Quadrados Mágicos...

ROSANA DE OLIVEIRA

Esta atividade com Quadrados Mágicos tem sido proposta em séries diversas: com alunos de 5ª e 7ª séries, 1º ano do Ensino Médio, em oficinas para professores em Encontros, e recentemente (novembro de 1999) para os alunos de Graduação da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

Existe uma vasta bibliografia sobre Quadrados Mágicos de ordens 3 x 3, 4 x 4, 5 x 5, ..., com somas diversas, porém o trabalho aqui exposto se restringe ao Quadrado Mágico 3 x 3 soma 15.

ATIVIDADE

No quadrado abaixo encaixe os algarismos de 1 a 9, sem repeti-los, de modo que as somas na vertical, horizontal e diagonal seja sempre 15.

Obs: Registre suas tentativas no papel quadriculado.

Será que existem outras soluções? Mostre ou Justifique.

Escreva 5 observações sobre as soluções encontradas.

Durante o processo de tentativa e erro, algumas afirmações são feitas.

1) Os maiores (7, 8 e 9) não podem estar na mesma direção, ou seja, participarem da mesma soma.

A justificativa é a seguinte:

- Se tivermos os três na mesma direção a soma ultrapassa 15.

- Se tivermos pelo menos dois deles teremos os seguintes casos.

- 7 + 8 = 15, como não é possível usar o zero, 7 e 8 não podem ficar na mesma direção.

- 7 + 9 = 16 e 8 + 9 = 17 excedem 15, portanto também não podem ficar na mesma direção.

2) Os menores (1, 2 e 3) não podem ficar na mesma direção.

A justificativa é análoga da observação anterior, ou seja,

- Se tivermos os três na mesma direção a soma não chega a 15.

- Se tivermos pelo menos dois deles teremos os seguintes casos:

1 + 2 = 3, para completar 15 precisaríamos usar o número 12, que não é possível.

1 + 3 = 4, para completar 15 precisaríamos usar o número 11, que não é possível.

2 + 3 = 5, para completar 15 precisaríamos usar o número 10, que não é possível.

Portanto 1, 2 e 3 não podem ficar na mesma direção.

Após algumas tentativas alguns estudantes encontram respostas que satisfazem a condição do problema. Estas respostas são mostradas a todos e pergunto se a partir delas seria possível encontrar outras.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2	9	4
7	5	3
6	1	8

De uma maneira geral, os estudantes afirmam que depois de conhecerem algumas respostas é possível encontrar outras com facilidade. Os estudante que percebem algumas regularidades encontram outras possibilidades de respostas que diferem de alguma "transformação". No exemplo acima as respostas diferem de uma "rotação no espaço" de 180º tendo a diagonal 258 como eixo, ou de duas "rotações no plano" de 90º ao redor do centro.

Essa discussão, dependendo do público alvo em que a atividade está sendo trabalhada, pode ser simplesmente, ações de rodar e registrar ou podemos discutir grupos de simetria ou teoria das matrizes.

Algumas outras observações são feitas por estudantes ou professores.

3) Todos os números ímpares não ficam no vértice, estão nos centros das linhas e colunas das extremidades; enquanto os números pares estão sempre nos vértices do quadrado. Essas posições estão relacionadas com o que temos abaixo:

Possibilidades de somas com resultado 15 sem repetição de números.

2 + 7 + 6
9 + 5 + 1
4 + 3 + 8
2 + 9 + 4
7 + 5 + 3
6 + 1 + 8
2 + 5 + 8
6 + 5 + 4

Observando as possibilidades de somas podemos concluir que: 1, 3, 7 e 9 aparecem cada um em duas somas; o 2, 4, 6, 8 aparecem cada um em três somas; enquanto o 5 aparece 4 vezes. O número de vezes que estes números aparecem está diretamente relacionado com a posição deles no quadrado mágico.

4) Temos "sempre" dois pares e um ímpar;

Sendo soma 15 (um número ímpar), para que três números somados dê como resultado um número ímpar, temos duas possibilidades, ou três números ímpares ou dois pares e um ímpar. As respostas possíveis com três ímpares implica em repetição de números, por exemplo: 5 + 5 + 5 ou 7 + 7 + 1... Sem repetição de números temos apenas duas possibilidades: 3, 5, 7 e 1, 5, 9. Podemos mais uma vez diversificar o trabalho, fazendo um levantamento numérico, ou mostrando algebricamente.

Sejam x, y e z três números ímpares naturais e distintos. Portanto podem ser escritos da forma:

$x = 2a + 1$

$y = 2b + 1$

$z = 2c + 1$

Como $x + y + z = 15$ então, $2a + 1 + 2b + 1 + 2c + 1 = 15$ onde $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$

$2(a + b + c) + 3 = 15$

$2(a + b + c) = 15 - 3$

$2(a + b + c) = 12$

$a + b + c = 6$

Logo a, b e c podem ser: 0, 2, 4 ou 1, 2, 3.

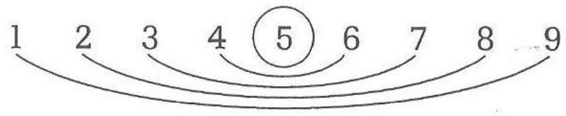
Se substituirmos em x, y e z teremos: 1, 5 e 9 / 3, 5 e 7, portando duas somas possíveis.

5) O 5 está "sempre" no meio.

A palavra meio pode tomar pelo menos duas interpretações possíveis. Meio do quadrado:

	5	

Ou meio da seqüência de 1 a 9, observe:



Mais uma vez podemos explorar essa observação para abordar, média aritmética, termo médio e progressões aritméticas.

Muitas outras observações foram registradas, mas já se pode perceber que cada uma gera uma série de importantes discussões e podem ser propulsoras de abordagem para diversos conteúdos.

O que queremos mostrar que a escolha da atividade adequada é fundamental, para que a sua aula faça algum sentido, mas não é suficiente. Ouvir o outro, e estar atento para perceber que conteúdos matemáticos estão nas entrelinhas é um boa "dica", para que sua aula seja mais envolvente. O conhecimento não está nos livros didáticos, não está no seu quadro bem escrito, ou na sua exposição bem feita. O conhecimento está na fala de quem aprende, nas observações ingênuas, aparentemente absurdas, nas interjeições, no olhar, e na sua habilidade — professor — de ler, de interferir e de atuar junto ao seu aluno, no aprimoramento desse saber.

Bibliografia

ARCAVI, O. *O Sentido do Símbolo* - Série Reflexões em Educação Matemática - Álgebra, História e Representação. Rio de Janeiro: MEM-USU, 1995, Vol. 3.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*. Papirus, 1997.

OLIVEIRA, R. *Pensando Algebricamente antes da 7ª série: Uma Outra Perspectiva sobre os Processos de Construção do Conhecimento*. Rio de Janeiro: Universidade SantaÚrsula, 1997 (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática).