Rupturas no Estatuto Matemático dos Números Negativos

Gert Schubring
Tradução / **Rosa M. Mazo Reis**

Introdução

Os números negativos constituem um exemplo instrutivo para os processos de desenvolvimento de conceitos matemáticos. A partir de noções empíricas, bem adaptadas à prática da vida cotidiana, foram formados conceitos teóricos nos quais não se nota mais uma conexão com as bases históricas e que constituem ferramentas científicas importantes. Mas esses conceitos apresentam grandes dificuldades de aprendizagem. Como é sabido, enquanto é possível representar os números naturais por objetos ou por modelos empíricos, os números negativos não "existem", no mesmo sentido, na vida cotidiana. Assim a didática não pode ignorar o caráter teórico desta noção matemática que quase todos os estudantes de ensino fundamental escolar devem agora aprender. Os números negativos apresentam, portanto, um desafio à didática. Como abordar a passagem das grandezas aos números no processo de aprendizagem escolar?

Percorrendo algumas publicações recentes sobre aprendizagem dos números negativos, parece-me que a didática camufla mais ou menos sistematicamente a presença de um obstáculo a vencer. Notei duas tendências para lidar com a dificuldade: uma nega o caráter teórico do conceito de número negativo e reduz esse conceito às noções empíricas, diretamente acessíveis à experiência cotidiana, a outra fala apenas de grandezas, quando se trata das séries iniciais do ensino fundamental, enquanto supõe a existência dos números negativos a partir das séries finais do ensino fundamental: assim, a passagem das noções concretas às noções abstratas fica identificada, seja com a segregação escolar, seja com a tentativa de uma certa "maturidade de espírito"; nos dois casos, identifica-se com condições realmente externas ao processo didático.

Dentre as publicações recentes[2], um caso revelador para relacionar estas duas tendências é um artigo de G. Bélanger (1984): o autor recusa-se a relegar a introdução dos números negativos para o final do fundamental — como é recomendado no programa de seu país (o Canadá), devido ao conceito matemático bastante sofisticado (das classes de equivalência), necessário para justificar a nova operação — e sustenta que o ensino dos números negativos deva ser ministrado desde as séries iniciais do fundamental, mas apoiando-se sobre um reducionismo bem expresso no enunciado do seu objetivo principal:

"Permitir aos alunos que tomem consciência da existência dos números inteiros relativos na vida e que compreendam sua utilidade." (p.7; o grifo é meu, G. S.).

O que diz a pesquisa em didática sobre a história dos números negativos? Glaeser (1981) foi o primeiro, a meu ver, a estudar a recusa dos números negativos como um problema não da "pré"-história, mas como um problema relativamente atual: tanto para a Matemática quanto para a Didática[3]. Apesar de notar as rupturas que apareceram no desenvolvimento histórico, Glaeser se surpreende ao constatar que a regra dos sinais (sobre a qual ele centra seu estudo) tenha sido capaz de suscitar tantas dificuldades para os matemáticos e para os didatas.

Abordarei essa questão sob um outro ângulo: o das controvérsias históricas em torno da existência dos números negativos. Tentarei também colocar em evidência os enraizamentos culturais das epistemologias subjacentes a cada posição, a fim de delimitar melhor a natureza das rupturas em questão.

De fato, nesta história, é a própria existência dos números negativos, mais do que a regra dos sinais, que gera o questionamento, seja na Matemática ou na Didática. Por outro lado, a regra dos sinais sempre constitui um verdadeiro obstáculo para os alunos. Se isso ocorre, é sem dúvida porque os professores tentaram por muito tempo (e ainda tentam) demonstrar esta regra. Lembremos que só no final do século XIX é que a didática percebeu, a partir do "princípio da permanência" de H. Hankel[5], que não podemos demonstrar esta regra e que ela não é nada mais que uma convenção.

É conveniente ilustrar brevemente a pertinência da história dos números negativos na França, através de alguns fatos desta história. Em primeiro lugar, a própria denominação números relativos, que é empregada para o conjunto dos números positivos e negativos, remete a L. Carnot e à sua refutação do estatuto matemático dos números relativos. Aliás, em torno desta posição, cerrou fileiras, quase que por unanimidade, o público francês. Por outro lado F. C. Busset (1843)[6], queixando-se do fracasso do ensino da Matemática na França e da marginalização da matemática na cultura, encontra todas as causas desses males reunidas em uma só: a admissão da existência das quantidades negativas. Ele chega a ficar chocado com a discussão sobre saber "se existem quantidades menores que nada"[7]. Assim, com o objetivo de melhorar o ensino da Matemática e os livros didáticos, Busset preconiza a revisão da "teoria dos números" e, mais precisamente, de tudo que diz respeito à operação de subtração. Achamos, no livro de Busset, o enunciado de um critério de qualidade para redação dos livros didáticos: *"Os tratados da Ciência... (não devem estar) em desacordo com as noções comuns"* (Busset 1843, p.47). Em resumo, ao invés de elevar a cultura geral, deve-se reduzir os conceitos teóricos às noções da vida prática. Aí está uma expressão inequívoca do reducionismo a que nos referimos mais acima.

Minha hipótese principal é que as controvérsias em torno da existência dos números negativos se explicam, sobretudo, pelo obstáculo que há em passar da noção de grandeza, que é de natureza substancial (ver mais adiante), à de número, que é essencialmente teórica[8]. Utilizo aqui a relação grandeza — número para revelar as razões epistemológicas da negação da existência dos números negativos.

Analisei o desenvolvimento dos conceitos sobre números negativos depois do século XVII, época de aceitação destes números na Matemática (segundo as assertivas da historiografia). Conduzi a análise em forma de comparação entre Inglaterra, França e Alemanha (os três países europeus com as maiores comunidades matemáticas), utilizando um número muito grande de documento: monografias de pesquisa matemática, tratados sobre a filosofia matemática, tratados históricos, fontes de arquivo, reflexões didáticas, mas sobretudo os livros didáticos. No que concerne aos livros didáticos, preocupei-me em não me restringir às partes que tratavam explicitamente dos números negativos, mas procurei considerar também as partes referentes a suas "aplicações", analisando os manuais de Aritmética, Álgebra, Geometria Analítica, Trigonometria etc, dos quais só posso citar aqui alguns trabalhos paradigmáticos. Não posso explicar aqui o problema bastante complexo de analisar um tão grande número de manuais; para isto, remeto a outras publicações (Schubring 1986b 1987). Indico apenas que, para a França, escolhi como dados básicos os manuais de Aritmética e Álgebra adotadas pelas escolas de ensino médio entre 1795 e 1845. No âmbito deste artigo, não posso apresentar o caso inglês (ver, como apresentação introdutória, a tese de Pycior 1976, pp.42-85), e restrinjo-me a apresentar a discussão, na França e na Alemanha, sobre a natureza dos números negativos, a partir da metade do século XVIII até a metade do século XIX, e as diversas causas da recusa desses números. Começo por um breve resumo da história, matemática, destes números.

Breve História dos Números Negativos Desde suas Origens até o Século XVIII[9]

Encontramos na Antigüidade e na Idade Média oriental abordagens distintas e uma mesma resistência em relação aos números negativos.

Entre os gregos, Diofanto fala de quantidades subtraídas e explica a regra dos sinais. Mas ao mesmo tempo, não admite equações como $4 = 4x + 20$, porque sua solução é "absurda".

Na Índia, Bhaskara, no século XII, a respeito da equação do segundo grau: $(x/5 - 3)^2 + 1 = x$, com soluções $x_1 = 50$ e $x_2 = 5$ diz que ela "não é consistente", porque as pessoas não aceitam considerar os números negativos absolutos como -2. Os números positivos são chamados "propriedades" ou "bens", enquanto os números negativos são chamados "dívidas"; para um pedaço de uma reta, um valor negativo é associado ao seu sentido oposto.

Os matemáticos chineses utilizavam as quantidades negativas como meios intermediários no cálculo para resolução de problemas, mas essas quantidades não eram admitidas como soluções.

Também entre os árabes, não eram admitidas quantidades negativas; melhor dizendo, os matemáticos escolhiam, na Álgebra indeterminada, as constantes que garantissem a obtenção exclusiva de soluções positivas.

Na Europa da Idade Média, os números negativos podiam aparecer nos sistemas de equações lineares. Assim, em seu "Liber Abaci", Leonardo de Pisa considera a eventualidade de uma solução negativa, mas a rejeita como inválida. Por outro lado, utiliza valores intermediários negativos, que interpreta como dívidas. Em resumo, ele admite apenas os problemas nos quais é possível interpretar os valores negativos como algo de positivo.

Um manuscrito em provençal, datando de aproximadamente 1430 e recentemente descoberto, é o primeiro texto conhecido no qual um resultado negativo é admitido sem reservas: trata-se da resolução de um problema através de um sistema de cinco equações lineares; para uma das variáveis, a primeira solução negativa é $-10\ 3/4$ (ver Sesiano 1984).

Por sua vez, Nicolas Chuquet (igualmente francês) admite soluções negativas para problemas abstratos (isto é, compreendendo números puros e não grandezas), onde um valor é considerado uma solução quando satisfaz a equação. Mais ainda, ele elabora os procedimentos para adicionar e subtrair tais números[10].

Passo ao século XVIII para fornecer algumas indicações sobre o estado mais avançado da ciência da época, como ponto de partida das análises que desenvolverei a seguir. O célebre manual de Álgebra de Euler, escrito em 1766, fornece-nos um modelo de admissão de um estatuto de entes matemáticos verdadeiros para os números negativos. Aqui, a subtração não é restrita ao caso específico onde o subtraendo é menor que o minuendo; Euler afirma sem reservas que $25 - 40 = -15$ e que os números negativos são menores que zero ("Nichts"). Ele chega a considerar as duas séries:

0, 1, 2, 3, 4, 5...

..., -4, -3, -2, -1, 0

para reuni-las sob um único conceito, o dos números inteiros (Euler 1940 pp.19 ss). Euler define também as quatro operações sobre esses números. Embora utilize a interpretação das quantidades como bens ou dívidas, é com o objetivo único de fornecer uma motivação ao cálculo feito com os números inteiros. Em Euler, estas quantidades concretas não servem como justificação ontológica.

O Estatuto dos Números Negativos, na França, de 1750 a 1850

Nos manuais franceses da segunda metade do século XVIII, o cálculo sobre quantidades está bem exposto, mas os números negativos conservam ainda um estatuto um pouco ambíguo. O exemplo da Enciclopédia é revelador.

Por um lado, há o artigo "negativo" escrito por d'Alembert. D'Alembert havia aliás criticado que a teoria das quantidades negativas não estava ainda perfeitamente esclarecida. Censurava o fato dos autores de manuais considerarem as quantidades negativas *"ora como abaixo de nada, noção absurda em si mesma*[11]*: ora como expressão de dívidas; noção muito limitada e, por isso, mesmo pouco exata"* (citado por Condillac 1981, p.299). Por outro lado, ele só admite as quantidades negativas como falsas posições que devem ser traduzidas para quantidades positivas:

"Desta maneira, as quantidades negativas indicam realmente num cálculo de quantidades positivas, mas que foram supostas numa posição falsa. O sinal – que se coloca diante de uma quantidade serve para reparar e corrigir um erro que foi feito na hipótese... Portanto, não existem de modo nenhum, realmente e absolutamente, quantidades negativas isoladas: –3 tomado abstratamente não apresenta ao espírito idéia alguma; mas se eu digo que um homem deu a um outro –3 escudos, isto quer dizer, numa linguagem inteligível, que ele lhe tomou 3 escudos" (Enciclopédia, v. 11, p. 73).

Esta concepção persistirá no século XIX, onde a encontramos em textos de Bezout, La Croix, Bourdon, e outros.

Por outro lado, encontramos igualmente na Enciclopédia uma aceitação das quantidades negativas, em pé de igualdade com as positivas, as duas servindo de noções fundamentais à Álgebra. Assim, o artigo "Quantidades (em Álgebra)" explica:

"As quantidades algébricas são positivas ou negativas. Chamamos de quantidade positiva aquela que está acima de zero, e que é precedida, ou se supõe que seja precedida, pelo sinal +, ...Quantidades negativas são aquelas que são consideradas como menos que nada, e que são precedidas pelo sinal –". (ibid. vol. 13, p.655).

Podemos supor que o autor deste artigo, o padre de La Chapelle, que era professor de Filosofia, tenha ensinado Matemática segundo essa concepção, em suas classes de Filosofia. De fato, há pelo menos um manual de Matemática que foi utilizado nas aulas de Filosofia (onde se davam os únicos cursos de Matemática oferecidos nas universidades francesas, na época), no qual eram admitidas as quantidades negativas:

"As quantidades precedidas pelo sinal + são chamadas de positivas; aquelas que são precedidas pelo sinal – são chamadas de negativas:

elas não são menos reais que as positivas, mas são tomadas em um sentido oposto" (Sauri 1772, p.39).

Nota-se o defeito nesta definição: talvez para evitar a alusão ao "nada", falta-lhe toda e qualquer referências aos valores absolutos. A definição, referindo-se somente ao sinal, não permite que se decida sobre o valor, positivo ou negativo, de uma quantidade.

Não devemos esquecer que uma tentativa de esclarecimento sobre os fundamentos dos números negativos e de refutação da crítica de D'Alembert, foi levado a cabo na França nessa época; mas de fato, é na célebre obra de Condillac "La Langue des Calculs" (A Linguagem dos Cálculos) que encontramos um esforço para estabelecer uma teoria dos números negativos.

Condillac (para quem a Álgebra constitui o fundamento das Matemáticas) desenvolve, em "La Langue des Calculs", uma teoria das abstrações sucessivas, a partir das noções empíricas, e uma hierarquia das etapas de abstração e de teorização. Além disto, ele explica as ligações entre as diferentes etapas com ajuda de sua concepção de analogia (portanto a primeira formulação do "princípio de permanência" (Hankel)). O que constitui o progresso realizado por Condillac é que ele descobre a passagem das quantidades/grandezas aos números como o ponto decisivo. Encontra-se, portanto, em Condillac, pela primeira vez, uma teoria genética do nascimento do conceito de número. É claro que Condillac não realizou estudos, seja históricos ou experimentais, sobre a gênese do conceito dos números. Trata-se apenas de uma reconstrução "racional". Vejamos mais de perto como ele concebe os números negativos dentro da sua visão "operacionalista". Segundo Condillac, houve quatro etapas no processo de formação do conceito de número:

1. O primeiro cálculo efetuado é cálculo com os dedos. Enumeramos com os dedos para representar uma seqüência de unidades (grandezas). A partir deste primeiro cálculo empírico com grandezas, surgiram as quatro operações básicas. Por exemplo, a operação que *"desfaz o que a adição faz, chamamos de subtração"*. (Condillac 1981, p.14). A noção fica assim restrita por este primeiro tipo de cálculo.

2. A segunda etapa é caracterizada pela passagem aos nomes. O emprego dos nomes abre novos domínios ao cálculo, mas, acima de tudo, a passagem dos dedos aos nomes é uma condição necessária à aparição da Álgebra; porque esta passagem conduz a uma outra passagem: a das

grandezas aos números abstratos: Condillac insiste muito explicitamente sobre esta passagem, que comporta tanto uma mudança do estatuto do conceito quanto uma redução da dependência dos conceitos em relação às substâncias do mundo real:

"Essas idéias que fizemos para nós mesmos através dos dedos, a analogia nos faz portanto aplicar a pedras, a árvores, a homens; e como podemos aplicá-las a todos os objetos do universo, dizemos que são gerais, isto é, aplicáveis a tudo. Mas, a partir do momento em que passamos a considerá-las aplicáveis a tudo, nós não as aplicamos a uma coisa particular, nós as consideramos nelas mesmas, e nós as separamos de todos os objetos aos quais elas possam ser aplicadas" (ibid, p. 48-49; grifo meu, G.S.).

3. A terceira etapa compreende a invenção dos símbolos. Para calcular com grandes números necessita-se de símbolos simples. Isto é realizado pela invenção de caracteres para a numeração, isto é, pela invenção dos algarismos (a qual está na origem da Aritmética). Condillac distingue claramente entre as operações com grandezas (idéias) e as operações com números (símbolos), (ver ibid, p.223).

4. Na última etapa encontra-se a característica do que seria a Álgebra, operações com quantidades literais. Esta passagem dos algarismos às letras é que permite o aparecimento do conceito de número abstrato. Condillac insiste sobre o fato de que as operações que implicam nesse conceito teórico exigem uma redefinição das operações, ou, na terminologia que lhe é própria, supõem uma revisão da gramática necessária: *"esse dialeto (a Álgebra) tem regras que precisam ser conhecidas, e é uma nova gramática a ser aprendida"* (ibid p. 275).

É justamente dentro do contexto desta última etapa que Condillac analisa os números negativos, como uma extensão da noção, mais primitiva, de subtração, que ele redefine por sua vez como uma extensão da adição.

"Uma letra precedida do sinal +, indica uma quantidade acrescentada, uma adição, e eu a chamo de quantidade a mais: quando ela é precedida por um sinal -, eu a chamo de quantidade a menos, uma vez que ela é uma quantidade subtraída, uma subtração... Pouco importa que a quantidade seja a mais ou a menos: pois, a mais assim como a menos, ela é uma quantidade" (ibid, p. 277-278).

Aqui Condillac não procura reduzir os termos teóricos aos termos empíricos. Ele insiste sobre a novidade destas operações. Deste modo, tenta redefinir todas as operações em vista da Álgebra, isto é, elaborar uma gramática consistente que convenha ao "dialeto da Álgebra", sem que para isso seja necessário reduzir este "dialeto" ao da Aritmética:

> *"Portanto, falando propriamente, não há quantidades a menos nas línguas vulgares, nem na Aritmética. Mas na Álgebra, onde os símbolos são indeterminados, não saberíamos pronunciar a diferença: podemos apenas indicá-la, e* a – b *ou* b – a *é a única resposta àquele que pergunta qual é a diferença entre* a e b.
> *(...) Tudo isso é lógico, e a contradição só existe nas palavras soma e resto, que não são da Álgebra: mas o que é uma adição em Álgebra chama-se subtração em Aritmética;... Quando se misturam estes dois dialetos, não é possível evitar de cair em expressões contraditórias".* (ibid., p.295-296).

Condillac recusa também a crítica que D'Alembert faz à teoria das quantidades negativas, e anuncia a exposição de sua própria concepção operacional dos números negativos em sua obra: *"Iremos acabar de esclarecer esta teoria, assim que tratarmos das equações do segundo grau"* (ibid. p. 300). Ora, é justamente para o tratamento das equações do segundo grau que os números negativos aparecem inevitavelmente. Infelizmente, Condillac não concluiu essa obra e nós não dispomos de nenhum vestígio da continuação dessas reflexões sobre as operações e sobre os números negativos.

"La Langue des Calculs" (obra póstuma aparecida em 1798) foi vivamente discutida na França, particularmente pelos Ideólogos[1]. Esses filósofos, embora a maioria deles tenha sido discípulo de Condillac, não apreciaram muito esse tratado. Eles atribuíam a Condillac (erradamente, a meu ver) a idéia de que a Álgebra constitui "a linguagem" (portanto o modelo e a finalidade) de todas as ciências, e recusaram, com bastante ênfase, um papel metodológico tão geral para a Álgebra. Nenhum deles pesquisou a concepção de uma evolução genética dos conceitos científicos e dos diferentes estágios de abstração. Os Ideólogos colocam

[1] Ideologia designa aqui uma doutrina filosófica que podemos caracterizar pela decisão de substituir a metafísica tradicional pelo estudo das idéias por meio de uma análise científica visando a compreender sua origem e suas formas de composição. Escola de pensamento contemporânea da Revolução Francesa e do Império, contava principalmente com Destutt de Tracy e Cabanis.

todos os conceitos ("as idéias") em um mesmo nível de teoreticidade, de preferência em ligação estreita com as "sensações" de uma substância empirista. Encontramos um exemplo desta convicção em Maine de Biran, que, em 1802, reivindicou para a ideologia o papel de "orientar" e de reformar as ciências e particularmente de "limpar o campo de evidência" (ou seja, a Matemática) de "todas as obscuridades" (Biran, 1803, p.15). Entre as noções que considerava como obscuras, ele menciona a de quantidade negativa:

> *"O Ideologista provará que não existem realmente números negativos".* (ibid. p. 22)

Em Biran, não se encontra mais a idéia de diferentes etapas na abstração, nem a de uma diferença entre grandezas e números. Os números são interpretados como grandezas geométricas, "suscetíveis de serem construídas ou traduzidas por meio de linhas".

Nos anos da virada do século XIX, assistimos a uma mudança na concepção da Matemática nos filósofos franceses, sobretudo no que diz respeito a sua "arquitetura". A Álgebra é colocada num segundo plano e a Geometria é que passa a ser escolhida como fundamental, com o papel de conferir uma significação imediata aos símbolos matemáticos, enquanto a Matemática é interpretada nos termos da experiência sensível. Esta mudança é bem visível na obra de Destutt de Tracy, um dos mais importantes representantes dos Ideólogos: na versão preliminar de seus célebres "Elementos de Ideologia", ele concebe a matemática pura como sendo uma conseqüência de *"duas idéias abstratas... a idéia de unidade; e ...a idéia das figuras"* (Destutt de Tracy 1798, p.389-390). Esta concepção segundo a qual se justapõem a Álgebra e a Geometria, é suplantada na versão ulterior da obra por uma outra concepção que assegura a preponderância da Geometria. Ela é destacada expressamente numa nota à segunda edição do primeiro volume:

> *"Uma quantidade qualquer é portanto calculável enquanto puder ser reduzida diretamente ou indiretamente a medidas de extensão; porque esta é a propriedade mais eminentemente mensurável dos seres"* (Destutt de Tracy 1804, p. 216).

Esta mudança de concepção epistemológica (que ainda não foi estudada) foi transmitida da Filosofia à Matemática e é responsável por mudanças de "mentalidades" e de prática (matemática e didática). O primeiro a transmitir esta nova visão epistemológica à Matemática foi

Lazare Carnot, inicialmente em 1801, depois sob uma forma mais desenvolvida em 1803. Carnot fez assim uma dupla escolha: ele está convencido da predominância da Geometria sobre a Álgebra e só admite o estatuto de seres matemáticos para os números absolutos, ou seja, os números que possam ser relacionados a substâncias. Assim, Carnot retém a subtração apenas para a Aritmética, e não a considera jamais como uma operação algébrica. Ele tenta substituir a Álgebra pela Geometria, ou melhor, por um novo tipo de Geometria: a geometria das correlações. Restringe as operações algébricas aos casos "executáveis"; por exemplo, a equação $(a - b).c = ac - bc$ é restrita ao caso onde $a>b$. Ele contorna em parte essas restrições, transformando a Álgebra em um cálculo efetuado a partir de linhas orientadas:

"A partir daí eu concluo...que toda quantidade negativa isolada é um ser de razão, e que aquelas que ocorrem no cálculo, não passam de simples formas algébricas, incapazes de representar qualquer quantidade real e efetiva. (p.xviii)...".

"A Geometria de posição é, portanto, a doutrina propriamente dita das quantidades positivas e negativas, ou antes o meio de suplementá-la, pois esta doutrina deve ser inteiramente rejeitada. (p.22)...

Eu diria que a Geometria de posição é aquela onde a noção de quantidades positivas e negativas isoladas, é suplementada pela noção de quantidades diretas e inversas". (p. xxxiv) (Carnot 1803).

Carnot substitui a noção de número negativo pela correlação entre linhas diretas e inversas. Esta substituição produziu, na comunidade matemática e no público de um modo geral, a aceitação da recusa dos números negativos e de uma Álgebra poderosa, de uma maneira tal que todo mundo passou a adotar os argumentos de Carnot, sem sequer referir-se a ele. O próprio Napoleão contribuiu para difundir a idéia das operações restritas aos casos "executáveis" (vide Schubring 1986a).

Na França, raros foram aqueles que contestaram a visão de Carnot sobre as quantidades negativas. Gergonne ficou do lado dos contestadores, mas o seu artigo de 1814, onde ele se mostra favorável à doutrina das quantidades opostas, então em vigor na Alemanha (e que será tratada mais adiante), denota um posicionamento mais para tímido e defensivo. Gergonne está consciente do que houve uma ruptura e fala da "teoria antiga", substituída há alguns anos pela "nova", sustentada por Carnot (Gergonne 1814, pp. 19-20).

Esta ruptura aparece também ao longo das diferentes edições dos "Elementos de Álgebra" de S. F. Lacroix, um manual que durante muito tempo foi adotado de modo predominante nas escolas secundárias. As duas primeiras edições (1799-1800) apresenta longos trechos tirados do manual de Bezout e correspondem à concepção ambígua que encontramos na Enciclopédia:

- Lacroix distingue sinal de operação e sinal da quantidade (Lacroix 1800, p.31).

- Afirma a existência de números negativos: as quantidades *"negativas possuem portanto uma existência tão real quanto as (quantidades) positivas"* (ibid., p. 32)

- As soluções negativas devem ser interpretadas como soluções positivas: *"toda solução negativa... indica que a quantidade procurada deve ser tomada num sentido totalmente oposto ao sentido que lhe tinha sido atribuído inicialmente"*. (ibid., p.33),

- As operações algébricas têm características que as operações aritméticas não possuem: *"a extensão que os sinais gerais empregados na (Álgebra) dão aos resultados, não permite mais sua comparação exata com os resultados (da Aritmética)...a subtração $b - a$, indicada algebricamente, não traz necessariamente a idéia de que b seja maior que a"* (ibid., p. 41-42).

Por outro lado, a partir da terceira edição (1803) (quase inteiramente revista) não encontramos mais enunciados sobre a existência de quantidades negativas ou de reflexões sobre operações. Esses enunciados foram substituídas por um recurso freqüente à palavra "absurdo" para qualificar as soluções negativas. Além disto, é apenas no contexto de sistemas lineares de equações que Lacroix trata de quantidade negativas e estabelece a regra dos sinais. Ele constata que *"a teoria das quantidades negativas é não só uma das mais importantes como também das mais espinhosas da Álgebra"* (Lacroix 1808, p. 91-92). Lacroix denuncia toda solução na forma de uma quantidade negativa isolada como "absurda", por duas razões:

A primeira razão aparece no decorrer de um problema onde se trata de resolver um sistema linear de duas equações: Lacroix constata que para uma das equações, $60 + 7y = 46$:

"A mera inspeção dessa equação revela um absurdo. Com efeito, não é possível formar o número 46 acrescentando-se qualquer coisa ao número 60, o qual, sozinho, já ultrapassa 46" (ibid., p. 86).

Ao final de uma longa discussão e depois de substituir as equações dadas por outras equações "para que o terceiro problema proposto seja possível" — mas sempre parecendo operar com números abstratos — Lacroix obtém a solução "$x = 5^{fr}$, $y = 2^{fr}$", acrescentando de repente as designações de números concretos (ibid., p. 88). Aqui está portanto uma das razões do absurdo das quantidades negativas: trata-se, na realidade, de "coisas", grandezas (francos, no caso) e não pode existir separação entre as grandezas e os números abstratos.

A segunda razão vem da restrição estrita da operação de subtração ao caso do "resto" positivo ou nulo (ibid., p.92)

Mas por outro lado, Lacroix apercebe-se bem que não pode manter esse rigor na prática matemática. Assim, ele introduz um critério totalmente diferente (a consistência interna), sem, porém, se dar conta deste ecletismo e da incompatibilidade entre os dois pontos de vista que sustenta:

"A Álgebra dispensa toda pesquisa a este respeito (a saber.: retificar o enunciado da questão), desde que se saiba operar convenientemente com as expressões afetadas pelo sinal - ; pois essas expressões, tendo sido deduzidas das equações do problema, devem satisfazer a essas equações: isto é, submetendo as expressões às operações indicadas na equação, devemos achar, para o primeiro membro, um valor igual ao do segundo" (ibid., p. 88).

Para as equações do segundo grau, Lacroix mantém a abordagem "substancialista" que havia adotado para as equações do primeiro grau: quando se obtêm duas soluções negativas, deve-se *"modificar-se o enunciado da questão para evitar o absurdo que ele contém"* (p. 100, vide p. 168); se houver soluções mistas, a solução negativa não passa, na realidade, da solução de uma outra questão (p. 175).

No capítulo "Teoria geral das equações", Lacroix somente relaxa suas exigências para as equações de graus superiores (matéria que cobre o último terço do manual, aparentemente destinada a um nível superior de ensino). É lá que ele aplica (sem sequer prevenir o leitor) o critério de satisfação interna (ex. pp. 306-307).

A refutação dos números negativos não se limitou apenas ao ensino, e sobretudo ao ensino nas escolas secundárias, mas englobou também o ensino científico superior [14].

Não analisei sistematicamente os manuais franceses da segunda metade do século 19, mas segundo J. Itard, foi Carlo Bourlet o primeiro a introduzir num manual, em 1896, "no início da Álgebra (uma exposição completa) da teoria dos números negativos" (Itard 1984, p. 356).

Nota dos editores: O artigo está incompleto, seu complemento sairá no Boletim 38, assim como as notas e a bibliografia publicada pelo autor em seu texto original.