Dízimas Periódicas e Uso da Calculadora

José Paulo Q. Carneiro

Em uma prova de concurso realizada recentemente, destinado principalmente a professores de Matemática, figurava a seguinte questão:

Os números racionais a e b são representados, no sistema decimal, pelas dízimas periódicas $a = 3{,}0181818... = 3{,}0\overline{18}$ e $b = 1{,}148148... = 1{,}\overline{148}$. Encontre, justificando, uma representação decimal de a-b.

Como a e b são racionais, também o é a-b e, portanto, sua representação decimal é periódica. Na prova, era permitido o uso de calculadora. Mas por meio da calculadora jamais se descobrirá o período, pelo menos com a certeza exigida pelo "justifique". Além disto, a calculadora não conseguirá nem mesmo dar uma idéia do período, se ele for muito longo. De fato, o período pode ter um comprimento maior do que o número de dígitos que a calculadora exibe no visor.

Um primeiro expediente que poderia ocorrer seria fazer a subtração por meio do esquema usado habitualmente para decimais finitos. Isto funcionaria bem em casos mais simples. Por exemplo:

$$\begin{array}{r} 0{,}444... \\ \underline{-\ 0{,}333...} \\ 0{,}111... \end{array}$$

o que estaria correto, pois $\frac{4}{9} - \frac{3}{9} = \frac{1}{9}$.

Mas no caso em questão, o desencontro entre os períodos das duas dízimas apresentadas dificulta o emprego desta estratégia (a qual, aliás, precisaria ser discutida em termos conceituais). Vejamos:

$$\begin{array}{r} 3{,}018181818\ldots \\ -\ 1{,}148148148\ldots \\ \hline ?? \end{array}$$

Como a subtração usual é feita da direita para a esquerda, não se sabe bem por onde começar, antes de descobrir o período.

Por conseguinte, o caminho natural é calcular as geratrizes de a e b, subtrair as frações correspondentes, e então encontrar uma representação decimal para essa fração.

Utilizando este procedimento, encontra-se:

$$a - b = 3 + \frac{18}{990} - \left(1 + \frac{148}{999}\right) = 1 + \frac{1292}{1485} = \frac{2777}{1485}$$

Neste ponto, o método mais usado por todo mundo é dividir 2777 por 1485 (ou 1292 por 1485, ganhando uma etapa) pelo algoritmo tradicional, e aguardar o primeiro resto que repete. Deste modo, obtém-se:

$$\begin{array}{llllllllll|l} 1 & 2 & 9 & 2 & 0 & & & & & & 1485 \\ \cline{11-11} & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & & & & & 0{,}0700336 \\ & & & & & 5 & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & & & 5 & 4 & 5 & 0 & \\ & & & & & & & 9 & 9 & 5 & 0 \\ & & & & & & & & 1 & 0 & 4 \quad 0 \end{array}$$

Como repetiu o resto 1040, a partir daí, os algarismos 7, 0, 0, 3, 3, 6 irão se repetir. Logo: $a - b = 1{,}8\overline{700336}$.

Vamos agora fazer alguns comentários:

1 - Algumas pessoas envolvidas no processo de aprendizagem da Matemática (alunos, professores, pais, etc.) expressam às vezes a crença de que, com o advento da calculadora, nunca mais haverá ocasião de usar o algoritmo tradicional da divisão. Alguns até usam isto como um argumento para proibir o uso da calculadora em certas fases iniciais da aprendizagem: "é necessário primeiro que o aluno aprenda o algoritmo tradicional, e só depois lhe será permitido usar

a calculadora; senão, ele não terá motivação para aprender tal algoritmo".

Na realidade, o exemplo aqui tratado mostra que nós, professores, temos é que exercer nossa criatividade para criar problemas desafiadores, que coloquem em cheque até mesmo a calculadora, deixando claras as suas limitações, ao invés de proibir o uso da calculadora, o que é uma atitude antipática, repressora, e totalmente contrária ao que um aluno espera de um professor de Matemática. De fato, para um leigo ou iniciante em Matemática, nada mais "matemático" do que uma calculadora, e ele espera que um professor vá iniciá-lo ou ajudá-lo com essa ferramenta, e não proibi-lo de usá-la.

Note-se também que, mesmo usando o algoritmo tradicional da divisão, como fizemos, a calculadora permanece útil para efetuar as multiplicações e subtrações envolvidas no processo, minorando as possibilidades de erro, e poupando trabalhos repetitivos e inúteis.

2 - O trabalho de divisão ficaria simplificado, se tivéssemos observado que o divisor 1485 tem o fator comum 5 com a base do sistema decimal (um detalhe nem sempre lembrado). Deste modo:

$$\frac{1292}{1485}=\frac{1292}{5x297}=\frac{1}{10}x\frac{2584}{297}=\frac{1}{10}x\left(8+\frac{208}{297}\right)=0{,}8+\frac{1}{10}x\frac{208}{297}$$

$$=0{,}8+0{,}0\overline{70336}=0{,}8\overline{700336}$$, pois:

$$\begin{array}{lllllll|l}
2 & 0 & 8 & 0 & & & & 297 \\ \cline{8-8}
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}70336 \\
 & & & & 1 & 0 & 9 & 0 \\
 & & & & & 1 & 9 & 9 \; 0 \\
 & & & & & & 2 & 0 \; 8
\end{array}$$

Os números envolvidos no algoritmo da divisão ficam menores.

3 - Existiria um outro método para encontrar uma representação decimal de $\frac{208}{297}$ (ou de $\frac{1292}{1485}$, mas já vimos que basta o primeiro), que não fosse o algoritmo tradicional da divisão? A resposta é sim.

Basta tomar as sucessivas potências de 10, a saber: 10, 100, etc., até que encontremos uma que deixe resto 1, quando dividida por 297. Não é difícil fazer isto, experimentando com a calculadora:

$10^3 = 3 \times 297 + 109$; $10^4 = 33 \times 297 + 199$;
$10^5 = 336 \times 297 + 208$ $10^6 = 3367 \times 297 + 1$

A partir daí, obtém-se: $\frac{1}{297} = 3367 \times \frac{1}{10^6 - 1}$, e portanto:

$$\frac{208}{297} = 208 \times 3367 \times \frac{1}{10^6 - 1} = 700336 \times \frac{1/10^6}{1 - 1/10^6} = \frac{700336}{10^6}$$

$$\left(1 + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{12}} + \cdots\right) = 0{,}700336700336700336\ldots = 0{,}\overline{700336},$$

onde a última passagem vem da propriedade das progressões geométricas infinitas:

$$1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q}, \text{ quando } -1 < q < 1.$$

Observe que o período da dízima tem comprimento 6, que é justamente o expoente da menor potência de 10 que deixa resto 1, quando dividida por 297.

4 - Pode-se perguntar: como temos certeza de que, ao testar as potências de 10, vamos acabar encontrando uma que deixe resto 1, quando dividida por 297? A resposta está em um famoso teorema de aritmética ("Teoria dos Números"), devido a Euler: "quando os inteiros a e n são primos entre si, então $a^{\varphi(n)}$ deixa resto 1, quando dividido por n". Aqui, $\varphi(n)$ representa o número de inteiros positivos menores que n e primos com n. No presente caso, 297 e 10 são primos entre si (para isto, foi importante antes retirar o fator 5), e $\varphi(297) = 180$. Portanto, pelo Teorema de Euler, 10^{180} deixa resto 1, quando dividido por 297.

Mas isto não quer dizer que 180 seja o menor expoente para o qual isto acontece. De fato, como vimos, isto já ocorre para 6, que é um divisor de 180. De um modo geral, bastaria experimentar como expoentes os divisores de 180. Por que tem que ser um divisor de 180? Porque se m for o menor inteiro positivo tal que 10^m deixa resto 1, quando dividido por 297, então, dividindo 180 por m, obtém-se: $180 = qm + r$, onde

$0 \leq r < m$. Mas então: $10^{180} = (10^m)^q \times 10^r$, o que acarretaria que 10^r também deixaria resto 1, quando dividido por 297, o que só é possível se $r = 0$, pela definição de m.

E como se sabe que $\varphi(297) = 180$? Bom, pode-se contar um a um os inteiros positivos menores que 297 e primos com 297, a saber: 1, 2, 4, 5, 7, etc., até 296, e verificar que são 180. Mas é claro que Euler não concordaria com isto. É um exercício não trivial de Aritmética mostrar que, quando o natural n se decompõe em fatores primos na forma $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$, então: $\varphi(n) = p_1^{n_1-1}(p_1-1)\, p_2^{n_2-1}(p_2-1) \ldots p_k^{n_k-1}(p_k-1)$. No nosso caso: $\varphi(297) = \varphi(3^3 \times 11) = 3^2(3-1) \times 11^0 (11-1) = 180$.

Os fatos citados nesta última seção estão entre os mais curiosos da Teoria dos Números, e podem ser encontrados em qualquer compêndio sobre o assunto. Teremos atingido nosso objetivo, se tivermos conseguido aguçar a curiosidade do leitor para saber porque funcionam estas propriedades, e para conhecer suas inesperadas aplicações, como, por exemplo, à Criptografia, muito em voga atualmente devido à necessidade de segurança em senhas bancárias e da Internet (veja S.C.Coutinho, Números Inteiros e Criptografia RSA, IMPA-SBM, Série de Computação e Matemática, 1997).