Un Club para Recrear la Matemática

María Luz Callejo de la Vega

Los *clubs matemáticos* son ámbitos para contemplar las matemáticas desde ángulos que habitualmente no están presentes en la práctica escolar:

- como belleza y arte;
- como ciencia relacionada con la naturaleza;
- como actividad de resolución de problemas;
- como conocimiento enraizado en la historia y en la cultura de la humanidad.

Su finalidad es brindar una oportunidad de enriquecimiento a un grupo de alumnos y alumnas que son capaces de dedicar parte de su tiempo libre a trabajar esta materia, estimulados por la presencia de otros compañeros y por una o varias personas expertas que coordinan el club. Si un club matemático se integra en la organización escolar, constituye una forma de desarrollar un curriculum diferenciado que tiene en cuenta la diversidad de capacidades, intereses y motivaciones de los alumnos.

Los clubs matemáticos suelen agrupar a estudiantes de uno o de varios centros de enseñanza secundaria. Pueden participar en ellos todos los alumnos que lo deseen, de clases y niveles diferentes. El único requisito de admisión es el interés y la motivación para investigar en matemáticas. La actividad se desarrolla en el período escolar, de modo que no sobrecargue demasiado el trabajo ordinario de los participantes. Por ejemplo, se puede llevar a cabo en sesiones semanales de dos horas. El número de participantes no puede ser elevado porque ello impediría la interacción y la comunicación fluida en el grupo.

Aquí me voy a referir a una experiencia concreta, el *Club matemático IEPS*, en la que he trabajado durante cuatro cursos escolares con alumnos de Secundaria. Dividiré la exposición en tres partes. En la primera presentaré algunos problemas para recrear las matemáticas; en la segunda me centraré en las actitudes, los hábitos y los valores que exige

Boletim GEPEM / nº 37 - Agosto de 2000 / 33-44

la resolución de verdaderos problemas; en la tercera trataré brevemente al papel del coordinador o coordinadora de un club matemático.

1. ¿Cómo Recrear las Matemáticas?

Las matemáticas se suelen identificar en general con aspectos como la abstracción, la razón, la objetividad, la justificación, lo general, lo teórico y el trabajo mental. Pero, junto a ello, esta ciencia contempla también:

- *lo concreto,* como punto de partida para la abstracción;
- *la afectividad,* pues cada persona tiene una relación afectiva positiva o negativa con las matemáticas, de tal modo que, en ocasiones, los bloqueos con esta materia no se deben a la falta de capacidad para trabajarla sino a un rechazo de la misma. Además, tareas como la resolución de problemas comportan emociones fuertes, ya se trate de la alegría ante la coronación de un esfuerzo, del desánimo cuando la mente se queda en blanco o de la frustración de comprobar que los esfuerzos invertidos no han servido para nada;
- *la subjetividad,* pues hay muchas formas de contemplar un resultado o de abordar un problema, dependiendo de quién se acerque a ello;
- *la intuición,* que es un "sexto sentido"que conduce a la inspiración con "saltos lógicos";
- *lo particular,* pues la observación de casos singulares ayuda a conjeturar lo que puede suceder en casos generales;
- *lo utilitario,* pues como decía Wigner *"el milagro de la adecuación del lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes físicas es un don maravilloso que ni entendemos ni merecemos"*, o como señalaba Bourbaki *"existe una relación íntima entre los fenómenos experimentales y las estructuras matemáticas"*;
- *la experimentación,* pues a un resultado se llega normalmente después de la manipulación física o mental, tras hacer ensayos, examinar casos particulares, buscar analogías, etc.

Para mostrar tanto unos aspectos como otros, en el Club matemático IEPS se persiguen los siguientes propósitos:

- introducir a los alumnos y alumnas en algunos temas que normalmente no figuran en los programas de matemáticas y que muestran algunos de los rasgos antes esbozados. Por ejemplo, cuadrados mágicos, grafos, laberintos, números de Fibonacci... o trabajar otros que ya conocen desde un marco más amplio: números primos, el número pi...

- estimular la creatividad, el espíritu crítico, la objetividad, la flexibilidad de pensamiento, a través de la resolución de verdaderos problemas.

A continuación voy a exponer dos actividades trabajadas en el Club en vista a los anteriores objetivos, presentadas en un calendario matemático.

Calendario Matemático

El calendario matemático ofrece actividades o informaciones cada día del mes. Uno de ellos se centró en la geometría, una de las partes más formativa de la Matemática, contemplando diferentes aspectos:

- estéticos como la belleza de la forma (proporción áurea, mosaicos);
- culturales (geómetras famosos: Descartes, Pitágoras, Moëbius, Hypatía...)
- experimentales: dibujo, construcción, descomposición y manipulación física de objetos geométricos;
- científicos: el valor de la demostración (paradojas geométricas);

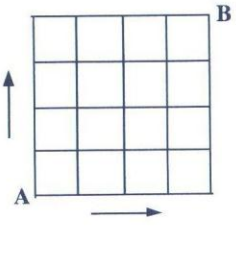
y relaciones entre problemas.

Normalmente un calendario se trabaja individualmente durante el mes en curso y se hace una puesta en común al final del mismo, en la que se seleccionan unos cuantos problemas que a juicio de los participantes merecen especial atención. Tal es el caso de los de los días 8 y 28 del calendario al que nos referimos.

El problema del día 8 dice así:

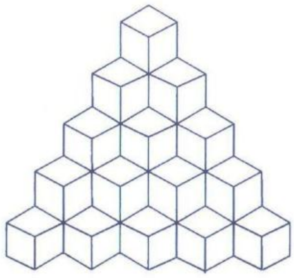
Calcula el número de caminos que hay para ir desde el cruce inferior izquierdo (A) al cruce superior derecho (B) del plano del barrio de la figura.

Se entiende que se trata de avanzar siempre, es decir, de seguir las direcciones de las flechas de la figura de abajo:



El problema del miércoles día 28 dice así:

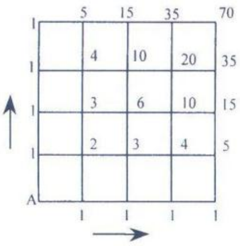
Esta torre está hecha con 35 cubos dispuestos en 5 capas. ¿Cuántos cubos harán falta para construir una torre de 10 capas?



Al abordar estos problemas se puede:

- hacer recuentos de forma sistemática;
- relacionar el triángulo de Pascal con diferentes situaciones;
- generalizar resultados a partir de los casos concretos planteados por estos problemas.

El primer problema no suele presentar dificultad a los estudiantes. Cuando lo propuse en el club, un participante, **Antón**, hizo notar que el total del número de caminos que llegan a cada vértice seguía una regla general: era la suma del número de caminos que llegaban desde los vértices más próximos situados directamente a la izquierda y directamente abajo, como muestra la figura siguiente:



Sin embargo, no se percató de que los números que había sobre las diagonales eran filas del triángulo de Pascal, quizá porque aparecían aquí en una posición no habitual. Pero lo hizo notar otro estudiante, **Fermín**. Hecha esta observación invité a los miembros del club a que expresasen de forma general el número de caminos que llegaban a un vértice cualquiera. Introdujeron los ejes de abscisa y de ordenada, y gracias a sus conocimientos del triángulo de Pascal, expresaron de forma general el número de caminos que llegaban al vértice de coordenadas (m,n) como los números combinatorios $\binom{m+n}{n} = C_n^m$.

A continuación pusimos en común el trabajo sobre el problema de los cubos. Un estudiante, **Ignacio** hizo en el encerado la siguiente tabla:

Capas: n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de cubos en capa n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Total cubos en n capas	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220

"Este modelo se parece algo al anterior porque los números de la tabla se han obtenido sumando resultados anteriores", hizo notar **Ana**:

Capa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubos/capa	1	1+2	3+3	6+4	10+5	15+6	21+7	28+8	36+9	45+10
Total	1	1+3	4+6	10+10	20+15	35+21	56+28	84+36	120+45	165+56

Fermín, influenciado quizá por el problema anterior dijo: *"los números de la suma total están también en el triángulo de Pascal[1]"*:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&1&&&&&\\
&&&&1&&2&&1&&&&\\
&&&\mathbf{1}&&3&&3&&1&&&\\
&&1&&\mathbf{4}&&6&&4&&1&&\\
&1&&5&&\mathbf{10}&&10&&5&&1&\\
1&&6&&15&&\mathbf{20}&&15&&6&&1
\end{array}$$

"Efectivamente, pero no solo la suma total está en el triángulo de Pascal, sino también el número de cubos que hay en cada capa y el número de capas, notó **Antón**. *Nuestra tabla, dispuesta de otra manera está también en el triángulo de Pascal"*:

[1] Son los señalados en negro en el triángulo siguiente

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
\underline{1} \quad 2 \quad 1 \\
\mathbf{1} \quad \underline{3} \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad \mathbf{4} \quad \underline{6} \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad \mathbf{10} \quad \underline{10} \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad \mathbf{20} \quad \underline{15} \quad 6 \quad 1
\end{array}$$

La generalización surgió de inmediato: el número de cubos en una torre con n capas es: $\binom{n+2}{3}$

2. ¿Qué Actitudes, Hábitos, Valores y Capacidades Exige de los Participantes?

El aprendizaje de las Matemáticas entendido como estímulo de la creatividad, del espíritu crítico, de la objetividad, de la flexibilidad de pensamiento a través de la resolución de problemas, se parece al aprendizaje de un arte o de un deporte. Pero dominar cualquier arte o deporte exige conocimiento y esfuerzo, dominio de la teoría y de la práctica, y esto se consigue con interés, concentración, disciplina y paciencia.

- *Interés* por lo que se hace. Sin interés no hay esfuerzo. Pero, el interés se puede favorecer, mostrando a los alumnos algunos aspectos de la matemática que desconocen y que les resultan enormemente atractivos.

- *Concentración* frente a dispersión, porque trabajar en matemáticas exige poner los cinco sentidos, ya se trate de un trabajo individual o en grupo, de seguir un razonamiento, de tratar de comprender una idea; hay que centrarse en lo que se está haciendo, vivir el momento presente, sin perder la perspectiva de la tarea. Para favorecer la concentración desde el comienzo de cada sesión, suelo proponer una actividad que llamo de "calentamiento": se trata de una cuestión que se plantea de forma breve y que causa sorpresa, por ejemplo, un "truco" que se basa en algún hecho matemático, como adivinar un número, o presentar una paradoja.

- *Disciplina* que no es rigidez ni autoritarismo, sino ejercitar regularmente hábitos que ayudan a conseguir un objetivo. Por ello, aunque el club es una actividad libre, pido la asistencia asidua.

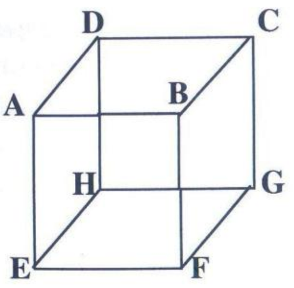
- *Paciencia* frente a la búsqueda inmediata de resultados, paciencia con uno mismo y con los compañeros, paciencia para saber esperar, para dar tiempo a la maduración de las ideas.

Como estos valores no son los que están en alza en nuestra cultura, este trabajo es mejor practicarlo en grupo. El grupo ayuda a perseverar, a valorar las dificultades, a expresar las ideas. La seguridad, la confianza, la esperanza de que podemos encontrar la respuesta mantiene al grupo en tensión hacia la meta.

Un ejemplo de puesta en práctica de estos valores fue la resolución del "problema de la mosca". Su enunciado sencillo y comprensible, invita a hacer una conjetura y capta el interés; pero los primeros caminos emprendidos resultaron infructuosos; el problema quedó pendiente y se trabajó cinco veces a lo largo del año; la búsqueda duró más de un curso y al final ... la solución era más sencilla de lo que nos habíamos imaginado[2].

El enunciado del problema es el siguiente:

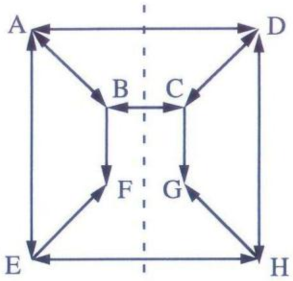
Una mosca se pasea por las aristas de un cubo ABCDEFGH. Cuando se encuentra en un vértice prosigue su camino hasta el vértice de una cualquiera de las aristas que parten del vértice en que está. Por tanto la probabilidad de que elija una arista determinada es 1/3. Los vértices F y G están fumigados con un insecticida mortal. Si la mosca parte del vértice A, ¿cuál es la probabilidad:



1) de que llegue al vértice F;
2) de que llegue al vértice G;
3) de que no pase nunca ni por F ni por G?

[2] Un informe detallado del proceso de búsqueda de la solución de este problema está en mi libro: *Un club matemático para la diversidad*.

Una forma directa de llegar a la solución consiste en representar las direcciones de los recorridos de la mosca sobre las aristas del cubo mediante el siguiente grafo:



Si p(EπF) es la probabilidad de ir del vértice E al vértice F en un número indeterminado de aristas recorridas, designamos:

x = p(EπF)

y = p(AπF)

z = p(AπG)

Tenemos que:

- cuando la mosca se encuentra en un vértice, cada una de las tres aristas que sale de este vértice tiene la misma probabilidad de ser elegida;

- en el grafo anterior algunos vértices tienen las mismas posiciones relativas con relación a los vértices envenenados F y G (E y H; A y D; B y C);

-como la mosca puede recorrer un número indeterminado de aristas hasta llegar a un vértice envenenado, la probabilidad de llegar a F partiendo de A es la misma que la de llegar a F desde A tras encontrarse en A después de haber recorrido un número indeterminado de aristas.

Luego:

x = p(EπF) = p(BπF) = p(CπG) = p(HπG)

y = p(AπF) = p(DπG)

z = p(AπG) = p(DπF)

Cuando la mosca se encuentra en un vértice, la probabilidad de elegir una de las tres aristas que salen de este vértice es 1/3. Se tendrá pues que:

p(AπF) = 1/3 p(EπF) + 1/3 p(BπF) + 1/3 p(DπF)

p(AπG) = 1/3 p(EπG) + 1/3 p(BπG) + 1/3 p(DπG)

p(EπF) = 1/3 + 1/3 p(HπF) + 1/3 p(AπF)

p(EπG) = 1/3 p(HπG) + 1/3 p(AπG)

p(HπF) = p(EπG)

Si se sustituyen las probabilidades anteriores por *x, y, z* y se reducen términos, se tiene el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas siguiente:

$3y = 2x + z$

$8x = 3 + z + 3y$

$7z = 3y + 2x$

cuyas soluciones son:

$x = p(E\pi F) = 9/14$

$y = p(A\pi F) = 8/14 = 4/7$

$z = p(A\pi G) = 6/14 = 3/7$

Por tanto la probabilidad de que la mosca llegue al vértice F es 4/7, de que llegue a G es 3/7 y de no pasar nunca ni por F ni por G, cero.

3. ¿Cuál Es el Papel del Coordinador de un Club Matemático?

En un club matemático el coordinador no es única ni principalmente una fuente de información, sino que su función consiste en transmitir valores y actitudes que favorecen la actividad matemática: espíritu de cooperación, apertura a las ideas de otros, comunicación activa, etc.

El coordinador elige actividades que sean asequibles a los alumnos, en las que los contenidos que haya que aplicar estén a su alcance y que, al mismo tiempo, se presten a posibles generalizaciones. El papel del coordinador es establecer un nuevo "contrato didáctico", es decir, una nueva relación entre el profesor y el alumno, entre el alumno y la matemática: trata de presentar la matemática como una ciencia en la que la experimentación, la intuición y las conjeturas juegan un papel importante en el proceso de creación de la misma y, por tanto, no se construye como ciencia deductiva, y en la que la justificación o demostración es un medio de convencerse a sí mismo y a los otros de la verdad de un resultado. El coordinador o coordinadora facilita la comunicación del pensamiento matemático mediante la expresión oral y escrita, la discusión y el trabajo en grupo. Por otra parte, no se sitúa pues ante los participantes como un "sabe-lo-todo" puesto que no puede prever de antemano todas las vías de exploración de una situación propuesta ni todas las generalizaciones de la misma, sino que, por el contrario, comunica sus procesos de pensamiento, sus dudas, sus ensayos… ante la resolución de un problema. Debe pues romper algunos modelos que están muy asentados en la institución escolar y:

- valorar los procesos de razonamiento, de búsqueda, de investigación tanto como los resultados;
- mostrar que no se puede prever de antemano el tiempo que se va a dedicar a la resolución de un problema;
- considerar que los aspectos afectivos son importantes en el proceso de resolución de un problema .

Conclusión

Pero, ¿se puede hacer esto en el aula? o, por el contrario, ¿hay que dejar esta forma de trabajo para actividades extraescolares? Bien es cierto que en un club matemático se juega con ventaja respecto a las condiciones en que se desarrolla la educación formal y los cursos de matemáticas: por una parte los participantes en él son alumnos motivados por las matemáticas que tienen una experiencia positiva del aprendizaje de esta materia en el contexto escolar; por otra parte el objetivo no es tanto introducir contenidos matemáticos cuanto ejercitar a los alumnos en procesos propios del pensamiento matemático que conducen al establecimiento de proposiciones y a la demostración de teoremas; por último, el número de alumnos es abarcable para el modo de trabajo: individual y en grupo, puestas en común y debates.

Sin embargo, en el ámbito de la educación formal las cosas suceden de otra manera: no todos los alumnos de una clase están motivados por las matemáticas, la introducción de contenidos juega un papel importante en los cursos de matemáticas y no resulta fácil articular una propuesta curricular centrada en la resolución de problemas porque supone cambios importantes no sólo en los contenidos a enseñar sino también en la metodología, en la organización de la clase y en la evaluación de los aprendizajes.

Según esto, la aplicación al aula es difícil pero posible e incluso necesaria. Hace falta dar pequeños pasos en la dirección de aplicar métodos más activos que inviten a los alumnos y alumnas a plantearse sus propias preguntas, sus propios problemas, a comunicar sus ideas, a discutirlas y a trabajar con otros. Sólo así se podrá recrear la matemática y contemplarla conjugando lo concreto y lo abstracto, la razón y la afectividad, lo general y lo particular, la objetividad y la subjetividad, lo teórico y lo práctico, la deducción y la experimentación.

Bibliografía

BALBUENA, L. y M.D. DE LA COBA. *La matemática recreativa vista por los alumnos*, SCPM "Isaac Newton" - Proyecto Sur, Granada. 1992.

BOLT, B. *Divertimentos matemáticos*, Labor, Barcelona. 1987.

BOLT, B. *Actividades matemáticas*, Labor, Barcelona. 1988.

BOLT, B. *Más actividades matemáticas,* Labor, Barcelona. 1988.

BOLT, B. *Aún más actividades matemáticas,* Labor, Barcelona. 1989.

CALLEJO, M. L. *Un Club matemático para la diversidad*, Col. Secundaria para todos, Narcea, Madrid. 3ª edición (1ª edición 1994). 1998.

FISHER, R. y A. VINCE. *Investigando las matemáticas,* Akal, Madrid (vol. 1 a 4). 1990.

GOMEZ, I. M. *Los juegos de estrategia en el currículum de matemáticas*. Apuntes IEPS nº 55. Narcea, Madrid. 1992.

Grupo CERO. *De 12 a 16, un proyecto de currículum de matemáticas*, Mestral, Valencia. 1987.

Grupo CERO. *Es posible*, ICE de la Universidad de Valencia, Valencia. 1983.

Grupo DECA. *Didáctica de la resolución de problemas*. CEP de Burgos. 1990.

GUZMAN, M. de (1994). *Para pensar mejor*, Col. Ciencia hoy, Pirámide, Madrid.

MASON, J., BURTON, L. & STACEY, K. *Pensar matemáticamente,* MEC-Labor, Barcelona (Or. 1982). 1988.

McLEOD, D.B y ADAMS, V.M. (Eds.). *Affects in Mathematical Problem Solving*, Springer-Verlag, Nueva York. 1989.

PERELMAN, Y. *Matemáticas recreativas*. Martínez Roca, Barcelona. 1970.

POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México (Or. 1945). 1972.

POLYA, G. *Matemáticas y razonamiento plausible,* Tecnos, Madrid (Or. 1954). 1966.

POLYA, G. *Mathematical Discovery* (Ed. combinada), Wiley, Nueva York (Or. 1962). 1981.

PUIG, L. El estilo heurístico de resolución de problemas. En: *Aspectos didácticos de Matemáticas*, 4, A. SALAR, F. ALAYO, M. 1993.

KINDT y L. PUIG, Educación Abierta nº 103, ICE de la Universidad de Zaragoza, 1993, pp. 93-122.

SCHOENFELD, A. *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Orlando. 1985.

SCHOENFELD, A. Learning To Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* D.A. GROUWS (Ed.), McMillan, Nueva York, 334-389. 1992.

SCHOENFELD, A.: Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. En: *La enseñanza de la matemática a debate*. MEC, Madrid, pp. 31-65. 1985.

SHELL CENTRE FOR MATHEMATICS EDUCATION. *Problemas con pautas y números*, Universidad del País Vasco, Bilbao. 1993.

STACEY, K. y S. GROVES. *Resolver problemas: Estrategias. Unidades para el desarrollo del razonamiento matemático.* Narcea. Madrid. 1999.