sua concreta inserção no processo formal de formação de nossas crianças, adolescentes ou jovens) é tarefa desafiadora, não resta dúvida. Mas é instigante, realmente inovadora em nosso país e nos vem estimulando de forma cada vez mais consistente, a partir de certos pressupostos que aqui explicitaremos e, principalmente, pelo quanto a idéia aponta caminhos tão promissoramente produtivos, envolvidos em rara harmonia:

Simplicidade, Beleza, Atualidade... Ciência, Arte, Educação!

E, de imediato, adiantamos ao leitor que a cogitação de abordagens em grafos no ensino obrigatório não é "invenção nossa"! Citamos já, por exemplo, Santaló [1990]:

> *"...Ainda que, em muitos países, já tenham sido introduzidos, vamos mencionar alguns temas que, obrigatoriamente, devem figurar entre aqueles acerca dos quais todo cidadão deve ter sido informado durante o período de escola obrigatória... Há que se introduzir as idéias básicas de probabilidade e estatística... Os fenômenos e situações aleatórias são os que mais aparecem na natureza e na vida cotidiana... Outro tema essencial é a introdução, o mais cedo possível, da computação...Outro exemplo pode ser a Teoria dos Grafos, muito útil em diversas áreas da ciência..."*

O Que São Grafos?

Problema 1

A figura 1 mostra-nos diagrama representando (sem preocupações com forma ou escala exatas) as 9 estradas de certa região, onde A, B, C, D, E, F e G são cidades. Partindo de A, e sabendo que tais estradas são de pista dupla (mão nos dois sentidos), é possível visitarmos todas as outras cidades, sem repetirmos nenhuma, terminando tal viagem rodoviária justamente na cidade de partida (não considere isto como repetição)?

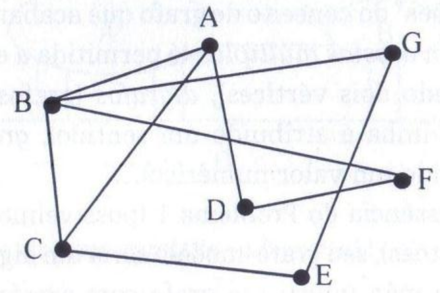

FIGURA 1

Para este nosso primeiro exemplo, basta-nos uma rápida "inspeção visual" para chegarmos à resposta. De fato, é possível. A ordenação ACEGBFDA expressa um roteiro de viagem que satisfaz às exigências impostas pelo enunciado.

Na verdade, nosso Problema 1 está aqui apenas objetivando ser ponto de partida para alguns conceitos iniciais da Teoria dos Grafos que nos interessam neste artigo.

Ao que chamamos de diagrama, no enunciado do problema, dizemos agora tratar-se de um **grafo**. O grafo da figura 1, em particular, possui 7 **vértices** (representando as cidades A, B, C, D, E, F e G) e 9 **arestas** (as estradas). Ao representarmos a situação-problema dessa forma (enfatizamos não serem importantes a forma ou o comprimento das linhas que expressam as arestas), estamos fazendo uma **modelagem em grafos** da questão proposta, concebendo um **grafo-modelo** à mesma.

O leitor deve perceber que, bem provavelmente, já desenhou grafos por inúmeras vezes em sua vida! Desenhou-os em muito diversificadas circunstâncias de seu cotidiano, sua atividade profissional ou qualquer outro contexto em que desejasse melhor "visualização" da situação a ser analisada: para simples diagnóstico, melhor abordagem, busca de alguma solução concreta...

Outros conceitos bem simples facilitarão nossa comunicação aqui. **Ordem** de um grafo é o seu número de vértices. Dizemos também que, por exemplo, a aresta AB é **incidente** nos vértices A e B. Já uma seqüência "contínua" de arestas, do tipo CEGBF, é dita um **percurso** (neste caso, **conectando** os vértices C e F). Finalmente, **grau** de um vértice é o número de arestas nele incidentes; assim, os vértices A, B, C, D, E, F e G possuem graus, respectivamente, iguais a 3, 4, 3, 2, 2, 2 e 2.

Há "generalizações" do conceito de grafo que acabamos de apresentar ao leitor: *grafos com arestas múltiplas* (é permitida a existência de mais de uma linha ligando dois vértices), *digrafos* (grafos direcionados ou orientados; a cada linha é atribuído um sentido), *grafos valorados* (a cada linha é atribuído um valor numérico)...

Preservando a essência do Problema 1 (possivelmente, alterando ou acrescentando questões), seu grafo-modelo seria um digrafo caso algumas estradas fossem de mão única; um grafo com arestas múltiplas seria utilizado se houvesse mais de uma estrada ligando duas cidades; um grafo valorado seria escolhido se o problema proposto levasse em consideração alguma valorização quantitativa a atribuir-se a cada estrada (valor numérico representando distância, nível de dificuldade ou risco de passagem por tal estrada, número de pontos turísticos interessantes, etc). Neste artigo, salvo contrária menção explícita (e já será o caso de nosso próximo problema), o termo *grafo* é usado em seu conceito mais simples, sem orientação das arestas, sem multiplicidade destas entre dois vértices, sem qualquer atribuição de valores quantitativos, sem qualquer outra imposição.

Os grafos vêm do século XVIII. A idéia de representarmos objetos através de pontos (vértices) e, fixada determinada relação a ser satisfeita por alguns pares desses objetos, sempre ligarmos dois vértices relacionados por meio de uma ou mais linhas (arestas), isto é, a idéia original dos grafos, nasceu a partir de um ***problema precursor*** **(Euler, 1707-1783)**, que se apresenta aqui como nosso.

PROBLEMA 2 (PROBLEMA DAS PONTES DE KÖNIGSBERG)

Havia um rio com duas ilhas A e B. Rotulando-se as duas margens do rio, respectivamente, por C e D, tínhamos 7 pontes. Uma ligando as duas ilhas A e B, duas de A até a margem C, duas de A até a margem D, uma de B a C e a outra de B a D (mapa na figura 2). Seria possível, partindo-se de qualquer uma dessas quatro regiões, margem ou ilha, atravessarmos as sete pontes sem repetir nenhuma?

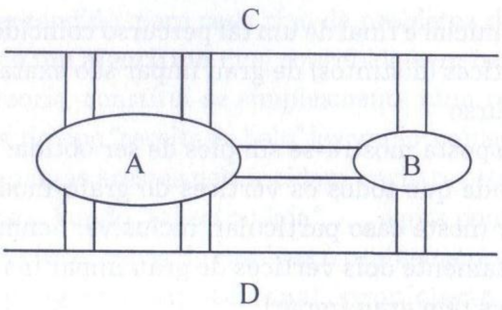

FIGURA 2

Estamos diante de uma *questão euleriana*[1] !

Modelagem:
Vértices - ilhas ou margens (A, B, C, D)
Arestas - pontes

O grafo-modelo (figura 3) deste problema é um *grafo com arestas múltiplas*, como já comentado.

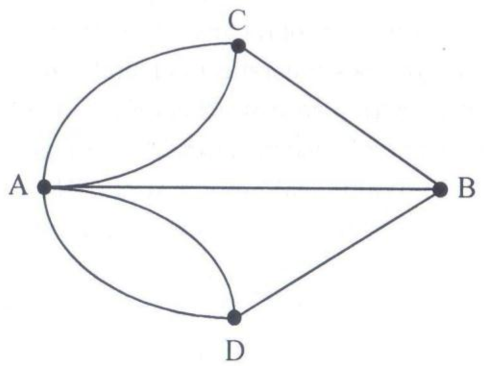

FIGURA 3

E podemos nos valer do seguinte resultado da Teoria dos Grafos:

É possível percorrer todas as arestas de um grafo, cada uma por uma única vez (sem repetição) se, e somente se, o grafo possui todos os vértices com grau par ou exatamente dois vértices de grau ímpar; no primeiro

[1] Numa primeira abordagem, simplesmente entenda-se como uma *questão euleriana* toda aquela que envolva passagem por todas as arestas do grafo sem repetição de nenhuma delas.

caso, os vértices inicial e final de um tal percurso coincidem; no segundo caso, os dois vértices (distintos) de grau ímpar são exatamente o inicial e o final do percurso.

E, assim, a resposta mostra-se simples de ser obtida: Impossível! De fato, não é verdade que todos os vértices do grafo-modelo da figura 3 tenham grau par (neste caso particular, inclusive, nenhum possui grau par) nem há exatamente dois vértices de grau ímpar (na verdade, todos os quatro vértices têm grau ímpar).

Metodologia e Aplicabilidade Usuais em Grafos

A Teoria dos Grafos compõe-se de inúmeros tópicos: árvores, percursos eulerianos, percursos hamiltonianos, planaridade, coloração... Por exemplo, assim como nosso segundo problema envolveu uma *questão euleriana*, o primeiro apresentara-nos uma *questão hamiltoniana*[2]. Cada um desses tópicos tem seu desenvolvimento próprio, com seus inúmeros conceitos ou resultados. Em geral, cada avanço científico de um tópico dá-se como produto de pesquisas, em função de possível resolução definitiva (ou aperfeiçoamento de soluções) de *questões em aberto* já existentes ou a partir de novas situações-problema propostas, dentro da própria teoria ou como tradução, à linguagem dos grafos, de outras questões concretas (da realidade) ainda não colocadas anteriormente. E uma nova situação-problema da realidade pode até motivar o desenvolvimento de novo tópico na Teoria dos Grafos.

Um aspecto de fundamental importância: Na prática usual, na esmagadora maioria das vezes, estamos lidando com número muito grande de vértices e arestas. Se isto tivesse acontecido com o Problema 1, por exemplo (se estivéssemos diante de uma região mais ampla, com muitas cidades e estradas), e ainda nos sendo exigido explicitar um tal roteiro de viagem que satisfizesse às condições impostas no enunciado, não conseguiríamos chegar a uma solução por simples inspeção visual, diante de tamanho emaranhado de pontos e linhas, com tantas "infinitas" possibilidades de percursos entre dois quaisquer vértices. E o computador seria imprescindível!

[2] Numa primeira abordagem, simplesmente entenda-se como uma *questão hamiltoniana* toda aquela que envolva passagem por todos os vértices do grafo sem repetição de nenhum deles.

Dessa forma entendido, para cada tipo de problema dessa maioria de casos, é necessário um **algoritmo** que, concebido com base em conceitos e resultados da teoria, constitui-se simplesmente num roteiro ordenado de procedimentos, do tipo "receita de bolo" (exemplo: comece de um vértice qualquer, conte quantas arestas nele incidem, registre este número, parta para outro vértice segundo "tal estratégia", ..., agora continue assim:...). Tal algoritmo específico, capaz de resolver o problema proposto, uma vez traduzido à linguagem computacional, propiciaria sua resolução executável pela máquina. No campo usual de aplicabilidade dos grafos, inclusive, é exatamente isso que os torna fundamentais — ferramenta poderosíssima! — em tão diversificados contextos: a possibilidade de rápida resolução de problemas, via computador, quando uma "abordagem visual" nem faria sentido, de tão laboriosa, ou até seria impossível.

Até o final deste artigo, portanto, o leitor nunca deve se esquecer de que, nos problemas exemplificados, quando nos valermos de resolução por inspeção visual (para a determinação de uma solução concreta), esta só terá sido possível por estarmos diante de bem pequeno número de vértices e arestas (caso contrário, precisaríamos de um algoritmo para o problema em questão — o computador seria indispensável), assim proposto aqui sempre propositadamente para, livres de outros aspectos, podermos nos direcionar permanentemente, de forma prioritária, à luz de nosso principal objetivo: o exercício da modelagem! E ainda sobre algoritmos, inclusive, mas agora para os níveis fundamental e médio, citamos Paterlini [1995]:

"Uma experiência[3] com este problema em sala de aula nos leva a algumas reflexões sobre o ensino da Matemática. Não estaríamos nós, professores, enfatizando demasiadamente a associação entre solução de um problema e obtenção de uma fórmula, em detrimento da elaboração de algoritmos? A elaboração de algoritmos desenvolve qualidades de organização e previsão, e é uma atividade que não deve ser omitida no ensino formal da Matemática."

O diagrama da figura 4 [Bria, 1996] busca reproduzir a essência da metodologia de resolução de problemas e pesquisa em grafos: *teoria &*

[3] A experiência em sala de aula, citada por Roberto Paterlini, foi em Geometria, envolvendo um retângulo reticulado por linhas paralelas aos lados, formando quadrados interiores unitários.

prática. Inclua-se, também, nas fases (II), (IV), (V) e (VI) expressas no diagrama, tudo o que envolva algoritmos e execução computacional.

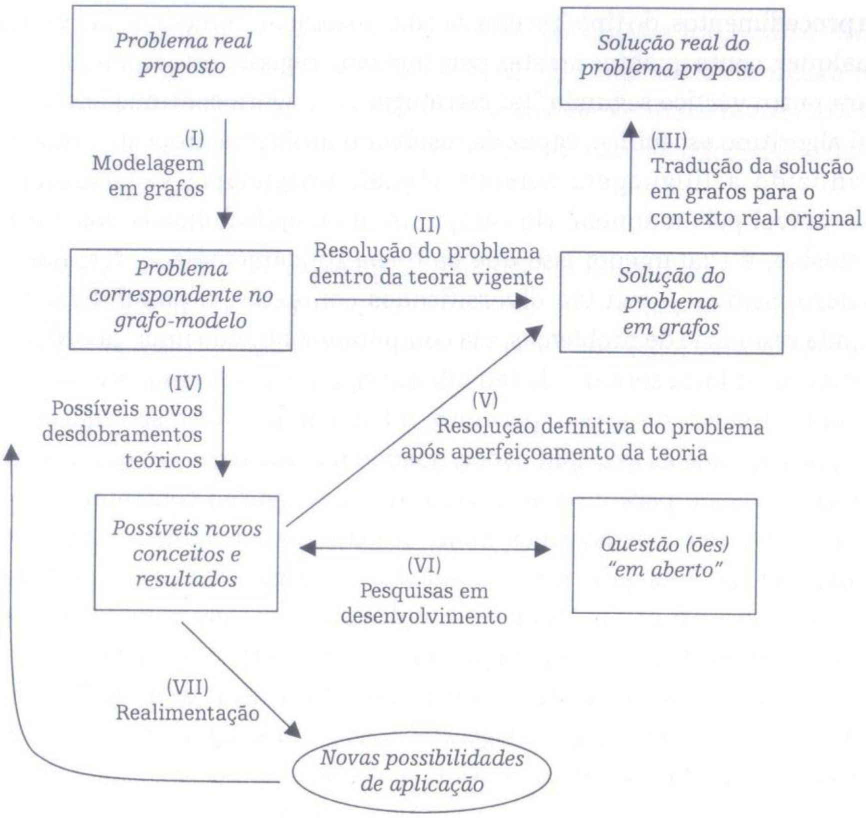

FIGURA 4 / GRAFOS: TEORIA & PRÁTICA

PRESSUPOSTOS DA PROPOSTA

Em Educação, ou em Educação Matemática de forma mais particular, quando se busca fundamentar uma proposta que se anuncia como consistente, de abrangência global em nível considerável e promissoramente produtiva, para o Ensino Fundamental e Médio, imagina-se logo a tão ampla multiplicidade de aspectos envolvidos. Neste artigo, ao contrário do que se impõe em nosso trabalho rumo à defesa de tese, não caberia analisá-los todos. Desejamos, no entanto, mesmo que de forma muito sintética, passar ao leitor, pelo menos, a essência de nossa fundamentação. Isto será iniciado agora, após breves comentários, com o estabelecimento de três pressupostos.

Sabemos que, por exemplo, quando estamos diante de uma turma do nível fundamental ou médio para mais uma aula de Matemática, podem estar à nossa frente cerca de 70% dos ouvintes — que nunca sejam apenas perplexos ouvintes mesmo! — que "lá não nasceram" com grandes afinidades com a Matemática ou que não se encaminharão profissionalmente pelos destinos puros dessa ciência. Estudantes que, no entanto, talvez gostariam de gostar mais de Matemática. Ou, simplesmente, necessitariam ter esse gosto maior, pelo menos, para lograrem condições mais favoráveis à tentativa de diminuição de suas dificuldades em aprendê-la. É claro que, também relativamente a estes, não nos podemos furtar ao trabalho de despertar talentos, estimular vocações. E assim, certamente, alcançaremos tal êxito junto a alguns estudantes, se com amor, sensibilidade e dedicação imbuirmo-nos desse espírito explorando, de forma metodológica cuidadosa, os aspectos mais centrais do saber matemático de forma específica. No entanto, igualmente não podemos direcionar nossa aula, de forma exclusiva — nem mesmo predominante —, a esse fim. Pois lá, diante de nós, estará uma turma inteira de alunos (pessoas: futuros matemáticos, médicos, bancários, professores da língua materna, motoristas, advogados, comerciantes, atores, escriturários, professores de História, agricultores, pescadores, economistas, contínuos, sociólogos, jornalistas, garçons...), à qual devemos passar uma matemática global, abrangente, diversificada, interpretativa (da realidade), conscientizadora (à cidadania), criadora (sob múltiplos aspectos)... Resumindo, não podemos deixar escapar essa tão nobre oportunidade de tentarmos propiciar aos estudantes, a todos, sem qualquer exceção, e no máximo que nos seja possível, condições favoráveis a que possam aproveitar todas as chances que suas rotinas de vida lhes venham a proporcionar para uma visão da Matemática como notável parceira, não "ameaçadora", jamais "predestinada apenas a seres privilegiados". E sempre muito útil, rica, bela!

Sem entrarmos aqui em maiores considerações sobre possíveis classificações distintas quanto à hierarquização de níveis de colaboração e integração entre disciplinas — *multi, pluri, inter, trans... disciplinaridade* —, ou discussões específicas de temas como diversidade cultural, currículo integrado, prováveis implicações e esperáveis dificuldades de sua implantação, ou de outros que, com estes, se interliguem (o leitor encontrará forte material crítico sobre isso em Santomé [1998]), esclarecemos que, sempre que usarmos o termo *interdisciplinaridade* neste artigo, esta deve ser entendida como implicando real intercâmbio entre disciplinas (ida e volta); pelo menos, em intenção inicial de enfoque, enquanto referencial, independentemente dos naturais obstáculos ou circunstâncias restritivas que possam se colocar, frente a iniciativas para sua efetiva concretização. E já julgamos oportuno citarmos Machado [1999]:

"...parece cada vez mais difícil o enquadramento de fenômenos que ocorrem fora da escola no âmbito de uma única disciplina. Hoje, a Física e a Química esmiuçam a estrutura da matéria, a entropia é um conceito fundamental em Termodinâmica, na Biologia e na Matemática da Comunicação, a Língua e a Matemática entrelaçam-se nos jornais diários, a propaganda evidencia a flexibilidade das fronteiras entre a Psicologia e a Sociologia, para citar apenas alguns exemplos. Em conseqüência, a idéia de Interdisciplinaridade tende a transformar-se em bandeira aglutinadora na busca de uma visão sintética, de uma reconstrução da unidade perdida..."

Nossos principais pressupostos são:

(I) "Beleza é fundamental"... Exercer constante sedução, estimular a autonomia e educar para a criatividade são indispensáveis!

(II) O pleno exercício da interdisciplinaridade deve passar, cada vez de forma mais abrangente, de mero discurso à prática concreta!

(III) A Escola não pode se omitir ou ignorar a vida lá fora... Impõe-se "eterna parceria" entre o que se aprende na Escola e o cotidiano, a realidade !

Da Metodologia e Aplicabilidade Usuais em Grafos ao Ensino Fundamental e Médio

É unanimidade, com certeza, dentre aqueles conhecedores dos grafos, que estes são de abordagem inicial acessível a todos, podem exercer forte sedução a estudantes dos diversos níveis de ensino e caracterizam-se, principalmente, por sua enorme aplicabilidade nos mais variados contextos: áreas do conhecimento humano e realidade concreta, nosso dia-a-dia! E ao que nosso trabalho se propõe, em paralelo ao que tanto já se consagrou em termos de contínua utilização dos grafos de forma usual, é também torná-los disponíveis ao Ensino Fundamental e Médio em nosso país, de forma a enriquecer ainda mais o processo ensino-aprendizagem em que estamos envolvidos.

O que passamos a apresentar agora é uma pequena amostragem do que se pode explorar com os grafos, notadamente no que envolve modelagem de problemas.

PROBLEMA 3

A figura 5 representa uma região de nosso país, da qual estão representadas cidades (1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7) e estradas (os 11 segmentos de reta traçados). Marcus, há alguns anos atrás, morava numa dessas cidades e resolveu conhecer as 11 estradas, viajando de carro. Ele sabia que nenhuma dessas estradas era de *mão única*, isto é, que poderia sempre seguir nos dois sentidos. E Marcus assim o fez, inclusive conseguindo nunca passar por qualquer estrada pela qual já tivesse passado nessa viagem (não gastou combustível desnecessariamente). O interessante é que Marcus, assim que terminou sua viagem passando pela última dessas estradas, gostou tanto da cidade em que chegou, que lá mora até hoje. Em que cidade Marcus morava anteriormente? Ou, então, em que cidades poderia estar morando no exato momento do início de tal viagem? Ou será que essa história toda, que Marcus sempre repete aos amigos, é realmente uma grande mentira, posto que uma viagem assim, satisfazendo integralmente ao relato feito, seria impossível?

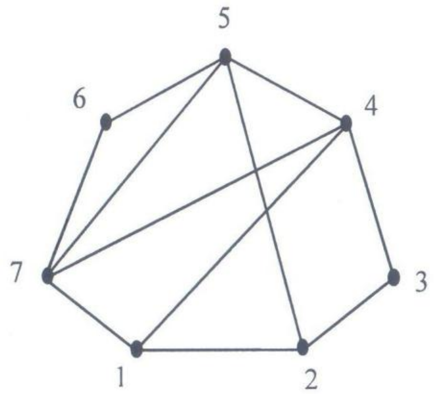

FIGURA 5

Modelagem:
Vértices - cidades (1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7)
Arestas - estradas

Assim, a figura 5 passa agora a ser interpretada como a do próprio grafo-modelo do problema proposto. Após tradução à *linguagem dos grafos*, a questão "uma viagem assim, como a que Marcus repete aos amigos, seria possível?" pode ser lida como "existe um percurso, passando por todas arestas do grafo, sem que se repita nenhuma, que termine em vértice distinto do inicial?".

Vamos nos valer do mesmo resultado utilizado na resolução do Problema 2.

No grafo da figura 5, há exatamente dois vértices de grau ímpar: 1 e 2. Assim, a resposta à questão colocada (em grafos) é afirmativa. Marcus não está mentindo quando conta a tal história (pelo menos, a história seria possível!) e, ainda pelo mesmo resultado, ele morava na cidade 1 e terminou sua viagem estabelecendo-se na cidade 2; ou vice-versa.

Uma atenção especial do leitor agora... no sentido de perceber, profundamente, a riqueza do tema e o quanto podem ser abrangentes as possibilidades do professor, a partir de qualquer problema já conhecido, de associação, adaptação ou criação de novos problemas, transportando-se sem maiores dificuldades, inclusive, até de um certo contexto (o do problema inicial) a outro!

Em princípio, o Problema 3 parece só uma *charada matemática*. Mas, quando entra sua modelagem em grafos, ele passa a ser um (dentre inúmeros possíveis) representante de uma ampla classe de problemas, que pode se expressar por vários enunciados distintos (tantos quantos se queira), no mesmo contexto ou diversificados outros. Isto ocorre pelo fato de que estes diferentes enunciados, quando traduzidos à teoria em questão, transformam-se, essencialmente, num único problema em grafos. Assim, em geral, ou em número muito expressivo de ocasiões, um professor poderia traduzir (agora em sentido contrário) uma mesma situação-problema em grafos em enunciados de Química, Biologia, Lingüística, Sociologia... Ou numa atividade lúdica a ser proposta, numa situação corriqueira do cotidiano do aluno; neste caso, inclusive, aproveitando até o próprio contexto social em que o aluno estivesse inserido, sua cidade, seu bairro, sua casa, sua família, suas principais atividades exercidas ao longo da semana, seu esporte predileto, os objetos com que tem mais freqüente contato, etc.

Vamos ilustrar essa tão rica fonte, que o professor teria à sua disposição para a criação de inúmeras novas situações-problema a partir de alguma de abordagem já conhecida, propondo os Problemas 4 e 5 que, enunciados em contextos concretos (da realidade) completamente distintos, entre si e do contexto do Problema 3, resultam no mesmo tipo de situação-problema em grafos. Isto é, os Problemas 3, 4 e 5 são "iguais", se vistos apenas à luz da correspondente questão em grafos que, na verdade, se está colocando.

PROBLEMA 4

A figura 6 representa a planta de uma pequena casa, onde mora Marcus que, há alguns minutos atrás, encontrava-se no interior de um dos cômodos. Todas as portas da casa estavam abertas naquele instante, as portas de todos os cômodos e as que dão para o lado de fora da casa. Exatamente de tal cômodo, então, Marcus iniciou determinado trajeto, segundo o qual conseguiu fechar todas as 11 portas, passando por cada uma delas por uma única vez (isto é, fechada qualquer porta, não a abriu de novo) e, imediatamente após fechar a última porta, foi ao cinema em rua próxima. Em que cômodo, inicialmente, Marcus estava? Ou em que cômodos poderia ele estar naquele instante? Ou, ao contrário, tal história é realmente uma grande mentira, posto que um tal trajeto, satisfazendo integralmente ao relato feito, seria impossível?

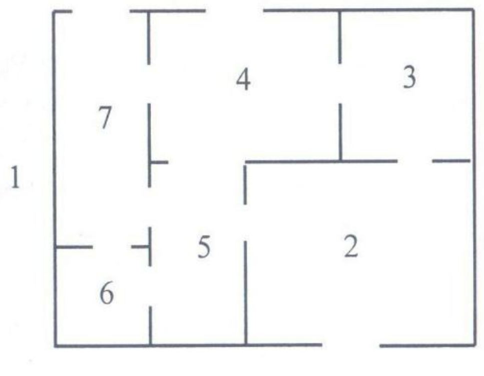

FIGURA 6 (REGIÃO 1 = EXTERIOR DA CASA)

Modelagem:
Vértices - cômodos (2, 3, 4, 5, 6 e 7) ou o exterior (1)
Arestas - portas

Mesmo grafo-modelo do Problema 3 (figura 5)! Repetem-se, também, a situação-problema em grafos (mesma questão euleriana em jogo) e o encaminhamento da resolução. Houve apenas uma imposição adicional. Marcus foi ao cinema logo depois; daí, o trajeto de "fechamento de portas" pela casa terminou do lado de fora (vértice 1), só podendo ter se iniciado, portanto, no cômodo 2. O trajeto 234567147521 satisfaz às condições impostas no enunciado. Visualize-o, no grafo da figura 5... E na casa!

E grafos são muito úteis na modelagem de inúmeros jogos[4]. O Problema 5, por exemplo, que em nada envolve cômodos ou portas de uma casa como o problema que acabamos de analisar (totalmente distinto deste, remete-nos ao conhecido jogo de dominó), de novo recai na mesma situação-problema em grafos, explorada nos Problemas 3 e 4, situação esta que, por sua vez, possui a mesma essência da envolvida no Problema 2 (das pontes de Königsberg). E, certamente, nossa ênfase não será demais aqui: margens de rio, ilhas e pontes; cidades e estradas; cômodos e portas; pedras de um jogo de dominó (isto mesmo; é o que veremos logo a seguir!). Tão distintos contextos... E uma só situação-problema em grafos suficiente para a abordagem completa desses quatro problemas concretos! Vamos, então, ao nosso.

Problema 5

Em certa noite de fortes chuvas, os irmãos Marcus e Vinicius estavam em casa, não muito inspirados sobre o que se fazer. Detestavam televisão! Por "milagre", nenhum motivo para discutirem. De fato, tratava-se de uma noite fadada ao tédio. Numa velha caixa já há muito esquecida, no entanto, encontraram pedras de um jogo de dominó. Com animada

[4] Por exemplo, também com resolução em grafos, e constituindo-se numa *questão hamiltoniana*, o problema "é possível um cavalo passar por todas as casas de um tabuleiro de jogo de xadrez, através de uma seqüência de movimentos de cavalo, sem repetir nenhuma delas e terminando tal percurso na mesma casa de onde partiu?" tem resposta afirmativa. O leitor pode encontrá-lo em [Wilson, 1990].

perspectiva de relembrarem os velhos tempos (de infância), propuseram-se a retirar as pedras da caixa percebendo logo, no entanto, que o conjunto estava incompleto. Aliás, bastante incompleto: só as pedras 0-1, 0-3, 0-6, 1-1, 1-2, 1-4, 2-3, 3-3, 3-4, 3-6, 4-4, 4-5, 4-6 e 5-6 ainda lá permaneciam. Frustrados, mas criativos, e dispostos a fazerem passar o tempo de qualquer forma, resolveram criar um jogo de "desafios" com as pedras disponíveis. Marcus começou (Marcus sempre começava): "Vinicius, diga-me, sem tocar nas pedras, se é possível arrumá-las todas, seqüencialmente, de forma usual num jogo de dominó. Se possível, diga-me ainda que números, numa tal possível seqüência, poderão vir a ocupar as extremidades, após todo o jogo montado". Vinicius, que conhecia grafos, imediatamente pegou lápis e papel e, após alguns minutos, deu as respostas corretas. Como Vinicius raciocinou (em grafos) na resolução? Antes de qualquer outra análise, certifique-se de seu pleno entendimento da questão, visualizando bem que qualquer possível seqüência-resposta seria do tipo expresso na figura 7, não necessariamente na ordem em que estão vistas as pedras.

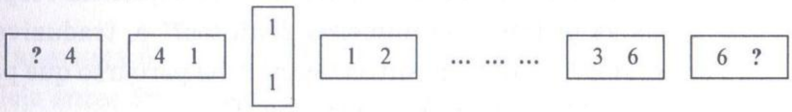

FIGURA 7

Estratégia geral:

Em princípio, desconsiderar pedras de números repetidos (1-1, 3-3 e 4-4). Uma vez achada uma seqüência-resposta com as outras pedras (caso exista), inserir as três pedras inicialmente retiradas em lugares adeqüados, como se vê feito, na figura 7, com a pedra 1-1. Assumindo tal estratégia, então, e já desconsiderando as pedras 1-1, 3-3 e 4-4, iniciemos a resolução promovendo a seguinte

Modelagem:

Vértices - 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6

Arestas - 01, 03, 06, 12, 14, 23, 34, 36, 45, 46 e 56

Assim, obtém-se o grafo-modelo da figura 8, que se percebe ser o mesmo grafo dos Problemas 3 e 4, apenas com renomeação de seus vértices. De fato, os rótulos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 dos vértices do grafo comum (figura 5) aos dois problemas anteriores passaram a ser agora, respectivamente, 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Apenas isso aconteceu!

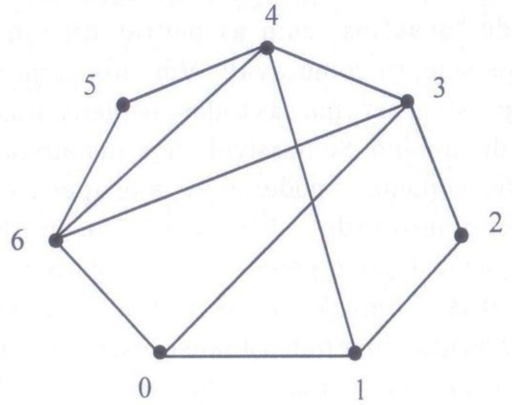

FIGURA 8

A essência da questão em grafos, antes colocada, novamente se repete; pois, para este problema, perguntar "existe uma tal seqüência-resposta que utilize todas as pedras com números distintos?" é, traduzível, à linguagem dos grafos, como "no grafo da figura 8, há percurso que passe por todas as arestas sem repetição de nenhuma?".

Assim, utilizando o mesmo resultado que já nos possibilitou resolver os problemas 3 e 4, chegamos às respostas finais, também de forma simples: é possível! De fato, o grafo da figura 8 possui, exatamente, dois vértices de grau ímpar (0 e 1) e, portanto, dessa forma análoga àquela com que se abordou o Problema 4, temos percurso-resposta 123456036410, que expressa seqüência 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-0, 0-3, 3-6, 6-4, 4-1 e 1-0. Tal seqüência, acrescida das pedras 1-1, 3-3 e 4-4 inicialmente retiradas (conforme já explicado), pode ser vista, como jogo montado, na figura 9.

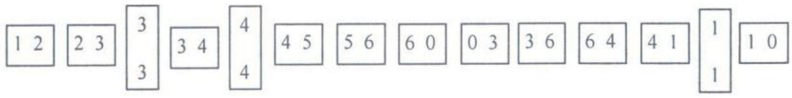

FIGURA 9

De fato, "o conceito de grafo é simples, porém fértil em aplicações e problemas atraentes" (Lima [1988]). Inquestionável! E gostaríamos de apresentar bom número de exemplos, também, nas diversificadas "áreas formais" do conhecimento humano. Há uma "infinidade"! Pelas naturais limitações de espaço aqui, escolhemos apenas um deles, que nos remete à Psicologia Social e que é nosso último problema proposto, muito interessante. Ainda ao final deste item, no entanto, listamos uma "síntese", realmente impressionante, dessa tamanha abrangência de aplicacões dos grafos. E, em nossa *Bibliografia Sugerida*, especificamente no que se refere a tais "áreas formais", o leitor poderá encontrá-las exploradas, principalmente, em Carneiro [1995], Chartrand [1977], La Penha [1983], Lima [1988], Ore [1990], Pitombeira [1987] e Wilson [1990]. Nos seis primeiros, de forma predominante, em contextos mais propriamente ligados a temas formais matemáticos mesmo; no último, ultrapassando tais fronteiras, também em aplicações de explícito teor em outras áreas: Biologia, Química, Geografia, Ciências Sociais, Lingüística...

A essência da abordagem[5] de nosso último problema consta, tanto de [Chartrand], como de [Wilson]. Ampliemos mais nossos horizontes através do

PROBLEMA 6

(leia antes *Sistemas balanceados*, logo após seu enunciado)

Determinado promotor de eventos tem que formar uma equipe para o trabalho de organização de certo número de espetáculos, que incluirá diversas iniciativas e levará tempo bem considerável. Assim, ele está se empenhando em formar uma equipe com boas chances de se manter unida até o final, trabalhar com harmonia e apresentar resultado final com sucesso.

A equipe deve ser constituída de 4 profissionais, a serem escolhidos dentre 6 disponíveis, todos igualmente competentes. Após certa análise,

[5] O problema 6, criado pelo primeiro autor deste artigo para apresentação no II EEMAT, Macaé, outubro/99, teve a colaboração (estudo da abordagem do tema e seu relato em seminário) de Ana Flávia Uzeda dos Santos, aluna do Curso de Graduação em Matemática da UFF e sua orientanda no projeto de extensão "Possibilidades de aplicação dos grafos ao Ensino Fundamental e Médio".

ele já decidiu que Vinicius (V), Marcus (M) e Luciana (L) farão parte da equipe, estando na dúvida, no entanto, quanto à quarta pessoa a ser escolhida: Chico (C), Elis (E) ou Fernando (F). Aconselhado a fazer tal escolha sob a ótica dos sistemas balanceados, resolveu adotá-la e, após obter as informações necessárias, compôs o quadro de relações que se segue.

(a) Relações positivas - VM, VC e MF.

(b) Relações negativas - VL, VE, VF, ML, ME e LC.

(c) Relações neutras - MC, LE e LF.

Qual(ais) desses 3 profissionais poderia(m) vir a ser o 4º membro da equipe?

Sistemas balanceados:

Para duas quaisquer pessoas, estabeleçamos três hipóteses exclusivas para a relação existente entre elas: *positiva* (se há boa afinidade entre elas, trabalham bem juntas, etc.); *negativa* (se ocorre exatamente o oposto do que na anterior); *neutra* ou *indiferente* (se nada de significativo lhe puder ser atribuído, no mesmo sentido).

Considere-se agora a denominação de *sistema social* para qualquer universo de pessoas, munido das relações entre elas, conforme as definimos. Um sistema social é dito *balanceado* se cada relação entre duas pessoas é positiva ou, então, quando se pode dividir esse universo de pessoas em dois grupos, de tal forma que toda relação positiva ocorra entre indivíduos de um mesmo grupo e toda relação negativa ocorra entre indivíduos de grupos diferentes. Nenhuma restrição adicional é imposta.

Alguns psicólogos sociais têm conjecturado que, num sistema não balanceado, há estresse excessivo. Assim, entenda-se (pelo menos, no sentido do enunciado do problema 6) que um tal sistema não tem bom equilíbrio, isto podendo afetar a coesão desse universo de pessoas, ou sua produtividade em grupo, de forma negativa.

Resolução do problema:

Na modelagem, vértices representam pessoas; arestas, relações positivas (+) ou negativas (-). Cada aresta deve ser munida do sinal que a define. Para cada relação neutra, não há aresta ligando os dois vértices correspondentes.

Separadamente, são analisados três grafos (figuras 10, 11 e 12). Nestas figuras, cada linha fechada pontilhada está definindo um grupo[6] de pessoas: as representadas pelos vértices que estão no interior da região delimitada por tal linha.

1ª hipótese (analisando a possibilidade de Chico vir a ser o 4º membro da equipe)

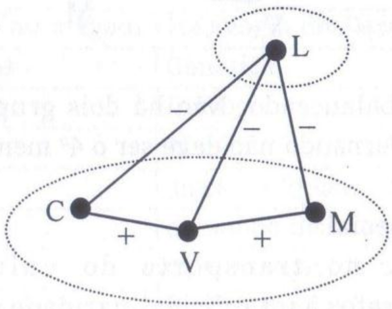

FIGURA 10

O sistema é balanceado. Chico pode ser o 4º membro.

2ª hipótese (analisando a possibilidade de Elis como 4º membro)

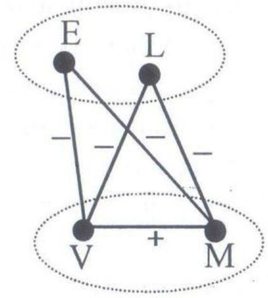

FIGURA 11

O sistema é balanceado. Elis pode ser o 4º membro.

---

[6] O termo *grupo* deve ser entendido no sentido em que aparece na definição de *sistema balanceado*.

3ª hipótese (analisando a possibilidade de Fernando como 4º membro)

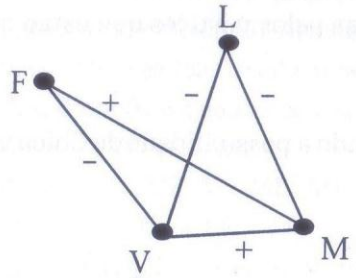

FIGURA 12

O sistema não é balanceado. Não há dois grupos satisfazendo à definição. Portanto, Fernando não deve ser o 4º membro.

Um destaque especial:

Evidentemente, no transporte do universo usual de aplicabilidade dos grafos à interdisciplinaridade e ao cotidiano dos estudantes dos diversos níveis de ensino, surgem questões às quais se deve dedicar especial atenção. Dentre estas, sem dúvida, destacam-se as que se referem ao uso do computador. Tal uso é, relativamente ao que já está consagrado em *grafos e suas aplicações*, inevitável, contínuo, sistemático. Transportando-nos ao Ensino Fundamental e Médio, no entanto, a situação irá se constituir bem diferente, exigindo redirecionamento de objetivos e metodologia (quanto a abordagens com grafos), adequada contextualização por série ou ciclo e, em particular, sensata definição de limites conscientes para a associação dos *grafos e suas aplicações* à máquina: *quando, para quê e como?*

Na verdade, acabará cabendo ao professor, em última análise (mesmo que direcionado por possível planejamento maior em termos de currículo formal), em função das circunstâncias locais, suas próprias habilidades ou limitações, recursos disponíveis, e outras possibilidades da escola ou de seus alunos, sentir a *medida certa* ("do nada ao muito"; e suas dosagens intermediárias) da abordagem computacional no processo educacional em que se envolva. Com sensibilidade, sensatez e criatividade!

Agora, como já adiantado, buscando estimular mais ainda o leitor a consultas em nossa *Bibliografia Sugerida*, listamos diversificados contextos em que se podem encontrar situações-problema modeláveis em grafos. Conscientemente, não adotamos qualquer critério específico de ordenação na lista do quadro que se segue. Para efeito de possível abordagem dos grafos no Ensino Fundamental e Médio, não faria sentido aqui priorizarmos áreas de conhecimento ou ordená-las segundo referenciais *a priori*.

roteiros de passeio ou viagem	Psicologia do Desenvolvimento
moléculas químicas	Genética
plantas de imóveis	Ecologia
redes elétricas	Música
Ciências Sociais	jogos de "quebra-cabeça"
árvore da vida	demanda de energia elétrica
organogramas	minimização de caminhos
árvore de procedimentos ou alocações computacionais	distribuição de serviços: água, luz, gás...
telecomunicações (alocação de freqüências, em geral)	circuitos impressos (componentes eletrônicos)
Lingüística	análise de mapas
"árvores" de decisão, escolha...	coloração de mapas (*)
estruturas rígidas (Engenharia Civil)	jogo de dominó
Arqueologia	saídas de labirintos
códigos	jogo de xadrez
"jogo da velha"	organização de campeonatos
administração de trajetos *ótimos*: vendedor, carteiro, caminhão de lixo...	instalações diversas: elétricas, a cabo...
alocação de horários, atividades...	análise combinatória / probabilidades
sistemas mecânicos, hidráulicos...	poliedros
organização de tráfego	matrizes

(*) Ao registrarmos *coloração de mapas* (tópico em grafos de freqüente recorrência, principalmente, pelo famoso teorema das 4 cores: *todo mapa plano pode ser colorido com, no máximo, quatro cores, de forma que regiões que façam fronteira entre si ganhem cores distintas*), ocorre-nos, inclusive, citarmos Carneiro [1995]:

"A coloração de mapas é apenas um, dentre muitos problemas que podem ser explorados nessa área. A visita aos grafos merece ser feita na era dos computadores, das redes de comunicação e de transportes, e dos intrincados processos decisórios. Há diversas aplicações simples, porém muito interessantes, envolvendo grafos" (Vera Carneiro refere-se ao Ensino Médio).

Conclusão

Em função de tudo que detalhamos ou apenas comentamos, e à luz de nossos três pressupostos, podemos discriminar, distinguindo-os como realmente consistentes, os itens centrais de um forte roteiro de defesa da oportunidade e viabilidade dos *grafos e suas aplicações* para o Ensino Fundamental e Médio [Bria, 1998]:

- a enorme abrangência de possibilidades de aplicação dos grafos em muito diversificadas áreas do conhecimento.

- a extrema facilidade com que inúmeras situações de nosso cotidiano podem ser tratadas através dos grafos de forma bastante acessível aos estudantes desses níveis.

- o inegável *potencial de competência* dessas aplicações para aumentarem o poder de sedução da Matemática sobre nossos alunos, notadamente àqueles que não possuam grandes afinidades com a mesma.

- a natural associação — abordagem opcional nos níveis propostos — dos grafos com o uso do computador, da qual o professor poderia se valer, com sensibilidade e criatividade, na medida certa, em função das possibilidades circunstanciais para a sua realização; por exemplo, até de forma indireta, através de algum trabalho criterioso com algoritmos em prol do desenvolvimento do raciocínio lógico ou para erradicar certas fórmulas matemáticas, trabalho este que poderia constituir-se bastante estimulante, visto que até em nosso cotidiano, naturalmente, já nos movimentamos muito "de forma algorítmica", não nos dando conta disso na maioria da vezes.

- a grande flexibilidade metodológica característica do estudo dos grafos, no sentido de poderem ser introduzidos e trabalhados de várias formas, conforme a ênfase com que se julgue mais conveniente orientar sua exploração: formal ou intuitivamente, através de figuras/diagramas ou estruturalmente, de forma lúdica, a partir da resolução de problemas, associando-os diretamente ao uso do computador ou não...

Sobre o ineditismo da proposta, esta não é inovadora apenas no sentido de indicar assunto, até hoje descogitado em nosso país (salvo em breves manifestações apenas ilustrativas), para o ensino da Matemática dos níveis fundamental e médio. Considerando os padrões em que está sendo fundamentada e estruturada, e será defendida, a proposta é inovadora também, e muito, se comparada à metodologia de aplicabilidade usual dos grafos, como já o comentamos. Da Pesquisa Operacional à Escola. Das muitas preocupações com problemas sobre a produção de uma fábrica à não menor importância de modelagens didáticas de situações-problema em Biologia (ou Química, Geografia, Sociologia, Lingüística...) no processo pedagógico da formação de alunos e cidadãos. Do mundialmente famoso *problema do carteiro chinês* à visão diária do jovem (adolescente, criança) ao trabalho do carteiro de sua própria rua ou ao caminhão do lixo emperrando um pouco o trânsito. Do desafiador *problema do caixeiro viajante* às "amadoras estratégias" de um iniciante no jogo de xadrez. Dos complexos planejamentos e cronogramas de uma grande empresa às corriqueiras dificuldades de cada um de nós com nossos próprios agendamentos de tarefas; ou às nossas críticas sobre a organização dos campeonatos de futebol em nosso país. Do lucro ou do ganho, do ponto de vista "sério", ao divertido *perde e ganha* (em casa, na rua) em muitos jogos tão conhecidos por nós; ou às atividades lúdicas de modo geral.

Não nos pareceu o mais apropriado abordarmos aqui qualquer possível contextualização dos *grafos e suas aplicações* já direcionada (conteúdos ou métodos específicos, alocação por série ou ciclo, etc.) ao Ensino Fundamental e Médio. Isto se indicará, necessariamente, e de forma mais oportuna, na defesa da tese a que se associa este artigo.

Esperamos, no entanto, que bom número de leitores — mesmo os que nem tanto se interessem pelos aprofundamentos da teoria, métodos específicos de resolução em grafos ou uso do computador — sinta-se agora estimulado a um maior contato[7] com os grafos, notadamente no que se relaciona ao exercício da modelagem propriamente dita, buscando explorar (em obras ou artigos que indicamos) algumas outras das "infinitas" possibilidades de sua aplicação, além das que desenvolvemos aqui.

Esperando termos sido felizes em nossa apresentação, no sentido de que muitos dos leitores venham a concordar conosco, concluímos com plena convicção:

Dariam os grafos excelente contribuição à configuração de um ensino da Matemática mais sensato, atraente e produtivo!

[7] O primeiro autor, particularmente, manifesta-se muito receptivo a contatos com os mais interessados (ligados à Matemática ou a outras áreas — interdisciplinaridade!), via e-mail ou correspondência postal, para troca de impressões sobre o tema ou outras iniciativas. [jbria@cruiser.com.br] [Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática, Departamento de Geometria, Rua Mario Santos Braga, s/nº, CEP 24020-140, Niterói (RJ); (21) 717-8269 / 717-8588 (também para fax)]

Bibliografia Sugerida

BRIA, J. Uma introdução à Teoria dos Grafos e suas aplicações. *IV Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC*, UERJ/IPRJ. Nova Friburgo. 1996.

_____. Grafos, por que não? *Caderno de Licenciatura em Matemática/ UFF*, v. 1, p. 39-48. Niterói: EDUFF. 1998.

CARNEIRO, V. C. Colorindo mapas. *RPM - Revista do Professor de Matemática*, SBM, Rio de Janeiro v. 29, p. 31-35. 1995.

CHARTRAND, G. *Introductory graph theory*. New York: Dover Publications, 1977.

LA PENHA, G.M. Euler e a Topologia. *RPM*, Rio de Janeiro, v. 3, p. 12-14. 1983.

LIMA, E. L. Alguns problemas clássicos sobre grafos. *RPM*, Rio de Janeiro, v.12, p. 36-42. 1988.

MACHADO, N. J. *Matemática e realidade*. São Paulo: Cortez Editora, 1994.

MACHADO, N. J. *Epistemologia e didática*. São Paulo: Cortez Editora, 1999.

ORE, O. *Graphs and their uses*. Revisado e atualizado por Robin J. Wilson. Washington: The Mathematical Association of America, 1990.

PATERLINI, R.R. Fórmula versus Algoritmo na resolução de um problema. *RPM*, Rio de Janeiro, v. 27, p. 27-33. 1995.

PITOMBEIRA, J. B. O Problema das ligações de água, luz e telefone: uma aplicação da fórmula de Euler. *RPM*, Rio de Janeiro, v. 11, p. 9-16. 1987.

SANTALÓ, L. A. Matemática para não-matemáticos. Conferência inaugural do I Congresso Íbero-Americano de Educação Matemática, Sevilha, Espanha. *In:* PARRA, Cecília, SAIZ, Irma (Org.). *Didática da Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 11-25. 1990.

SANTOMÉ, J. T. *Globalização e interdisciplinaridade*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

WILSON, R.J., WATKINS, J.J. *Graphs: an introductory approach*. New York: John Wiley. 1990.