

Pesquisando, Discutindo, Pensando e Produzindo Material Sobre Funções

ANA LÚCIA VAZ DA SILVA, ANDREIA CARDOSO COELHO, BEA KARLA FLORES MACHADO, CLÉA RUBINSTEIN, DORA SORAIA KINDEL, KATIA BONFIM F. BATISTA, MONICA DA CONCEIÇÃO MARQUES, NAIR HELENA BLUMER, NEIVA FERREIRA ALVES E ZILDA FEIGEL

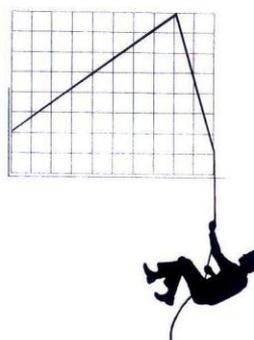
Coordenação / **ROSA M. MAZO REIS E ROSANA DE OLIVEIRA**

HISTÓRICO DO TRABALHO¹

O GEPEM resgata sua origem, pois em 1976 o GEPEM foi formado por um grupo de professores do Rio de Janeiro que se reuniam para estudar e pesquisar no campo da Educação Matemática, o que deixou de acontecer nos últimos anos. Outros grupos foram formados e as atividades do GEPEM foram se distanciando de seu objetivo inicial.

A atual diretoria depois de realizar palestras e mesas redondas bimestrais, durante seu primeiro ano de mandato, decidiu retomar a proposta de grupo de estudo, no qual pensamos ser a prática docente nosso objeto de discussão e investigação.

Nosso primeiro encontro, numa manhã de sábado, na Universidade Santa Úrsula contou com a participação de doze sócios. Diversas idéias foram levantadas e acertamos cinco encontros mensais durante o segundo semestre de 2000. Decidimos ter um material escrito produzido, e combinamos registrar nossas falas e opiniões. Escrever não é tarefa fácil, mas o professor precisa fazer esse movimento, para vencer esse obstáculo. Com certeza este texto não está acabado, mas é um ponto de partida. Todos que participaram fizeram críticas, e este texto é do grupo, ainda, um texto em construção.



¹ No último encontro o grupo decidiu que seriam considerados autores deste artigo aqueles que compareceram a pelo menos três dos cinco encontros realizados ou quem mesmo impossibilitado de comparecer enviou colaboração por escrito para o relato final desse artigo.

Dentre o discutido no primeiro encontro destacamos: abordagens de alguns conteúdos matemáticos, estratégias utilizadas em sala de aula, problemas do dia a dia da escola, o cidadão que a escola (professores) está formando, questões matemáticas que merecem discussão e atenção, atividades sugeridas por participantes.

Desse temporal de pensamentos, **funções** foi o tema escolhido para estudo nos encontros seguintes.

HISTÓRICO

A idéia de localizarmos pontos num plano é bem antiga em Matemática e data aproximadamente do século III a.C. No entanto, o sistema que usamos hoje, designado por sistemas de coordenadas cartesianas originou-se dos trabalhos do matemático e filósofo René Descartes, que viveu na França, no século XVIII.

O conceito de função é uma importante ferramenta para a tradução, para a linguagem matemática, das mais diversas relações existentes entre as variáveis que ocorrem no nosso cotidiano.

O surgimento de conceito de função do 1º grau está relacionado à evolução histórica dos processos de solução, da formalização e da representação gráfica de equações do 1º grau. Os primeiros registros são encontrados na civilização egípcia e constam no papiro de Ahmés, de aproximadamente 2000 a.C.

A função do 2º grau tem sua evolução associada ao desenvolvimento da resolução e representação gráfica das equações do 2º grau. No século XVIII, o matemático francês François Viète notabilizou-se pelo desenvolvimento de métodos de resolução de equações quadráticas e a forma atual é devida a Thomas Harriot (1560-1621).

Os primeiros registros de cálculos utilizando potências são encontrados em tabelas babilônicas aproximadamente 1000 a.C. No século III, Diofante de Alexandria, apresentou a utilização de observações específicas para potências. A generalização do conceito de potência ocorreu somente no século XIV com Nicole Oresme.

INTRODUÇÃO

Uma definição direta e formal de função, torna-se uma definição estática, de memorização e de difícil compreensão por parte do aluno. É necessário um resgate do caráter dinâmico e da utilidade deste conceito.

Em situações cotidianas, geralmente nos confrontamos com a necessidade de relacionarmos as variações de duas grandezas, buscando tomadas de decisões.

Por isso é tão interessante uma abordagem do conceito de Função, em que se propõe situações, problema, estimulando diálogos entre professor-aluno e aluno-aluno. Permitindo que o aluno expresse a dependência de uma variável em relação à outra, a partir da interpretação de tabelas, gráficos e representação sagital; ou ainda a apresentação de atividades concretas-manipuláveis em que as generalizações sejam resultados da observação de regularidades e padrões.

Uma sugestão de avaliação para verificar como ocorreu a construção do conceito de Função, seria solicitar aos alunos a apresentação de outros exemplos a partir das atividades propostas em sala de aula.

Para introduzir o conceito de função existe uma infinidade de situações que nos permitem estabelecer o termo com a conotação de "relação de dependência". A seguir apresentamos idéias discutidas nos encontros, que permitem ao aluno vivenciar este tipo de relação e no decorrer da atividade definir conceitos como: lei de formação; existência (domínio); tipologia; diagramas sagitais, representação gráfica; representação por tabelas; representação algébrica; bem como a formalização de uma linguagem que ocorre na interação com o contexto de cada situação problema apresentando significado para os alunos.

DIRETRIZES DOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

"O Sentido do aprendizado na área, uma proposta para o Ensino Médio que, sem ser profissionalizante, efetivamente propicie um aprendizado útil à vida e ao trabalho, no qual as informações, o conhecimento, as competências, as habilidades e os valores desenvolvidos sejam instrumentos reais de percepção, satisfação, interpretação, julgamento, atuação, desenvolvimento pessoal ou de aprendizado permanente, evitando tópicos cujos sentidos só possam ser compreendidos em outra etapa de escolaridade. A recomendação de contextualização serve, dessa forma, a esses mesmos propósitos."
(PCN Ensino Médio, 1999, pp. 203-204)

"A Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem portanto, ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção

abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos. ...A pertinente presença da Matemática no desenvolvimento de competências essenciais, envolvendo habilidades de caráter gráfico, geométrico, algébrico, estatístico, probabilístico, é claramente expressa nos objetivos educacionais da Resolução CNE/98." (PCN Ensino Médio, 1999, pp 211)

Os PCNs do Ensino Médio apresentam competência gerais, destacamos aquelas, que sob nossa perspectiva respalda o tipo de atividades que pensamos elaborar para os alunos dessa etapa.

Pensando em Competências a serem trabalhadas no Ensino Médio.

- Ler e interpretar textos em diferentes interesses e modalidades
- Produzir textos orais e escritos com organização lógica e consistência de argumentação
 - Interpretar e utilizar diferentes formas de representação (tabelas, gráficos, expressões, ícones...).
 - Produzir textos adequados para relatar experiências, formular dúvidas ou apresentar conclusões.
 - Expressar-se oralmente com correção e clareza usando terminologia adequada
 - Utilizar-se das linguagens como meio de expressão, informação e comunicação.
 - Compreender e utilizar a Língua Portuguesa como língua materna, geradora de significação e integradora da organização do mundo e da própria realidade.

- Identificar variáveis relevantes e selecionar os procedimentos necessários para a produção, análise e interpretação de resultados de processos e experimentos científicos e tecnológicos.

- Identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade.

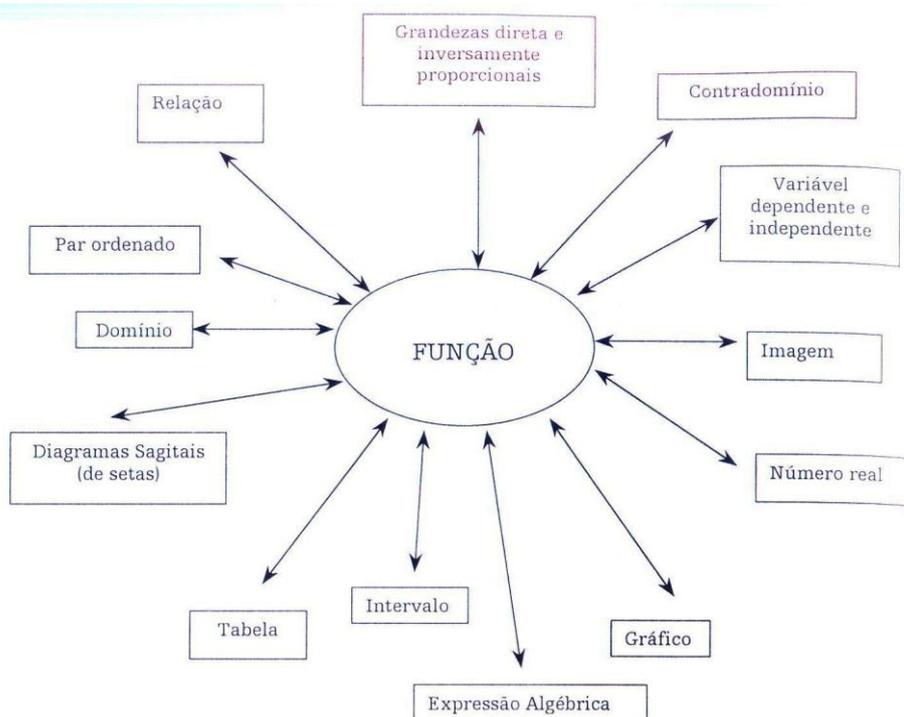
- Identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, realizando previsão de tendências, extrapolações e interpolações e interpretações.

EXEMPLOS



ASPECTOS DO CONCEITO DE FUNÇÃO A SEREM EXPLORADOS

A abrangência do conceito de função é muito mais ampla que este "leque" de conceitos, mas nosso objetivo é retratar aqui a produção do grupo.



FICHA DE ATIVIDADE 1 - PLANEJANDO SUA FORMATURA



Situação Inicial

Foi acordado pela turma, em função do tamanho do salão, onde a festa de formatura seria realizada, que cada aluno poderia convidar quatro pessoas (a ser adaptada a realidade da sua turma).

No início da 8ª série é comum organizar-se uma festa de formatura. Este é um dos bons momentos para se trabalhar esta atividade.

Roteiro de Investigação

- Quantidade de convites de cada aluno.
- Quantidade de convites impressos que serão distribuídos na turma.
- Quantidade de convites que serão impressos.
- Listagem das coisas necessárias para a realização da formatura.
- Estimativa da quantidade de cada um dos itens da lista acima.

O professor pode utilizar esta idéia para organizar qualquer outro tipo de evento.

Sugestão de perguntas norteadoras do processo

- Como você expressaria a relação entre cada aluno e o número de convites que cada aluno recebe?

- Quantos convites serão distribuídos na turma A? E na Turma B? E numa turma com vinte alunos? E numa turma com 42 alunos? Como você representaria esta regra (lei) usada para responder as perguntas anteriores?

- Os professores receberão convites?

- Quem mais receberá convite?

- Que quantidade eles representam?

- Represente, através de uma lei (regra), a relação entre o número de alunos e a quantidade de convites impressos e o número de formandos.

- Liste todos os itens necessários para a realização da festa de formatura.

- Estime a quantidade necessária de cada item da lista.

- Faça o levantamento de preço dos itens, utilizando pelo menos três fontes distintas para estimar um preço médio por item.

- Calcule o custo total da formatura.

- Rateie o custo por aluno, calculando quanto cada aluno gastará ao todo.

- Calcule uma cota mensal para facilitar o pagamento.

- Relacione o valor da cota com a mesada e/ou salário do aluno. Cota \rightarrow Renda Cota / Renda (significado da cota quando comparado à renda, significar uma quantidade através da relação com outras quantidades)

Para introduzir o conceito de função existe uma infinidade de situações que nos permitem estabelecer o termo com a conotação de "relação de dependência".

Apresentamos idéias que permitem ao aluno vivenciar este tipo de relação e construir conceitos como:

- Lei de formação

- Existência (Domínio)

- Tipologia

- Representação gráfica

- Representação por tabelas

- Representação algébrica

Interessante que a variável livre seja o aluno e o trabalho seja desenvolvido em grupos de três a cinco pessoas.

Cada item deve ser representado por pelo menos duas maneiras, sendo que uma delas é uma representação gráfica.

Procure definir lei, use recursos etimológicos e ou expressões de uso popular.

- Faça o mesmo pensando na renda familiar
- Cota → Renda familiar
- Despesa mensal formatura/Renda familiar

FICHA DE ATIVIDADE 2 - INDEPENDENTE OU DEPENDENTE



1. Usando o papel quadriculado desenhe e recorte um quadrado qualquer.

- Meça o lado do quadrado, registre na tabela a seguir:

- Calcule a área desse quadrado.

- Fixando a base (um dos lados do quadrado), dobre um retângulo de altura a sua escolha.

- Calcule a área desse retângulo.

- Faça outra dobra construindo um retângulo maior que o primeiro.

- Meça e registre o valor da altura escolhida.

- Qual a área deste último retângulo?

- Continue dobrando em retângulos maiores até chegar ao quadrado de partida.

Nem sempre o papel é centimetrado, caso seja podemos usar a unidade padrão.

Neste momento utilize números inteiros.

Tabela: Retângulos com base de 20 u.c. (unidade de comprimento) lados de quadradinho, variando a altura.

Altura	Cálculo	Área ²
20 u.c.	20 x 20	400 u.a.

2 u. a. - unidade de área

- Escolha outra altura (ainda inteira) entre duas que já estão em sua tabela.
- Escolha três outros valores (não inteiros) para a altura, intercale cada valor entre duas alturas da tabela.
- Preencha essa nova tabela sem a coluna do meio.

Altura	Área ²
	400 u.a.

A altura dos retângulos vão diminuindo (valores menores que 20 u. c.).

- Usando o papel quadriculado desenhe e recorte um novo retângulo mantendo a mesma base e altura maior que 20 u.c. lados de quadradinho.

- Calcule a área deste novo retângulo. Registre na tabela.

- Vamos colocar em uma só expressão a relação entre área e altura dos retângulos de mesma base escolhida (20u.c.).

$$\text{Área} = 20 \times \text{altura}$$

Representando as palavras por "letras", podemos ter:

$$\text{área ou superfície} = S \quad \text{Altura} = h$$

$$S = 20 \times h$$

A altura dos retângulos vão diminuindo (valores menores que 20 u. c.).

Relacionado à situação acima, dizemos que a "letra" que depende de outra "letra" é uma variável dependente. Quando não depende de outra, dizemos que é uma variável independente. A cada valor numérico que atribuímos a **h** irá corresponder um valor numérico para **s**. Portanto, **s** depende de **h**. Dizemos que **h** está representando uma variável independente e **s** a variável dependente.

Neste caso que estamos estudando, s , a área do retângulo, só está dependendo de h , porque fixamos um valor determinado para a base. Todos sabemos que a área do retângulo depende de sua base e de sua altura. Sendo assim, função dessas duas variáveis.

Nesta expressão h , variável independente, **usualmente** é representada por x . Da mesma forma, S é uma variável **dependente**, é usualmente representada por y . Logo nossa relação pode ser escrita como: $y = 20x$

FICHA DE ATIVIDADE 3 - DOBRANDO E GENERALIZANDO

1) Pegue uma folha de papel para desenvolver a atividade abaixo:

Recorte um quadrado de lado do comprimento que você escolher. Dobre-o ao meio, formando um retângulo.

Desdobre. Em quantas partes o quadrado ficou dividido?

Dobre ao meio a figura obtida após a primeira dobra.

Desdobre. Em quantas partes o quadrado ficou dividido?

Repita este processo até onde for possível.



Para construir o quadrado o professor pode utilizar diversos recursos: dobradura, papel quadriculado ou construção geométrica.

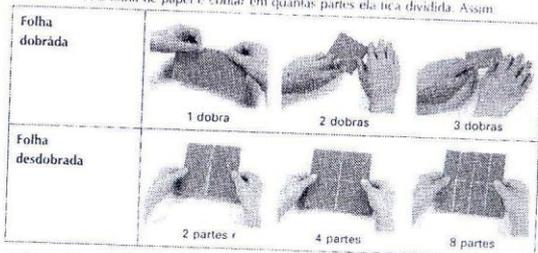
Uma idéia possível seria propor o retângulo (no lugar do quadrado), porém o professor teria que determinar onde a primeira dobra deveria ser feita.



Em outras dobras a partir da segunda dobra não teríamos partes iguais, como na figura.



Vamos dobrar a folha de papel e contar em quantas partes ela fica dividida. Assim:



a) Se pudermos continuar, com 5 dobras, quantas seriam as partes? E com 10 dobras?
b) O número P de partes é função do número d de dobras. Qual é a fórmula dessa função?

1- Registre cada resultado na tabela abaixo.

Número de dobras	Número de partes após cada dobra
1	
2	
3	
4	
5	
n	

Dependendo do quadrado escolhido a tabela poderá ficar com mais ou menos linhas. Numa determinada hora você não conseguirá mais dobrar o papel.

O professor deve estimular os alunos a observar regularidades na tabela. Grande parte dos alunos não usa num primeiro momento a letra para expressar regularidades. O professor deve registrar conclusões como: o número de partes é igual ao 2 vezes 2 vezes 2, ou multiplicar o 2 tantas quantas forem as dobras. A partir das falas podemos introduzir o uso da letra.

FICHA DE ATIVIDADE 4 - COMPETÊNCIAS DE MOTORISTA



1) Um carro está percorrendo uma estrada com velocidade média de 60 km/h.

a) Qual a distância que ele percorre em uma hora? E em duas horas?

b) Calcule a distância percorrida pelo carro em meia hora, em 1 hora e meia, em 3 horas e em 4 horas.

c) Complete a tabela abaixo, associando a cada tempo a distância percorrida:

A	B
horas	km rodados
0	
1/2	
1	
1 1/2	
3	
4	

d) Que estratégia utilizou para encontrar os valores da coluna B?

e) Se o tempo fosse t horas qual seria a distância percorrida?

2) Um motorista vai a um posto de gasolina para lavar e abastecer seu carro. O posto cobra R\$ 15,00 para lavar o carro e R\$ 0,60 por litro de gasolina.

a) Quanto o motorista pagará se quiser colocar 5 litros de gasolina?

b) Quanto pagará se colocar 20 litros?

c) Quanto pagaria se o tanque do seu carro já estivesse cheio?

d) Faça a tabela, associando o número de litros de gasolina ao preço a pagar.

É importante que o aluno identifique a diferença desta atividade para a anterior, temos aqui um valor constante (R\$ 15,00).

Uma atividade interessante interdisciplinar seria propor aos alunos uma pesquisa sobre a capacidade dos tanques de gasolina. Observando se está relacionado com marca, modelo, ano de fabricação ou se o carro é ou não carro popular.

FICHA DE ATIVIDADE 5 - PERFIL DO CONSUMIDOR

1) Nas prateleiras de um supermercado estão acondicionados vários rolos de papel higiênico. Estes são vendidos em pacotes de 4 rolos cada um.



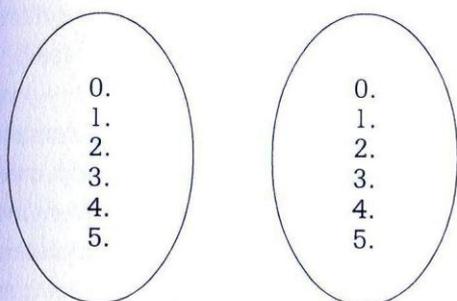
a) Complete a tabela abaixo, relacionando o nº de pacotes comprados por 6 fregueses ao número de rolos que cada um levou:

	quantidade de pacotes	quantidade de rolos
freguês A	0	
freguês B	1	
freguês C	2	
freguês D	3	
freguês E	4	
freguês F	5	

b) Vejamos uma outra forma de representar a situação acima:

Abaixo, vemos o "conjunto do número de pacotes" representado pelo conjunto A e "conjunto do número de rolos" representado pelo conjunto B. Chamaremos "x" a cada elemento de A e "y" a cada elemento de B.

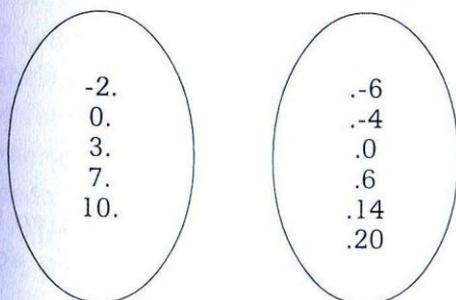
Relacione os elementos de A com os elementos de B através de setas que, partindo de cada x, atinja o y correspondente.



A esse tipo de representação chamaremos **diagrama sagital** (diagrama de setas).

2) Complete, então, os diagramas sagitais abaixo de modo que:

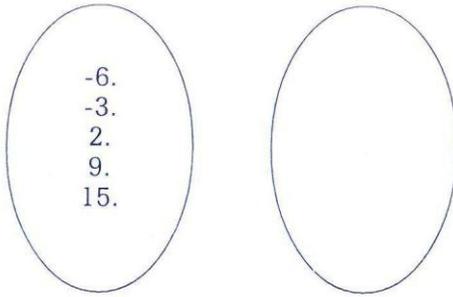
a) cada y seja igual ao dobro de x.



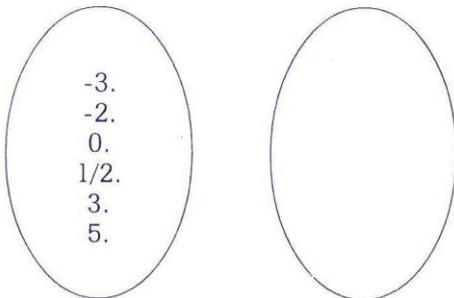
Uma vez trabalhada a relação, podemos generalizar e escrever uma lei de formação. A partir daí podemos sair da situação dos rolos de papel e modificar o domínio. É importante que os alunos saibam que agora estamos falando apenas de números, pois não tem sentido falar em -2 pacote.

Observe que nestes casos a lei de formação já está determinada. O professor deverá orientar o aluno a encontrar os números que receberão as setas. Isso envolve o trabalho com as operações. O trabalho deve ser realizado por toda a turma, preferencialmente em grupos, e após a conclusão da tarefa, as respostas devem ser confrontadas, esta é uma ação diferente da correção feita pelo professor. Estimule seus alunos a defenderem suas respostas.

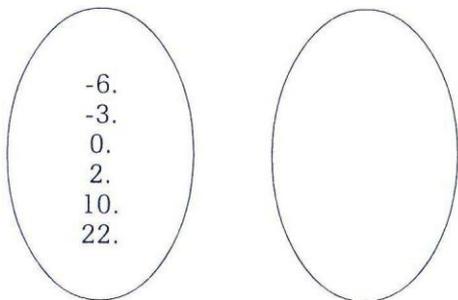
b) Cada y seja igual à terça parte de x .



c) Cada y seja igual ao quádruplo de x menos 1.



d) Cada y seja igual à metade de x mais 2.



COMENTÁRIOS FINAIS

Este trabalho não pretendeu ser original, o nosso objetivo foi contribuir com comentários e sugestões sobre as atividades aqui propostas.

Em nossos debates algumas questões surgiram e as sugestões de atividades vêm de encontro a atender algumas dessas questões.

Embora o usual seja idealizar uma turma a qual julgamos ser a melhor para trabalhar determinadas atividades, sabemos que a nossa turma se diferencia desse ideal, mas é a turma que temos e nela precisamos atuar de forma efetiva. Por exemplo, se nos deparamos com uma turma da rede pública do Rio de Janeiro, onde ocorre grande rotatividade, os alunos que comparecem numa aula nem sempre são os mesmos que irão aparecer na aula seguinte. Que fazer pedagógico o professor adota a partir dessa constatação? O trabalho passa a ser diário, onde cada atividade precisa ter começo, meio e fim. Será que os teóricos em educação consideravam essa hipótese quando pensaram em avaliação contínua?

Nessa perspectiva acreditamos que fichas de trabalho inseridas numa perspectiva mais ampla, mas que também sejam construtivas por si mesmas, possam colaborar com essa realidade que está próxima de nós. Claro que as fichas só tem sentido quando a atividade é realizada, e o professor e o aluno produzem. Essa postura é mais saudável que nos torturamos em reclamações, buscando uma turma modelo, que só existe em nossa imaginação.

Que ações concretas o professor pode fazer hoje, independente da série em que atue, para identificar e atuar de forma eficiente e eficaz no quadro educacional? Muitos trabalhos (Powell, Franksstein) vem sendo desenvolvidos onde a Matemática é ferramenta para equidade

Algumas vezes nossos alunos fazem afirmações que nos parecem absurdas. Um caminho é ironizar, o outro é discutir esse possível erro como algo construtivo. Nesse sentido os professores podem atuar como mediadores do processo de aprendizagem.

No caso específico de funções deve-se incentivar o trabalho desde o 3º ciclo (ou mesmo em ciclos anteriores) com atividades envolvendo tabelas e seqüências, trabalhar a idéia de função sob diversos aspectos, de forma gradativa e sempre que possível retornando a discussões anteriores. A formalização deve ser adiada para o 4º ciclo do ensino fundamental e para o ensino médio.

Algumas questões ficaram ao final de nossos encontros:

- É realmente necessário trabalhar exaustivamente com construção de gráficos, ou deveríamos dar ênfase a análise de gráficos?

- Se o aluno erra as contas no processo de construção, isso pode conduzi-lo a construir um gráfico que “ele sabe” que não corresponde aquela lei?

- Será importante que o aluno saiba identificar a “cara” de determinados gráficos de funções especiais tipo: linear, quadrática, exponencial?

Como dissemos no início de nosso trabalho, esse é um texto em construção, portanto continuaremos a trabalhar nele durante o ano de 2001 e esperamos que ao final possamos aumentar a nossa contribuição para o fazer diários de todos nós, professores.

BIBLIOGRAFIA

BEZERRA, M. J. *Matemática para o Ensino Médio*.

IMENES, L. M. P. E LELLIS, M. C., *Matemática*, Editora Scipione, São Paulo, 1997, 8a série, pp.225.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: *Ensino Médio*. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: 1999.

PONTE, J. P., *Metodologia de trabalho*, Seminari per a la formació de recerca, Universidade de Lisboa, 1999, pp.21-31