Infinitésimos: Quem Ri Por Último?[1]

ROBERTO RIBEIRO BALDINO

Quando ingressei na Escola de Engenharia da UFRGS (então URGS) em 1956, ainda não haviam inventado o xerox. As apostilas eram tratadas com carinho e passadas todos os anos de veteranos a calouros. Ficavam amareladas e eram chamadas sebentas. "Herdei" a sebenta de cálculo de meu irmão que fizera o curso alguns anos antes. Ali encontrava frases que não entendia: "(...) uma integral definida é uma função de seus limites e, portanto, um número, enquanto que a indefinida, como vimos, é função de x." [Lassance, 19.?: 404]. Derivadas apareciam no capítulo IV que era precedido por um parágrafo sobre ordens de grandeza de "infinitésimos e infinitos". Na sebenta, infinitésimos eram definidos como funções com limite zero, mas nas aulas práticas este conceito era reforçado com explicações assim: "Um infinitésimo é uma variável que tende a zero, porém, tomada no momento em que se anula". Essas explicações me deixavam confuso. Muitos colegas desistiam de entender e partiam para decorar tudo. Eu procurava meu caminho construindo um matagal de modelos locais, com fraco relacionamento entre si.

Em 1958 o Presidente Juscelino criou institutos básicos associados às universidades e em 1959-60 tivemos uma turma de bolsistas fazendo um curso de Análise Matemática com o Professor Ernesto Bruno Cossi. A referência básica era o livro de Análise de Apostol, recém editado. As primeiras palavras do Professor Cossi foram: "Suporemos conhecidas as propriedades dos números racionais". Em seguida escreveu: "Definição: Um corte de Dedekind é...". Na terceira ou quarta aula, ele disse algo assim: "Sejam números racionais os cortes racionais". Aquilo me deixou espantado. Como pode um corte ser um número? Porém,

[1] Artigo apresentado em Palestra no VI ENEM, 21-24 de julho de 1998, São Leopoldo, RS, UNISINOS.

durante as férias de julho decidi estudar tudo com muito cuidado. Lembro-me do momento em que me dei conta de que havia um único princípio lógico regendo as relações entre os modelos locais que eu armara. As definições perderam o caráter de descrições e adquiriram o caráter de estipulações; a Matemática passou a fazer sentido. Daí em diante, tudo tinha de ser rigorosamente definido e demonstrado.

Ente os bolsistas comentávamos com malícia e, às vezes, com maldade, sobre o curso de Cálculo que tínhamos tido alguns anos antes. Infinitésimos? Ha ha ha... Isso não existe. Entre o zero e os positivos nada há. A linha reta é feita de números reais. Infinitésimos são coisas do passado, incoerentes, não têm sentido. Uma integral não é uma soma de infinitas parcelas infinitesimais. É heresia perscrutar o símbolo $\int_a^b f(x)dx$. O dx é apenas um artifício gráfico para facilitar a troca de variáveis; tem o mesmo estatuto da chave que se coloca sob o divisor nas contas de dividir. A teoria de Weierstrass tinha se tornado nosso modo de pensar. Tudo tinha de ser expresso em termos dela.

Entretanto, nos livros de Física, especialmente nos de Mecânica do Contínuo, lá estavam os deslocamentos dr, infinitamente pequenos, os elementos infinitesimais de tempo, área e volume. Não pode, pensava eu. Isso tem de ser entendido de outro jeito. No IMPA aprendi que o dx era uma forma diferencial. Debruçava-me sobre livros matemáticos que desenvolvem construções "rigorosas" para a mecânica analítica e mecânica do contínuo. Lá o d denota a diferencial de uma função entre variedades. Mas dr? Diferencial de quê? Custei muito a descobrir que o infinitésimo dr é a diferencial de uma carta de uma variedade riemaniana. Os autores de Física e de Matemática não reconhecem, um, a problemática do outro.

> *"É assim que, desde há um século e de maneira ainda mais flagrante, desde há quarenta anos o divórcio se consumou: de um lado os matemáticos puros que perseguem seus próprios problemas pelas nuvens e, de outro, os físicos que, ignorando d'Alembert e sobretudo Weierstrass, continuam a praticar o cálculo dos infinitamente pequenos, troçando desse rigor matemático, a seus olhos puramente ideológico"* [Harthong, 1983: 1194].

Como esse divórcio se reflete na Educação Matemática? Como se pode atenuar seus efeitos?

Os alunos continuam a pensar como os físicos. Acham que 0,999... é menor que um e, quando descrevem o que pensam, embora sem usarem o termo, indicam que vêem ali uma diferença infinitesimal. Outra aluna me disse que o limite de 1/n quando n tende ao infinito é muito pequeno, mas não e zero; "é zero vírgula zero, zero, zero..., infinitos zeros, depois, 1". Os alunos vivem imersos em uma cultura infinitesimal. Para eles os livros textos escritos segundo o rigor da teoria weierstrassiana são literalmente indecifráveis. O seguinte relato hipotético mostra porque.

Pergunta-se a um aluno de cálculo qual a área sob o gráfico da parábola $y = x^2$ entre $x = 2$ e $x = 5$. Ele logo calcula. Pergunta-se por que faz assim. Ele fica atrapalhado. Um colega dele sugere que é pelo teorema fundamental do cálculo. Ele concorda, meio sem jeito. A cena se desmancha. Porém, como o aluno tem brio, à noite, em casa, ele pega o livro para tirar a limpo o que, afinal, lhe escapara nesse assunto. Por que a área se calcula assim? Pelo teorema fundamental do cálculo? Onde está ele? Ele toma por exemplo Swokowski [1983]. O índice remissivo lhe indica a página 356. Ele vai lá e encontra:

Suponhamos f contínua em um intervalo fechado [a, b].

Parte I: Se a função G é definida por $G(x)=\int_a^x f(x)dx$ para todo x em [a, b], então G é uma antiderivada de f em [a, b].

Parte II: Se F é qualquer antiderivada de f em [a, b], então $\int_a^b f(x)dx=F(b) - F(a)$.

Que a integral definida é F(b) - F(a) eu já sei, desde antes do vestibular. Todos os meus colegas sabem isso, não há porque duvidar. O que eu quero saber é por que a integral definida me dá a área.

Ou seja, em vez de entender a integral definida como área e se perguntar por que a área se calcula pela variação de uma primitiva, o aluno entende a integral definida como variação de uma primitiva e se pergunta por que ela lhe dá a área. Isso se deve à predominância, na cultura em que ele vive, do conceito de função do século XVIII, usado por exemplo por Euler: função é uma fórmula ou expressão analítica. Ora, a área não é uma tal fórmula. Dizer que a área é uma primitiva não é dizer muito, não é dizer como se acha a "expressão" da área. Essa cultura foi alimentada pela sebenta. "Assim vemos que a derivada da área é igual a f(x), dada, portanto a determinação da área de um trapezóide depende da resolução do seguinte problema: dada uma função f(x) procurar uma função F(x) tal que sua derivada seja a função dada" [Lassance, 19.?: 306]. Ou seja, a demonstração de que a área é uma tal primitiva não basta para dizer que a primitiva foi encontrada; ainda é preciso "procurá-la", isto é, achar uma "função" no sentido de Euler, uma fórmula. Enquanto essa função não é achada, é preciso acrescentar: "Admitiremos, no que se vai seguir, que toda função contínua tem integral indefinida" [Lassance, 19.?: 308]. É por isso, também, que a "integral definida é uma função de seus limites e, portanto, um número", ou seja, para cada valor dos limites tem-se um número, é uma função no sentido moderno, de Cantor. Porém "a integral indefinida, é função de x", ou seja, uma "expressão" na variável x, uma função no sentido de Euler.

Suponhamos que, decidido a descobrir por que a integral definida é a área, o aluno resolva olhar a demonstração do Swokowski [1983]. Ele acha óbvia a segunda parte do teorema. Pensa: Uma vez que as primitivas diferem por constante, qualquer primitiva vai me dar o mesmo resultado para F(b) - F(a). Mas... o que isso tem a ver com a área? Na demonstração da primeira parte o autor apenas declara que a integral é a área e não fala mais disso. O aluno volta, então, dois parágrafos atrás onde há várias figuras de áreas sob gráficos de funções, aproximações por retângulos mas, em vez de uma explicação de porque a integral definida é a área, ele encontra uma definição. "Definimos a integral definida como limite de uma soma (...)" [Swokowski, 1983: 343]. Definir a integral definida lhe parece uma redundância. Mas, como definições e axiomas não se discutem, ele aceita. Isso significa, pensa ele, que a integral definida que eu conheço como F(b) - F(a) pode ser descrita de maneira completa, sem deixar dúvidas, como limite dessas somas de áreas de retângulos. Mas, por que ela pode ser definida assim?

O autor não estava esperando esse comportamento do aluno. O aluno que o texto pressupõe não é o aluno real, é um aluno imaginário. O autor espera que, o aluno seja capaz de suspender a cultura em que vive e ler o livro linearmente, como se estivesse vazio de qualquer concepção e fosse aos poucos sendo preenchido pelo que é dito ali. Ele espera que o aluno diga: Seja lá o que for que eu tenha entendido sobre integral definida, é preciso que eu esqueça e me conforme a esta definição: a integral definida é apenas o número que resulta deste limite. É por puro capricho dos matemáticos que ela é anotada desse modo complicado. É preciso que eu entenda também que não se trata do limite de uma função usual, por isso o autor teve de escrever que "limite" aqui, "significa" esse jeito complicado de falar "dado épsilon existe delta..." Então a integral definida é a área e o teorema diz que a derivada da área é a própria função, ou seja, a área é uma primitiva. Como as variações de quaisquer primitivas coincidem, a variação da área pode ser calculada pela variação de qualquer primitiva. Por isso eu posso calcular a área sob a parábola pela variação da primitiva $x^3/3$.

Ora, um aluno capaz de suspender suas crenças anteriores, capaz de encarar as definições como estipulações e capaz de desenterrar a idéia suporte do teorema a partir do livro, já não é aluno, é professor. Então, cabe perguntar: para quem o livro foi escrito? Não foi para os alunos que o autor o escreveu: foi para o matemático-professor, aquele que vai recomendá-lo ao editor para que o livro seja vendido. A preocupação com o rigor weierstrassiano do autor torna o livro um instrumento à prova de aprendizagem. Está escrito para quem não precisa aprender com ele.

Há quase duzentos anos Hegel já denunciava essa manha da Matemática:

> *"Aliás, o defeito específico desse conhecimento se refere tanto ao próprio conhecimento quanto à sua matéria, em geral. — No que concerne ao conhecimento, nós não nos damos conta, de início, da necessidade da construção. Ela não resulta do conceito do teorema, mas ela lhe é imposta e devemos obedecer cegamente a receita de traçar estas linhas particulares, quando poderíamos traçar uma infinidade de outras, tudo isso com uma ignorância igual somente à crença que isto será adequado à produção da demonstração. Tal conformidade com a meta se manifesta mais tarde, mas ela é apenas exterior, porque na demonstração ela se mostra somente a posteriori. Assim, a demonstração segue uma via que começa em um ponto qualquer, sem que se saiba ainda a relação desse começo com o resultado que daí*

dever surgir. O decurso da demonstração comporta tais determinações e tais relações e afasta outras sem que possamos nos dar conta, imediatamente, segundo qual necessidade isso ocorre; uma finalidade exterior rege um tal movimento" [Hegel, 1941: 37].

Então, qual a saída? Quando estávamos, há 40 anos, rindo dos infinitésimos dos cursos de Cálculo, não sabíamos que um matemático, nascido na Alemanha mas exilado na Inglaterra, Israel e, depois, nos Estados Unidos, estava às voltas com uma teoria de modelos que terminou gerando, quase como subproduto, uma fundamentação rigorosa (no sentido de Weierstrass) dos infinitésimos. Resumidamente, é o seguinte. Na construção dos reais como classes de equivalência de seqüências de Cauchy de números racionais, identificam-se as seqüências de racionais que terão, depois, o mesmo limite nos reais. Para a construção dos hiper-reais, que conterão, além dos reais, números infinitos e infinitesimais, identificam-se seqüências de reais por um critério mais forte, de modo que as classes de eqüivalência ficam menores. Cada classe de eqüivalência será um número hiper-real. Por exemplo, as seqüências $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{2n}$ não serão identificadas e pertencerão a duas classes de eqüivalência distintas, que serão dois infinitésimos distintos. Nesse contexto, o aluno que diz que $0{,}999 < 1$ está rigorosamente certo. Mais ainda, o que diz que $0{,}\overline{9} < 0{,}\overline{99} < 1$ também está! Não há motivo, portanto, para evitar infinitésimos nos cursos de Cálculo. Os cursos de Análise que se desenvolvem depois é que terão a incumbência de fundamentá-los. Portanto, além dos cursos de Análise Real, as instituições devem oferecer cursos de análise não standard. Ver Hodgson [1994].

O que importa, em um curso de cálculo, é desenvolver o pensamento diferencial que pode ser conceituado nos seguintes termos: é a preferência por justificar a avaliação de grandezas através da integração de uma decomposição infinitesimal. É a idéia originada com Cavalieri e explorada sistematicamente por Leibniz, idéia que os físicos nunca abandonaram. No espaço deste artigo só será possível apresentar o pensamento diferencial aplicação ao caso do cálculo de áreas de superfícies planas. Um demonstração infinitesimal do teorema fundamental do cálculo poderá se encontrada em Baldino (1998).

Suponhamos que se queira estudar uma região plana $\mathcal{A}$ que é parte do "mundo físico". Primeiro adotam-se um sistema de coordenadas e uma métrica. Isso significa que:

1 - A cada ponto P da região ficam associados dois números, chamados as coordenadas de P;

2 - A cada dois pontos P e Q da região fica associado um número, chamado distância de P a Q.

Suponhamos que, as coordenadas de P são a e b e as coordenadas de Q são c e d. Então, se a distância entre P e Q, medida no terreno, coincide com o número calculado pela fórmula: $\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$ dizemos que foi adotado um sistema de coordenadas cartesianas. Costuma-se usar duas retas, chamadas eixos, para representar o lugar geométrico dos pontos que têm uma das coordenadas nula. Também costuma-se anotar as coordenadas por x e y. (Fig. 1)

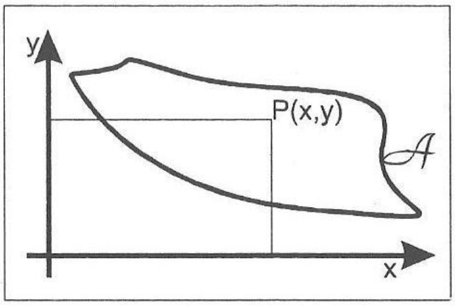

FIG. 1

Suponhamos que as coordenadas de P são a e b e as coordenadas de Q são c e d. Então, se a distância entre P e Q, medida no terreno, coincide com o número calculado pela fórmula $\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos (b- c)}$, dizemos que foi adotado um sistema de coordenadas polares. Costuma-se representar por uma reta (eixo) o lugar geométrico dos pontos que têm a segunda coordenada igual a zero ou P. O lugar geométrico dos pontos que têm a primeira coordenada nula é representado por um ponto do eixo, O (pólo). Os lugares geométricos dos pontos que têm a primeira coordenada constante, não nula, são representados por circunferências centradas em O. (Fig. 2)

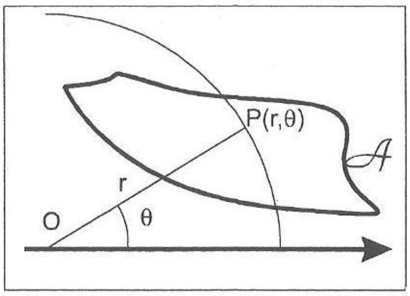

FIG. 2

Para calcular a área A da região $\mathcal{A}$, imagina-se a região dividida em células infinitesimais a de área da. As áreas infinitesimais da chamam-se elementos de área. Imagina-se que área A da região é o resultado da soma de infinitas parcelas infinitesimais da. Para representar a soma infinita usa-se o símbolo $\int$, uma letra s (esse) alongada que se lê "integral". Então $A = \int_{\mathcal{A}} da$ (leia: área igual a integral de da estendida a $\mathcal{A}$) (Fig. 3) .

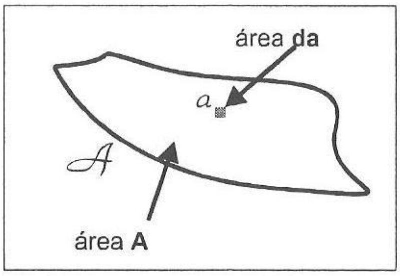

FIG. 3

Suponhamos que tenha sido adotado um sistema de coordenadas cartesianas. A partição da região $\mathcal{A}$ em células infinitesimais é obtida a partir de partições infinitesimais dos domínios das coordenadas x e y. Cada célula infinitesimal fica caracterizada pelas coordenadas x, y do ponto P ao redor do qual ela se situa. Ampliando a célula com um microscópio de poder infinito (parte superior direita da figura) vê-se que a célula tem a forma de um retângulo infinitesimal de lados dx e dy. Portanto: em coordenadas cartesianas, o elemento de área é da = dx dy. A área total da região $\mathcal{A}$ fica sendo então $A = \int_{\mathcal{A}}\int dx\, dy$ onde o sinal de integral é duplicado para lembrar que se deve descrever a região $\mathcal{A}$ especificando os domínios das variáveis x e y. (Fig. 4)

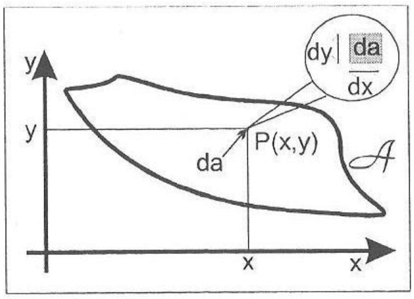

FIG. 4

Suponhamos que tenha sido adotado um sistema de coordenadas polares. A partição da região $\mathcal{A}$ em células infinitesimais é obtida a partir de partições infinitesimais dos domínios das coordenadas r e θ. Cada célula infinitesimal fica caracterizada pelas coordenadas r, θ do ponto P ao redor do qual ela se situa Ampliando a célula com um microscópio de poder infinito (parte superior direita da figura) vê-se que a célula tem a forma de um retângulo infinitesimal de lados dr e r dθ. Portanto: em coordenadas polares o elemento de área é $da = r\,dr\,d\theta$ (Lembre que o comprimento de um arco de circunferência vale o raio vezes o ângulo medido em radianos: $ds = r\,d\theta$.) A área total da região $\mathcal{A}$ fica sendo então $A= \iint_{\mathcal{A}} r\,dr\,d\theta$ onde o sinal de integral é duplicado para lembrar que se deve descrever a região $\mathcal{A}$ especificando os domínios das variáveis r e θ. (Fig. 5)

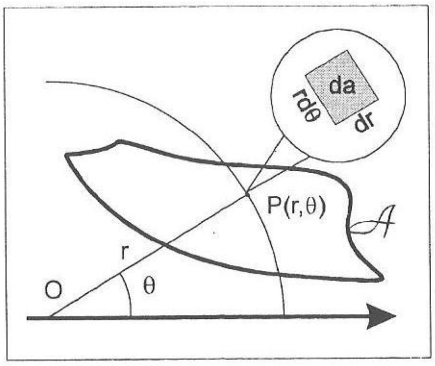

FIG. 5

EXEMPLO 1

Suponhamos que se queira calcular a área de uma região $\mathcal{A}$ que, em coordenadas cartesianas, fica descrita como a região entre o eixo x e o gráfico de uma função y = f(x) definida em um intervalo [a, b]. Para que a célula infinitesimal a, situada na posição genérica P(x, y), percorra todas as células da partição da região $\mathcal{A}$, a variável x deve percorrer o intervalo de a até b e, para cada valor assumido por x, a variável y deve percorrer o segmento de 0 até f(x). Considerando um x qualquer, fixo, a soma dos elementos de área infinitesimais se estende a toda a coluna de largura infinitesimal dx e altura finita f(x). O resultado dessa soma é a área de um retângulo: altura x base = f(x) dx. Como um número finito f(x) vezes um infinitésimo dx é ainda um infinitésimo, f(x) dx é ainda infinitesimal. Por isso é denotado dA e também é chamado elemento de área. Porém, da = dx dy é um infinitésimo de segunda ordem e vai precisar de integração dupla para produzir a área finita A. Já o elemento de área dA é um infinitésimo de primeira ordem e vai precisar apenas de uma integração, (x variando de a até b), para produzir a área A. (Fig. 6)

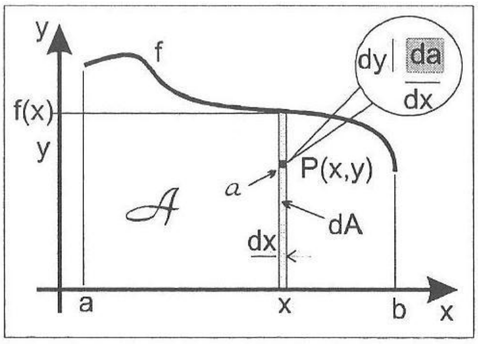

FIG. 6

$$A=\int_{\mathcal{A}}\int dx\,dy=\int_{x=a}^{x=b}\left(\int_{y=0}^{y=f(x)}dy\right)dx=\int_{x=a}^{x=b}(f(x)-0)dx=\int_{x=a}^{x=b}f(x)dx$$

Assim, para calcular a área de regiões determinadas em coordenadas cartesianas pelo eixo x e o gráfico de uma função y = f(x) definida em um intervalo [a, b] não é necessário usar integral dupla, basta escrever:

$$A=\int_{x=a}^{x=b}dA=\int_{a}^{b}f(x)dx$$

Às vezes a região $\mathcal{A}$ é determinada pelo eixo y e o gráfico de uma função x = g(y) definida em um intervalo [c, d]. Nesse caso

$$A=\int_{x=c}^{x=d} dA=\int_{c}^{d} g(y)dy.$$

Exemplo 2

Suponhamos que se queira calcular a área de uma região $\mathcal{A}$ que, em coordenadas polares, fica descrita como a região entre o pólo O e o gráfico de uma função r = f(θ) definida em um intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ (fig. 5). Para que a célula infinitesimal *a*, situada na posição genérica P(r, θ), percorra todas as células da partição da região $\mathcal{A}$, a variável θ deve percorrer o intervalo de θ? até θ? e, para cada valor assumido por θ, a variável r deve percorrer o segmento de 0 até r(θ). Considerando um θ qualquer, fixo, a soma dos elementos de área infinitesimais se estende a todo triângulo de ângulo infinitesimal dθ e altura finita r(θ). O resultado dessa soma é a área de um triângulo

$$\frac{\text{altura x base}}{2}=\frac{r(\theta)\, r(\theta)\, d\theta}{2}=\frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$$

Como um número finito r(θ) vezes um infinitésimo dθ é ainda um infinitésimo, r(θ) dθ é ainda infinitesimal. Por isso é denotado dA e também é chamado elemento de área. Porém, da = r dr dθ é um infinitésimo de segunda ordem e vai precisar de integração dupla para produzir a área finita A. Já o elemento de área dA é um infinitésimo de primeira ordem e vai precisar apenas de uma integração, (θ variando de θ_1 até θ_2), para produzir a área $\mathcal{A}$. (Fig. 7)

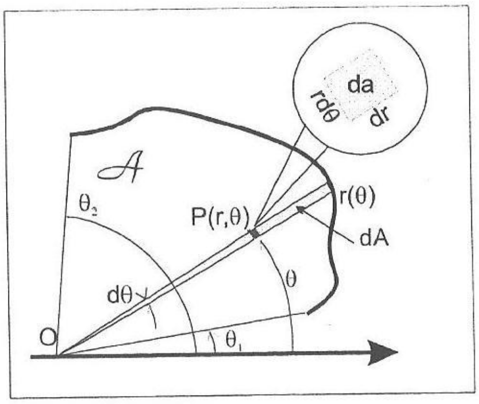

Fig. 7

$$A=\int_{\mathcal{A}}\int r\,dr\,d\theta=\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}\left(\int_{r=0}^{r=r(\theta)} r\,dr\right)d\theta=\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}\left(\frac{r^2}{2}\right)_0^{r(\theta)}d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$$

Assim, para calcular a área de regiões determinadas em coordenadas polares pelo pólo O e o gráfico de uma função $r = f(\theta)$ definida em um intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ não é necessário usar integral dupla, basta escrever:

$$A=\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}dA=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$$

Muito raramente região $\mathcal{A}$ pode ser descrita em coordenadas polares como compreendida entre o eixo e o gráfico de uma função $\theta = \theta(r)$. Nesse caso, somando-se os elementos de área da correspondentes a um mesmo valor de r, tem-se a área de um segmento de coroa circular de espessura dr e comprimento r θ (r) (raio vezes ângulo medido em radianos). Esse será um novo elemento de área dA de ordem 1, enquanto da era de segunda ordem. A área total será obtida integrando dA desde $r = r_1$ até $r = r_2$. (Fig. 8)

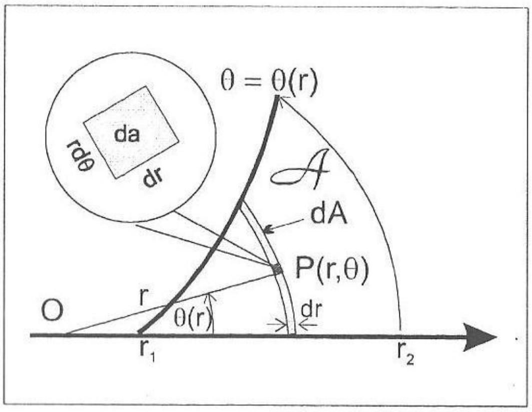

FIG. 8

Assim:

$$A=\int_{\mathcal{A}}\int r\,dr\,d\theta=\int_{r=r_1}^{r=r_2}\left(\int_{\theta=0}^{\theta=\theta(r)}d(\theta)\right)r\,dr=\int_{r=r_1}^{r=r_2}\theta(r)\,r\,dr=\int_{r=r_1}^{r=r_2}dA$$

Minha experiência mostra que os alunos tendem a preferir esse método infinitesimal para justificar os cálculos sobre "aplicações da integral definida" que faz parte dos livros textos e que vão, além do cálculo de áreas planas, ao cálculo de áreas de superfícies de revolução, de trabalho mecânico, de pressão hidrostática, etc. Diante do método infinitesimal as somas de Riemann parecem desajeitados e desnecessariamente complicadas.

É engraçado que alguma vez se tenha rido disso.

Bibliografia

BALDINO, R. R. *Desenvolvimento de Essências de Cálculo infinitesimal.* Rio de Janeiro: Universidade Santa Úrsula, 1998.

HARTHONG, J. *L'analyse non-standard. La Recherche*, 1983, No 148, p. 1194-1201.

HODGSON, B. *Le calcul infinitésimal.* Selected Lectures 7th ICME, Robitaille et al (Eds.) Québec: Université Laval, 1994, p. 157-170.

LASSANCE, E. de M. M. *Curso de Cálculo.* Porto Alegre: UFRGS, Centro dos Estudantes Universitários de Engenharia (C.E.U.E.).

HEGEL, G.W.F. *La Phénoménologie de l'Esprit.* Paris: Aubier. V.I, 1941.

SWOKOWSKI, E. *Cálculo com Geometria Analítica.* McGraw-Hill do Brasil, 1983.