
As Intuições de Alunos de 7^a Série Sobre Intervalo¹

**DORA SORAIA KINDEL, JANETE BOLITE FRANT E
JOAQUIN R. GIMENEZ**

RESUMO

Este artigo trata da análise de uma das atividades desenvolvidas numa turma regular de 7^a série da Escola Senador Correia no ano de 1996. O estudo de caso foi desenvolvido a partir de uma seqüência de atividades para discutir a idéia intuitiva de densidade no conjunto dos números racionais. Como parte integrante deste conceito achamos oportuno identificar as intuições dos alunos sobre intervalos, levando em conta o caso contínuo, apresentado neste trabalho, e o discreto. A observação do caso relatado foi possível porque as aulas foram gravadas em áudio e os registros escrito dos alunos recolhidos.

INTRODUÇÃO

Na primeira fase do ensino fundamental, o estudo dos conjuntos numéricos se resume a algumas propriedades dos números naturais. As frações, quando introduzidas no 2^o ciclo, são apresentadas de forma isolada como se fossem um ente qualquer e não um número. No decorrer da escolaridade, o mais comum é a apresentação do conjunto dos inteiros como resposta a impossibilidade de se realizar a subtração $2 - 5$ no conjunto dos números naturais; analogamente ocorre com o conjunto dos racionais que é introduzido quando ocorre a impossibilidade de dividir 2 por 5 e mais tarde quando aparece a $\sqrt{2}$ surge o conjunto dos reais.

¹ Atividade desenvolvida para a pesquisa da dissertação de mestrado intitulada "Discutindo os racionais na 7^a série visando a noção de densidade" apresentada na USU - 1998.

Visando estudar o conjunto dos números racionais no 3º e 4º ciclos levantamos, a partir da tese de Gimenez, algumas idéias consideradas fundamentais: intervalos, cotas, máximos e mínimos, interpolação e densidade.

Neste artigo, nos deteremos na análise sobre intervalo e interpolação. Fomos buscar nos livros didáticos se existiria alguma abordagem destes temas. Na análise de três coleções de livros didáticos, dentre os mais adotados pelas escolas da Cidade do Rio de Janeiro, pudemos constatar que o tópico intervalos é ignorado ou é apresentado na reta numérica para discutir a presença dos números irracionais e a sua localização. Não encontramos atividades para desenvolver este conceito.

Sabemos que o livro didático é, em geral, o único instrumento utilizado pelo professor em sala de aula, esta visão é corroborada pela equipe de Avaliação do Livro Didático do MEC.

O esquema abaixo apresenta os aspectos sobre intervalos que são tratados nos livros didáticos analisados.

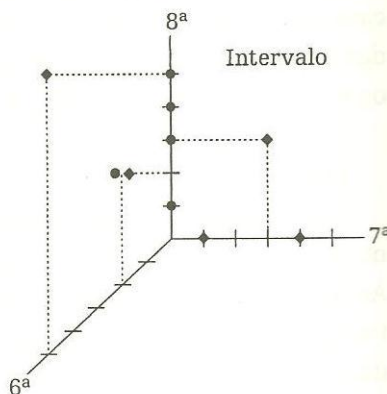
O esquema ao lado apresenta de forma resumida como este conceito é tratado nas diferentes coleções acima

- - Coleção A
- ▲ - Coleção B
- ◆ - Coleção C

Estas marcações foram feitas levando em conta as tabelas e verificando a presença do item. Assim, os pontos 1,2,3,4,5 de cada eixo correspondem respectivamente à:

definição, situação problema, diferentes representações, diferentes aspectos dos racionais, ligações entre os diferentes conceitos. A coleção B não apresenta este conceito e a coleção C \blacklozenge (0, 1, 0) define-o na 7ª série.

Além da análise de extratos de livros-textos de Matemática de 7ª série e contíguos, desenvolvemos um estudo de "caso". Convém ressaltar que estávamos mais interessados no "como" e no "por que" do que no "quantos".



Este estudo se realizou em uma escola particular de classe média alta da cidade do Rio de Janeiro, em uma turma de 7ª série com 18 alunos entre 13 e 15 anos. A maioria dos alunos desta turma estava na escola desde a pré-escola (as exceções eram dois alunos reprovados na série no ano anterior) e era moradora do bairro onde a instituição se situa.

A coleta de dados constou de diário de campo, registro escrito das atividades individuais e em grupo, gravações em áudio dos trabalhos desenvolvidos pelo pequeno grupo e das discussões da turma toda.

A partir da análise do material coletado dos alunos apresentaremos:

AS INTUIÇÕES DOS ALUNOS SOBRE INTERVALO NO CASO CONTÍNUO

Elaboramos atividades onde foi possível levantar questões para identificar e analisar as idéias dos alunos sobre intervalo. Durante o processo de trabalho outras atividades foram sendo elaboradas com o intuito de perceber melhor a concepção dos alunos sobre o conceito. Inicialmente foram elaboradas duas atividades: uma levando em conta o caso contínuo e a outra o discreto. Como ponto de partida para o caso contínuo optamos por adaptar uma atividade apresentada por Hershkowitz em um minicurso na Universidade Santa Úrsula em 1993 e que foi chamada de "quadrado".

Pretendíamos identificar se os alunos reconhecem um intervalo, se estabelecem o valor máximo e mínimo e como falam sobre estas idéias.

QUADRADO (ATIV1-A)

Dado um quadrado de lado 10 cm, calcule sua área. Retire deste quadrado um quadrado de lado qualquer.

- a) Desenhe a situação dada.
- b) Determine a área do que sobra. Justifique.
- c) Qual a área que pode ser retirada do quadrado inicial? Justifique.
- d) Qual a maior área que pode ser retirada do quadrado inicial dado?

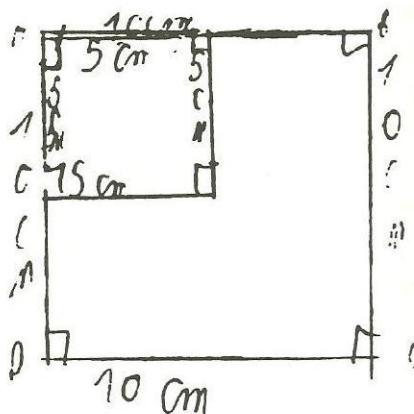
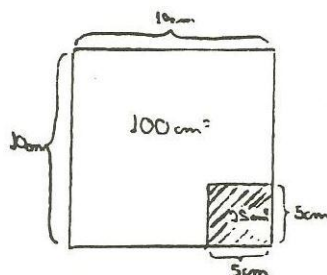
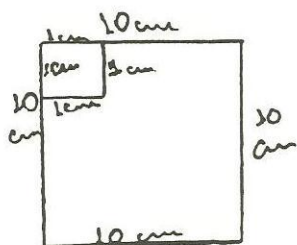
Por quê? (Kindel, 1998, pág 110)

Como dinâmica de desenvolvimento deste trabalho foi proposto que os alunos primeiro respondessem a ficha individualmente para

depois discuti-la em grupos de três ou quatro indivíduos, composição aleatória.

A análise a seguir procura revelar, além das ações dos alunos, a intervenção da professora no pequeno grupo. Observamos que os alunos não se preocuparam em representar acuradamente o quadrado com 10 cm de lado, embora o fizessem para o que estava sendo retirado, um quadrado de exatamente 1 cm de lado.

Uma outra representação do problema tinha como referencial o quadrado dividido em quatro partes, de modo que cada quadrado valesse 25 cm^2 , uma configuração diretamente relacionada ao modo deste aluno entender o problema. O desenho, simultaneamente representava o seu pensamento e o constituía, como veremos nas transcrições a seguir quando este aluno só admitia a divisão do quadrado proposto em quatro partes.



L1. F — Não, determine os valores possíveis para o quadrado, para o lado retirado.

L2. PV — 25.

L3. A — 25? Por que 25?

L4. PV — *Porque $25 + 25 + 25 + 25$ é igual a 100.*

L5. PV — *Desse quadrado, qual o maior que ele pode formar?*

L6. A — *99,9 até zero vírgula.*

L7. Q — *Não, ele está falando dos lados que formam o quadrado maior que pode ser tirado.*

L8. PV — *Não é 25?*

L9. Q — *É 25, porque o maior quadrado que pode ser tirado daqui é 25.*

L10. PV — *25, porque quatro vezes 25 é igual a 100 você não pode passar de 25 senão não vai dar conta certa. E nem três porque nenhum é quadrado. Tem que ser 25, porque quatro vezes 25 dá cem.*

L11. PV — *Porque se você fizer quatro quadrados com 25 vai dar 100; três quadrados de 25 não vai dar cem.*

L12. PV — *Se você colocar aqui vai ser 25, mas se você botar no meio não vai ser 25, se você esticar mais um pouco vai virar retângulo.*

L13. A — *Agora entendi.*

Observamos a diversidade na resolução do mesmo problema, enquanto um aluno tem seu núcleo de pensamento calcado na divisão da figura em quatro quadrados de 25cm^2 , a serem retirados, um outro pensa no quadrado a ser retirado que vai se ampliando, podendo tomar qualquer valor entre zero e cem. Estes dois pontos de vista fomentaram a discussão por um longo período. PV defende o ponto de vista de serem quatro quadrados e quando sai de seu núcleo de pensamento PV só consegue admitir, com restrições, casos isolados de quadrados que podem ser tirados.

L14. Q — *Qual a maior área que pode ser tirada?*

L15. F — *Determine a área que sobra. Tem que saber qual é...*

L16. A — *Não é, tenho certeza que é x , só que não sabemos quanto é.*

L17. PV — *Agora aqui fica só 100 menos x ? [pergunta indignado]*

L18. A — *É porque ninguém sabe quanto é o quadrado de um que vai tirar.*

L19. PV — *Como?*

L20. A — *Eu sei, mas não é para medir.*

L21. *Se você tirar a metade, você sabe quantos tem, você só não sabe quanto vale.*

A professora questionava essas respostas de modo a trazer o restante do grupo para discussão e identificar os diferentes núcleos de pensamento que eram defendidos

L22. P^a — *Por quê todos escreveram cem menos x na área que sobra?*

L23. A — *Porque x pode ser o número do quadrado que foi retirado, pode ser 99.*

L24. Q — *Eu não botei isso não, eu botei que esse é um.*

L25. A — *Ele estipulou que seja um, entendeu? Só que o certo é não estipular número nenhum, estipular x.*

L26. Q — *Não, ele pode estipular até o 25.*

L27. A — *Por que até o 25?*

L28. PV — *Porque 25 é o maior número do quadrado que pode tirar do quadrado 100.*

L29. *É o maior.*

PV retorna ao quadrado de área 25cm^2 , identificando que havia um impasse no interior do grupo com dois focos de discussão: um que apontava para o maior quadrado a ser retirado como sendo 25 e o outro para a possibilidade de variar este valor.

L30. P^a — *Você não pode tirar 35 do 100?*

L31. — *Claro que pode!*

L32. PV — *Poder, pode, mas não vai ficar tudo exato.*

L33. — *Claro que vai, gente! Por isso que eu [é interrompida]*

A representação dos quatro quadrados influi decisivamente na sua argumentação. Para ele, 25 é o maior valor que pode ser tirado, porque 100 dividido por 4 dá 25; dividir por 25 dá um número exato, o que não ocorreria dividindo por 35.

Esta representação é aparentemente abandonada pelo grupo, mas a análise das fitas de áudio e do diário mostram que a mesma é retomada várias vezes. Um fator que contribuiu para esta discussão era o da falta de clareza de como se calcular área e o perímetro do quadrado. Esta confusão aparece na discussão do grupo conforme registro abaixo:

L34. PV — *Calcular a área: dez mais dez mais dez [é interrompido por alguém do grupo]*

L35. Q — *É só tirar um só.*

L36. A — *Eu só não sei se é vinte ou se é dez*

L37. Q — *A área dele é isso vezes isso, vezes isso, vezes isso.*

L38. F — *Não. É isso vezes isso.*

L39. A — *Ah é. E isso aqui, e isso daqui é o perímetro.*

L40. F — *Não, é isso vezes isso, o perímetro é isso, mais isso, mais isso, mais isso.*

L41. A — *É mais, ele quer vezes.*

F corrigiu Q (L-20) chamando-lhe a atenção por confundir área e perímetro. A concordou com F (L21) demonstrando estar acompanhando a discussão do grupo. No entanto, para PV a maior área a ser retirada continuava sendo 25. O grupo continuou a discussão e chamou a professora para ajudá-los. Após o relato do grupo, a professora observou o registro e interveio.

L42. P^a — *Você não pode tirar 35 de 100?*

L43. PV — *Poder pode mas, não vai ficar tudo exato!!!*

Os outros alunos contrapuseram o argumento de PV, usaram outros valores que poderiam ser retirados do quadrado e afirmaram ainda que aqueles valores deveriam estar entre zero e cem.

L45. A — *Todos!*

L46. T — *De zero a 100.*

L47. F — *Tanto é que nós colocamos aqui. De zero a cem.*

L48. A — *Cem menos os valores possíveis de xis.*

L49. P^a — *Quais são os valores possíveis entre zero e cem?*

L50. A — *Vários! A gente pega e subtrai.*

L51. F — *Até 100 pode, até que a gente botou xis. Independentemente do valor que tem que subtrair!*

L52. A — *A gente botou 100 menos x. Xis é a área disso daqui tá? A área do quadrado, não importa, não importa se a área do quadrado for um, ou cinco ou vinte, entendeu?*

Para o cálculo da área da figura que sobra chegaram a fórmula $100 - x$.

É interessante observar que, para eles, quando não se sabe o que se tira, pode-se representar isto por uma incógnita. Partindo desta idéia, representaram o que sobrava como sendo $100 - x$, onde $x = l^2$, percebendo também que este x não pode ser negativo porque não existe medida de área negativa.

L51. A — *Menos xis!*

L52. Q — *Você não sabe quanto tirou!*

L53. PV — *Não?!*

L54. F — *Não. Você não sabe quanto você tirou.*

L55. A — *É pois é. Menos x.*

L56. PV — *A pouco podia tirar tudo, agora não pode tirar nada.*

L57. A — *É pode tirar tudo.*

L58. F — *Pode tirar nada.*

L59. A — *Pode tirar tudo, pode tirar nada.*

L60. F — *Determine a área do que sobra. 100 menos x, dez menos x, não 100 menos x, porque nós não sabemos o número, entendeu.*

PV continuava preso a sua representação. A idéia de que o maior valor possível é 100 estava muito clara para o restante do grupo, porque não se podia tirar mais do que existia no quadrado, analogamente o menor valor era zero.

Apesar dos alunos afirmarem que a área a ser retirada pudesse ser um valor entre zero e cem, dois dos alunos do grupo usaram um exemplo particular para responder. Neste caso, usaram como exemplo 1 cm^2 e 25 cm^2 , enquanto que F representou das duas formas, $100 - x$ e 99 cm^2 .

Não conseguiram entender a diferença entre *qual a maior área que pode ser tirada* de *quais os valores que podem ser tirados*. O valor máximo do intervalo e o próprio intervalo se confundem.

L61. A — *Eu não entendi essa. Diferenciar esta desta.*

L62. F — *Eu também não!*

L63. PV — *Eu vou apagar tudo, tá legal!?*

A professora entrevistou pedindo que encontrassem vinte valores que satisfizessem a condição dada no problema. Os alunos montaram as seguintes tabelas:

AREA QUE TIRA	AREA QUE SOBRA
1	99
2	98
4	96
5	95
25	75
40	60
50	50
30	70
33	67
70	30
62	38
47	53
38	62
24	76
21	79
88	12
89	11
79	21
10	90
5	95

valor	A ser retirada	sobra
100cm ²	1 cm ²	99 cm ²
100cm ²	2 cm ²	98 cm ²
100cm ²	3 cm ²	97 cm ²
100cm ²	4 cm ²	96 cm ²
100cm ²	5 cm ²	95 cm ²
100cm ²	6 cm ²	94 cm ²
100cm ²	7 cm ²	93 cm ²
100cm ²	8 cm ²	92 cm ²
100cm ²	9 cm ²	91 cm ²
100cm ²	10 cm ²	90 cm ²
100cm ²	11 cm ²	89 cm ²
100cm ²	12 cm ²	88 cm ²
100cm ²	13 cm ²	87 cm ²
100cm ²	14 cm ²	86 cm ²
100cm ²	15 cm ²	85 cm ²
100cm ²	16 cm ²	84 cm ²
100cm ²	17 cm ²	83 cm ²
100cm ²	18 cm ²	82 cm ²

1 → 1	99
2 → 2	98
3 → 3	97
4 → 4	96
5 → 5	95
6 → 6	94
7 → 7	93
8 → 8	92
9 → 9	91
10 → 10	90
1 → 11	89
2 → 12	88
3 → 13	87
4 → 14	86
5 → 15	85
6 → 16	84
7 → 17	83
8 → 18	82
9 → 19	81
20 → 20	80

100

1x1=	99
2x2=4	96
4x4=16	80
5x5=25	75
6x6=36	64
7x7=49	51
8x8=64	36
9x9=81	19
15x15=225	97,75
25x25=625	

LADO	ÁREA QUE SOBRA
1) 0	100
2) 1	99
3) 2	96
4) 2,5	95
5) 3	94
6) 3,5	93
7) 4	92
8) 4,5	91
9) -	90
...	...

As tabelas dos alunos envolveram duas ou três colunas, evidenciando o modo como pensavam resolver este problema.

Duas Colunas	- Área que tira e Área que sobra: $f(x) = 100 - X$. - Lado do quadrado a ser retirado e Área que sobra.
Três Colunas	- Lado; Área que tira e Área que sobra. - Valor máximo da área, valor máximo da área a ser retirada e valor do que sobra, calculado por (1ª coluna - a 2ª coluna)

Num dos grupos houve a discussão sobre o que deveria ser registrado na tabela, se a área ou o lado do quadrado a ser retirado. Nesse momento surgiu a necessidade de se fazer um cabeçalho para a tabela, a fim de esclarecer o que estava sendo informado, evitando assim confusões de leituras.

Quando se perguntou aos alunos quantos números existiam entre dois números inteiros quaisquer era comum obter como resposta "são infinitos". A professora observou que nas tabelas os alunos usavam apenas números inteiros apesar de afirmarem que existiam infinitos números entre dois inteiros quaisquer. Vimos que o paradigma do número natural pode ser "transferido" mais facilmente para os números inteiros do que para os racionais. A intervenção da professora foi a de incluir nesta atividade o pedido de vinte valores intermediários no mesmo intervalo para forçar os alunos a pensar nos racionais.

No entanto, os alunos optaram em trabalhar com o intervalo $[0, 100]$ referente a área do quadrado no lugar do intervalo $[0, 10]$ dos lados, o que permitiu que continuassem trabalhando com os números naturais.

Isto levou a elaboração de outras situações que provocassem o aparecimento de números racionais entre dois números inteiros.

ATIVIDADE (ATIV-5)

1) Complete as seqüências abaixo com os números que faltam.

a) $\boxed{2} \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow \boxed{5}$

b) $\boxed{2} \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow \boxed{5}$

c) $\boxed{2} \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow \boxed{5}$

d) $\boxed{2} \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow \boxed{5}$

e) $\boxed{2} \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow \boxed{5}$

Explique como fez o item "c"?

Repare que a atividade foi elaborada a partir da idéia usada pelos alunos de que entre dois naturais quaisquer é possível determinar um número finito de naturais.

CONCLUSÕES

INTUIÇÕES E DISCUSSÕES DOS ALUNOS

Estas atividades apontam para algumas idéias que os alunos discutiram sobre:

- Valor máximo / mínimo

Era mais fácil visualizar e retirar um quadrado de lado 10 do que um quadrado de lado zero. O zero na história da Matemática também não apareceu com facilidade.

- Intervalos

Os alunos falaram sobre interpolação, aberto, fechado. Chamamos a atenção que estes conceitos de modo geral não são discutidos nestas séries e no entanto são fundamentais na construção da idéia sobre densidade no conjunto dos números racionais.

CONTRATO DIDÁTICO, PAPEL DE CADA UM NA SALA DE AULA

O contrato didático estava claro para todos:

- O papel do aluno era trabalhar nas atividades em pequeno grupo, discutir e sintetizar, levar idéias para o grupão.

- O papel da professora era elaborar atividades, atuar como dinamizadora das discussões. Por exemplo, quando a professora observou que os alunos não haviam usado valores decimais, propôs então que encontrassem vinte (20) valores possíveis de variação para a medida do lado do quadrado que poderia ser retirado. Desta forma, forçava os alunos a falarem sobre "o que estava entre".

SUGESTÕES

Sugerimos que o trabalho com os conjuntos numéricos não se restrinja a visão utilitária anteriormente citada (das impossibilidades). Mas que sejam estudadas as propriedades características de cada conjunto e propriedades que sejam semelhantes aos conjuntos já estudados. E que o estudo dos números racionais recebam maior atenção.

BIBLIOGRAFIA

- BIGODE, Antônio J.L. *Matemática atual*, São Paulo: Edit. Atual, 1994. Vol:5,6,7e 8.
- COLL, César. *Psicologia e Currículo: uma aproximação psicopedagógica à elaboração do currículo escolar*. 2ª ed. São Paulo: Ática, 1987. Série Fundamentos, 190 p.
- GIMENEZ, Joaquin R. *Inonovacion Metodologica de la Didactica Especial del Numero Racional Positivo: Evaluacion. "Background" del Alumnado*. Universidad Autonoma de Barcelona, 1991. Cap. III, p. 196 – 455.
- _____, 1991. *Inonovacion Metodologica de la Didactica Especial del Numero Racional Positivo: Una Propuesta Curricular para la Ensenanza - Aprendizaje de las Fracciones en la Formacion Basica* Universidad Autonoma de Barcelona, Cap. IV, p. 349 – 455.
- IEZZI, Gelson e Machado, O. D. *Matemática e Realidade*. São Paulo: Atual Ed., 1991 e 1996. vol: 5,6,7e 8.
- IMENES, L. M. e Lellis, Marcelo. *Matemática*. São Paulo: Edit. Scipione, 1997. vol: 5,6,7e 8
- LINS, Rômulo C., Joaquim Gimenez. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus/SBEM, 1997. Coleção Perspectivas em Educação Matemática, 170 p.
- KINDEL, Dora Soraia. *Discutindo os racionais na 7ª série visando a noção de densidade*. Rio de Janeiro, 1998, 214 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Educação Matemática - Universidade Santa Úrsula.
- HERSHKOWITZ, Rina , Arcavi, A . *Geometrical Adventures in Functionland, Mathematics Teacher*. 1993. p 346- 352.
- KIEREN, Thomas E. *Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and formal Developmen*. NCTM, New York. P.162 - 181