Rupturas no Estatuto Matemático dos Números Negativos[1]

Gert Schubring
Tradução / **José Paulo Q. Carneiro e Rosa M. Mazo Reis***

Na Alemanha

Ao contrário da França, a Alemanha não conheceu esta rejeição do estatuto matemático dos números negativos, pelo menos até os anos 1820. Em vez disto, o que se vê é, desde a metade do século XVIII, o estabelecimento de um quadro teórico para justificar as operações algébricas com todos os inteiros: é a "doutrina das quantidades opostas". Por outro lado, nem esta teoria, nem a noção de "quantidades opostas" foram aproveitadas e nem sequer (que eu saiba) discutidas na França[16]. Vejamos brevemente de que maneira os manuais alemães apresentaram os números negativos.

A.G. Kästner (1719-1800), professor de matemática na Universidade de Göttingen, é o autor de uma série de manuais destinados ao ensino universitário, que obtiveram um grande sucesso e influenciaram muito o ensino da matemática durante toda a segunda metade do século XVIII na Alemanha. A primeira obra desta série (1755), que abordava os elementos de aritmética e de geometria, desenvolve (antes de tratar da operação de subtração) o conceito de quantidades opostas, usando uma terminologia oriunda da lógica. "Chamam-se quantidades opostas quantidades da mesma espécie, que podem ser consideradas na condição de que uma diminui a outra" Kästner (1792, p.71). O autor dá, como exemplos, os bens e as dívidas; ele chama uma destas quantidades "positiva" ou "afirmativa", e sua oposta, "negativa" ou "negante", tendo o cuidado de ressaltar que a escolha inicial é inteiramente arbitrária. Quanto às relações entre essas quantidades, o autor esclarece que a quantidade negante pode ultrapassar a afirmativa, e que este "negativo"

* Continuação do artigo, de mesmo título, publicado no Boletim do GEPEM número 37.

que então sobra é uma quantidade real ("wirkliche Grösse"). Lá negante é oposta àquela que se decidiu considerar como positiva (ibid., p.72). Nos capítulos seguintes, Kästner desenvolve todo o seu cálculo aritmético com quantidades opostas.

Esta exposição é retomada pelo célebre filósofo I. Kant, em sua "Tentativa de introduzir as quantidades negativas na filosofia" (1763), para justificar filosoficamente a doutrina das quantidades opostas. Nessa obra, Kant considera indispensável distinguir, por exemplo, a contradição lógica (A e não-A não são verdadeiras ao mesmo tempo) e a contradição real, na qual as determinações se negam ("aufheben")[17] mutuamente, isto é, dão como resultado nada/zero. Assim, a distinção tem como conseqüência a distinção entre o nada absoluto (ou concepção filosófica) e o nada relativo (como o zero matemático), e a admissibilidade das quantidades que são "menos que nada".

São abundantes os exemplos de casos em que se adota a doutrina das quantidades opostas na Alemanha. Para citar apenas um, que provém da cultura protestante, e outro, que provém da cultura católica, falarei brevemente sobre o manual de J.G.E. Maass e o de A. Metz.

Para Maass, professor de filosofia e de matemática na Universidade protestante de Halle, a noção de "oposição" é fundamental e ele a introduz no início de seu tratado (1796), antes mesmo de abordar as operações aritméticas. Maass coloca esta noção como conseqüência da lógica e de sua teoria das relações. Sob o aspecto da qualidade, existem duas relações distintas entre os números, unanimidade e oposição. De acordo com Maass, duas quantidades são opostas quando elas se "negam" ("sich aufheben") quando as juntamos. Chamamos então de **positiva** aquela dentre as quantidades opostas que se considera como "negada", e de negativa aquela que se considera como "negante". Maass define e pratica sem nenhuma restrição especial todas as operações com os números negativos (que não são, portanto, grandezas).

A. Metz, professor de filosofia na Universidade católica de Würzburg, parte também dos números inteiros e desenvolve o cálculo com os números negativos depois de ter exposto a doutrina lógica sobre a noção de oposição. Além disto, ele afirma que se pode comparar as quantidades negativas a um série ordenada: "De acordo com esta concepção, é fácil agora compreender que $-7<-3$" (Metz 1804, p.53). Notemos que esta proposição teria sido totalmente incompreensível na França daquela época!

Paralelamente à produção de manuais, desenvolveu-se na Alemanha, a partir do fim do século XVIII, uma reflexão metodológica e didática que ambicionava tornar precisa a doutrina das quantidades opostas e, a partir daí, o cálculo com números negativos. Apresentamos a seguir alguns elementos desta reflexão, do modo como está presente em numerosos artigos e monografias.

Uma das primeiras publicações consagradas a esta reflexão teórica é um artigo de G.S. Klügel (1739-1812), professor de matemática em Halle, conhecido principalmente por suas contribuições aos fundamentos da matemática e por seus trabalhos de vulgarização. Este artigo contém, na minha opinião, a descrição mais precisa que exista da recusa em explorar a fundo toda a riqueza dos instrumentos algébricos: o Klügel critica neste artigo os propagadores da recusa de somente praticar uma álgebra bastante limitada, que não passa de uma geometria elementar transposta. Klügel observa que as quantidades opostas não são conhecidas na "matemática dos antigos e na matemática moderna que é tratada pelos métodos dos antigos" porque, em ambos os casos, a matemática é considerada de um ponto de vista do "método sintético"[18]. Ora, o método sintético só reconhece os casos isolados; mesmo nas ocasiões em que o método analítico reúne vários casos aparentados em uma única fórmula, o método sintético aborda cada caso em separado. Enquanto o método analítico utiliza a simbolização das quantidades por meio dos sinais, e tira partido, para a resolução dos problemas, da generalização propiciada pelas relações entre os sinais, o método sintético tem que procurar, para cada problema, um caminho particular de solução. Na verdade, com o método sintético, não se tem necessidade de quantidades negativas, porque sempre se poderá encontrar, para um caso isolado, os meios de evitar uma solução negativa (Klügel 1795, p.311ss). Por isto, Klügel adverte os "analistas alemães" contra este método (ibid., p.471), praticado e propagado pelos ingleses, imitando os antigos (ibid., p.316). É preciso notar que a concepção "analítica" do Klügel foi também limitada, num anexo, ele propaga uma abordagem alternativa restringindo as operações nas quantidades "absolutas".

Klügel tinha razão em fazer esta advertência, na medida em que a ruptura que se observa na França, alguns anos mais tarde, aparentemente deve ser atribuída a uma "transmissão" do método inglês (no mesmo momento que a "transfusão" da filosofia inglesa do "senso comum", uma das razões da ascensão do espiritualismo e da queda da filosofia das Luzes, ver Schubring 1984, p.372). De fato, à abordagem sintética corresponde uma matemática totalmente diferente daquela que tem a aritmética e a álgebra como duplo fundamento: a matemática sintética é uma "matemática de problemas", onde não há interesse nas estruturas.

P.J. Hecker, professor de matemática na Universidade de Rostock, que discute o ensino da doutrina das quantidades opostas em três dissertações em 1799 e 1800, é o primeiro a encarar uma verdadeira revisão dos elementos de aritmética: ele demonstra que as operações matemáticas mudam de significado quando se passa das operações com números positivos às operações com inteiros, e que se deve redefinir estas operações, saber estendê-las, para torná-las aplicáveis a todos os inteiros (Hecker 1799, pp. 9-12). Hecker é também o primeiro a descobrir as diferenças entre as operações com números e as operações com grandezas, bem como as operações mistas (por exemplo, a multiplicação e a divisão de grandezas com números, ibid., pp. 16-17).

H.D. Wilckens, professor de matemática em uma academia florestal, aprofunda a noção lógica de oposição e introduz distinções muito nítidas entre o sinal de uma operação, o sinal de um número e o valor absoluto de um número. Para expressar esta diferença, ele propôs uma notação segundo a qual a oposta de uma quantidade a é representada por $\overline{a}$ e as quantidades opostas são definidas pela equação $a+\overline{a}=0$. (Wilckens 1800)

Foi no quadro desta discussão sobre os fundamentos que foram refutadas, na Alemanha, as teses de Carnot. F.G. Busse, professor de matemática na Escola de Minas de Freiberg, publica, já em 1804, uma resposta a Carnot. Busse explica que embora, historicamente, os sinais das operações tenham sido concebidos apenas para o uso exclusivo dos números absolutos, apresenta como um dos progressos da álgebra que os coeficientes e as variáveis podem atingir valores positivos e negativos. Ele distingue estes sinais das operações dos sinais dos próprios números. Para Busse, álgebra constitui o fundamento da matemática, enquanto a geometria não passa de uma espécie de álgebra aplicada. As contradições que aparecem no domínio da geometria não atingem portanto a álgebra e devem resolvidas em geometria (Busse 1804).

A refutação mais radical das teses de Canot[20] encontra-se na primeira apresentação verdadeiramente precisa de uma teoria dos números negativos, publicada em 1917 e devida a W.A. Förstemann, professor de matemática n Ginásio de Danzig. Que eu saiba, este livro é também o primeiro a estabelecer sistematicamente uma separação entre quantidades e números. Förstemann critica a noção de quantidade, excessivamente geral, segundo ele, e propõe substituí-la pelos dois conceitos de grandeza e de número. Somente os números constituem a base da aritmética. É somente com os números que se podem executar as operações algébricas (portanto, não com grandezas):

> "***Grandezas*** *são: linhas, ângulos, extensões, planos, sólidos, pesos, extensões do tempo, conjuntos de pessoas ou de livros.* ***Números,*** *no entanto, são apenas expressões das relações entre quantidades da mesma espécie"* (Förstemann 1817, p.1).

Pode-se multiplicar números e elevá-los a potências, mas não se pode fazer o mesmo com grandezas. Portanto, não existem quantidades (ou grandezas) negativas, mas podem existir números negativos[21]. Förstemann abstém-se de dar uma definição filosófica da oposição, mas transpõe esta noção em termos matemáticos:

> *"Dois números são opostos aditivamente quando a subtração de um efetua o mesmo resultado que a adição do outro"* (ibid., p.8)

Utilizando $\overline{a}$ como símbolo do número oposto a a, Förstemann chega à definição seguinte: para um número inteiro qualquer b, seu oposto $\overline{b}$ é dado pela equação $b+\overline{b}=0$; a subtração geral em números inteiros é portanto definida por: $a\text{-}b=a+\overline{b}$ (ibid., p.9).

Förstemann estabelece, em seguida, e nisto ele é também o primeiro, as regras do cálculo restrito que se pode efetuar com as grandezas e as do cálculo misto com números e grandezas (por exemplo, a multiplicação escalar).

Apesar desta forte tendência em favor dos números negativos, na Alemanha, a matemática alemã não escapou completamente da influência da epistemologia francesa e da refutação das quantidades negativas. Esta importação deu lugar a "distorções cognitivas" e a uma variedade de posições sobre a questão do negativo. Um exemplo eloqüente de uma importação direta é o da concepção da álgebra defendida por J.P.W. Stein, antigo aluno da Escola Politécnica (promoção em 1813), que havia anteriormente trabalhado no corpo dos engenheiros-geógrafos, e depois foi "repatriado" da Prússia em 1815, tornando-se professor de matemática no Gymnasium de Trèves. No seu manual de álgebra (1828/29), Stein analisa as diversas concepções então vigentes sobre os números negativos e as reagrupa em três categorias.

1. Os números positivos e negativos são as designações de quantidades que realmente existem, mas que têm qualidades opostas.

2. As quantidades negativas e tudo que não é um "número normal" (isto é, absoluto) não passam de símbolos arbitrários que podemos utilizar como meios intermediários no decorrer do cálculo, mas que não devem figurar no resultado final.

3. O emprego de quantidades negativas isoladas é rejeitado e estas só são utilizadas com referência às quantidades normais, ou seja, como "indicações" de uma operação não executável de subtração; por exemplo, a-b, onde $b>a$ (Stein 1828, p. VII).

O próprio Stein é partidário da segunda categoria de posições, que é tipicamente francesa. Ele não só rejeita a existência dos números negativos, como também se recusa a considerar "zero" como número. Stein explica de modo bastante claro esta escolha epistemológica: ele utiliza os números apenas como representantes das grandezas e recusa-se lhes atribuir um estatuto teórico. Stein explica as equações algébricas em termos de grandezas do "mundo físico" (em francos, em metros, em dívidas, em bens), e principalmente com a ajuda de grandezas positivas. Ele evita utilizar a doutrina das quantidades opostas, porque ela tem para ele um caráter metafísico.

A terceira posição esboçada por Stein é a que adota o matemático alemão M. Ohm (1792-1872). Embora L. Novy tenha atribuído a Ohm uma contribuição original aos fundamentos da álgebra (L. Novy 1973, p. 85-89), pode-se dizer que sua concepção também é o resultado de uma transmissão das concepções francesas. Isto é marcado de modo bem particular pelo papel privilegiado que ele atribui aos números, absolutos ou naturais. Do mesmo modo, Ohm jamais recorre à doutrina das quantidades opostas e o uso característico da expressão "operação indicada" revela as influências de Condillac e de Carnot. Na prática matemática, a primeira e a terceira posição não diferem muito, não passando a terceira de uma "reserva mental". Entretanto, esta posição ergue-se como um obstáculo à passagem das operações com os números naturais às operações com os números reais.

Restaria analisar como as posições "tradicionalistas" alemãs e as posições "importadas" da França interagiram, na Alemanha, e como a definição weierstrassiana dos números negativos acabou vencendo. Isto eu não posso fazer dentro dos limites do presente artigo.

Efeitos da Rejeição dos Números Negativos, Relacionados à Álgebra

Tendo a recusa de acordar um estatuto matemático aos números negativos tomado tal amplitude, as controvérsias não puderam ficar restritas à Álgebra. De fato, estudar os efeitos desta recusa no desenvolvimento matemático (e didático) constitui um problema bastante interessante para pesquisas históricas, mas, ao mesmo tempo, é um problema de grande complexidade.

Para se dar uma idéia, eis algumas indicações: as conseqüências da recusa dos números negativos aparecem em todas as situações onde se aplica a Álgebra à Geometria. Fato ainda não destacado (em meu conhecimento), é que é em torno da Trigonometria que se dão as discórdias mais acirradas sobre a aceitação (ou a rejeição) dos números negativos! Isto não deveria ter nada de espantoso, uma vez que, em Trigonometria, os números negativos não intervêm somente ao final de uma resolução, quando aparecem as soluções das equações, mas eles são utilizados para resolver diversos procedimentos e são assim reais instrumentos matemáticos. Entretanto, não deveríamos concluir que os números negativos se impõem como indispensáveis em Trigonometria.

Deve-se então tomar precauções para não interpretar precipitadamente os desenvolvimentos que nos parecem ser "necessários". Desta forma, nos manuais de Trigonometria da primeira metade do século dezenove, tanto na França como na Alemanha, encontramos desenhos e gráficos, mas raramente eles aparecem com os eixos coordenados, os quatro quadrantes; e eu jamais vi nos manuais franceses desta época os números relacionados com as coordenadas dos eixos (evitava-se assim o uso de números negativos para as coordenadas nas duas direções)[22]. Até mesmo as fórmulas trigonométricas para ângulos compreendidos entre 0 e 2π, que, para nós, requerem os conceitos de função e de variável, podem ser abordadas através do método sintético que considera os quatro quadrantes como casos particulares.

Efeitos das Escolhas Epistemológicas Sobre a Matemática em Geral

A rejeição dos números negativos teve também importantes repercussões sobre a matemática em seu conjunto. A ênfase colocada sobre uma Geometria pura, sem mistura com a Álgebra, fez nascer um novo tipo de "Geometria sintética" estabelecido por Carnot, Poncelet e J. Steiner. Além disso, esta refutação deu um impulso singular à aparição de uma nova disciplina matemática: a Geometria Vetorial. Tendo a Geometria tradicional revelado-se impotente para tratar as questões de posição de uma forma mais generalizada, houve diversas tentativas de introduzir e precisar a noção de direção em Geometria, notadamente para interpretar geometricamente os números imaginários. Mourey parece ter sido o primeiro a introduzir o vetor como novo conceito fundamental. Em uma obra de 1828 (reeditada em 1861), "dedicada aos amigos da evidência", Mourey (um personagem quase desconhecido) introduziu a noção de "caminho", unificando as duas noções de comprimento e direção em um só novo conceito fundamental. Ele estabeleceu também um cálculo das operações sobre os caminhos. O que é diretamente pertinente para o nosso propósito é que Mourey chega a essa teoria pelo viés de sua refutação dos números negativos. Devido ao caso de um termo indeterminado, como x - a ou a - x, em que não se pode prever se o resultado será "absurdo" ou não, Mourey excluiu a subtração da Álgebra.

"Segue-se que o sinal – , considerado como exprimindo a subtração, não pode ser utilizado em Álgebra" (Mourey, 1861, p. 1).

Estando a Álgebra assim tão gravemente amputada, Mourey procura um "meio de substituir a subtração" (ibid., p. 2) e é assim que ele descobre uma nova Geometria, a Geometria dos caminhos. Vale ressaltar que Hermann Grassmann (considerado o descobridor da Geometria Vetorial) reclamou em 1844 que a essência de sua descoberta residia justamente na fusão dos dois conceitos de comprimento e direção com o de vetor (H. Grassmann, 1844, p. 145-146)[23]. Além disso, ele sublinhou que a motivação principal de seu trabalho resultou da "consideração do negativo dentro da Geometria" (ibid., p. iii). Como a Álgebra Linear está na origem da Geometria Vetorial, podemos dizer que a recusa de uma algebrização direta a tudo, acaba por permitir uma certa algebrização no seio da Geometria.

Regresso à Noção de Obstáculo Epistemológico

As principais causas da contestação do estatuto matemático dos números negativos pertencem a três grandes categorias que defino a seguir:

a) Os obstáculos internos à Matemática

O problema central consiste em diferenciar o conceito de quantidade e estabelecer o de número como novo conceito fundamental e independente; trata-se então da aparição do tripé: quantidade – grandeza – número, onde:

- **quantidade** é historicamente o conceito de base para toda a Matemática, mas nos dias de hoje "quantidade" não representa mais um conceito matemático concreto. Antes, ele se reduz a um elemento de retórica, aparecendo ocasionalmente no discurso sobre a Matemática[24];

- **grandeza** adota uma parte dos significados originais de "quantidade"[25], como por exemplo o de "número concreto" ou (dentro da terminologia escolar tradicional) "números complexos" ("benannte Zahlen" como 5 quilômetros ou 2 francos) e é utilizado, nos programas escolares, como noção a partir da qual são desenvolvidos, por abstração, os "números abstratos", então 5 ou 2 (podemos dizer então que "grandeza" constitui o conceito de base para a Aritmética escolar);

- **número** é o conceito central de uma das partes da Matemática, a Aritmética.

Parece então que, na França, a diferenciação entre quantidade e número tenha aparecido bastante tarde e que "quantidade" foi longamente utilizado como conceito integrador, na Aritmética, na Álgebra e na Análise. Esta falta de diferenciação criou obstáculos à diferenciação dos conceitos de variável e função do conceito de "quantidade", e à admissão destes como conceitos de base da Álgebra e da Análise. Uma conseqüência da indiferenciação de "quantidade" foi a falta de diferenciação explícita entre grandezas e números. Um obstáculo particular era a diferenciação entre: valor absoluto de um número, sinal de um número e sinal de operação sobre os números [26].

Notemos que esta categoria de obstáculos não parece ter causado rupturas, propriamente falando, e que ela teria, antes, contribuído para os (lentos) progressos marcados pelas diferenciações conceituais.

b) Os obstáculos epistemológicos

Esta é uma categoria totalmente diversa, que é responsável pelas rupturas que apareceram. Encontramos aqui as epistemologias subjacentes à transmissão do saber científico à sociedade em geral. Por "epistemologia", podemos compreender as concepções mantidas sobre as condições da "existência" das entidades matemáticas. Estas epistemologias se apresentam na alternativa seguinte:

- uma epistemologia substancialista (ou ontológica), segundo a qual os conceitos são justificados por uma redução aos seres aos quais outorgamos uma existência como a do mundo físico;

- uma epistemologia sistêmica, onde a existência é justificada pela coerência do campo conceitual, devendo os conceitos satisfazer apenas às condições internas da Matemática.

A meu ver, a opção em favor de uma ou de outra destas epistemologias, dentro de uma dada cultura, ressalta as condições sociais (das quais dependem também o "gosto" ou "desgosto" pelas ciências puras) e é, desta forma, suscetível a mudar e conhecer rupturas.

c) A arquitetura da Matemática

Há uma terceira categoria de causas dos obstáculos aos quais vêm se misturar e interagir as causas internas ao desenvolvimento matemático e as causas propriamente epistemológicas. Trata-se das concepções sobre a "arquitetura da Matemática", e, particularmente, das concepções sobre o peso relativo da Álgebra e da Geometria, com respeito aos fundamentos da Matemática. Várias opções são apresentadas, cada uma tendo por conseqüência uma diferenciação particular:

- se a Álgebra e a Geometria são igualmente fundamentais, de fato, devemos ter as noções fundamentais que possam servir uma vez na Álgebra ou na Geometria. O efeito disto é impedir uma diferenciação da noção de quantidade, visto que supõe-se que esta noção compreenda aquela dos números (como "quantidade discreta") e aquela de "linha" (como "quantidade contínua");

- ou se uma destas partes domina a outra;

- se então a Geometria é considerada como a disciplina mais fundamental, que incluiu alguma sorte de Álgebra (é a posição dos Gregos e de Euclides), então a quantidade serve de noção de base e a noção de número é derivada;

- ou se é a Álgebra que é vista como a disciplina fundamental em si, a Geometria não sendo mais que um campo de aplicação da Álgebra, então temos a concepção que sustenta o esforço chamado "aritmetização da Matemática", com o número como noção de base.

As questões que são levantadas sobre a arquitetura da Matemática são primordiais, para a didática assim como para a elaboração de programas de ensino, porque tocam nos problemas de transposição do saber científico às "seqüências didáticas", seguindo uma ordem, seja "lógica", seja "natural", seja "psicológica". É também em torno destas questões que são expressas as visões da Matemática mantidas pelo grande público. Assim, parece-me que foi esta categoria que realizou uma contribuição bastante determinante aos casos de rupturas.

Antes de concluir, há certas observações que gostaria de fazer sobre a noção de obstáculo epistemológico, como explicativa da aparição de rupturas no estatuto conferido a certos conceitos matemáticos. No começo desta pesquisa, eu estava convencido de que a noção de **obstáculo epistemológico** era a categoria explicativa adequada (e confesso que esta terminologia é bastante sedutora), mas (sem me misturar na discussão dos didáticos franceses (ver Brousseau, 1983 e Glaeser, 1984)) depois de uma volta às fontes bachelardianas (Bachelard, 1938/1975) tenho dúvidas sobre a possibilidade de aplicar esta noção. Minhas dúvidas não vêm tanto do fato de Bachelard ter excluído o conhecimento matemático do domínio da aplicação de sua noção de obstáculo epistemológico, dizendo:

"A história da Matemática é uma maravilha de regularidade. Ela conhece períodos de parada. Ela não conhece períodos de erros" (Bachelard, 1975, p. 22).

A meu ver, esta observação apresenta uma visão muito estreita do erro.

Mas a posição de Bachelard torna-se realmente problemática quando entende "a formação do espírito científico" como um processo teleológico, ou seja, dirigido **necessariamente** a um progresso em teoreticidade, à vitória última da razão. Reconhecemos aí a visão racionalista da matematização, suposta necessária e desejável, das ciências no seu processo evolutivo. Deste ponto de vista, o processo de formação do espírito científico se realiza em três etapas sucessivas (bastante análogas às de Piaget): um estado concreto, pré-científico, onde reinam os fenômenos; um estado concreto-abstrato, onde a experiência física completa-se com as abstrações; enfim, o estado abstrato propriamente dito (identificado com nossa época), onde domina a razão teórica. Para Bachelard, não há ruptura no progresso da razão humana: se há recuos na nossa época, são pontuais e provisórios, não representam mais que uma "sonolência do saber" nos indivíduos (1996, p. 10), e não uma escolha deliberada. Por "obstáculos epistemológicos" podemos então compreender as expressões de tais "sonolências" individuais (donde a atenção que a didática lhes destina).

Mas a história "social" dos números negativos nos oferece exemplos onde a escolha por uma epistemologia parece ter sido feita (como decisão "coletiva", e não somente de alguns indivíduos!) com um pleno conhecimento das epistemologias concorrentes. Para o estudo de tais casos, não podemos recorrer à noção de obstáculo, que supõe, ao contrário, uma certa incapacidade, intelectual ou outra. Então, se uma escolha é feita com conhecimento das diversas possibilidades, não se pode desqualificar a epistemologia que sustenta esta posição, rotulando-a como "obstáculo".

Contudo, as reflexões de Bachelard podem ser utilizadas para esclarecer as dificuldades dentro dos desenvolvimentos conceituais (particularmente na primeira categoria de causas). Bachelard mostrou bem como o "conhecimento geral" e uma epistemologia "substancialista" podem transformar-se em obstáculos ao conhecimento científico, em seu estado pré-científico. Por "conhecimento geral", Bachelard entende que são conceitos "corretos e úteis", mas que podem constituir um obstáculo "oferecendo ao pensamento uma forma geral prematura" (ibid., p. 82). Como exemplo, ele analisa o conceito de fermentação do século dezoito como não diferenciado e, portanto, não operacionalizado[27].

Assim, a noção de quantidade apresentou este mesmo caráter universal, geral e intuitivo (ver ibid., p. 98) que impede a especificação das idéias que ela recupera. D'Alembert critica a definição correntemente considerada da "grandeza" (em sua época tomada como definição da "quantidade" por toda parte) como muito geral e inconveniente para a pesquisa.

> *"Segundo a definição que acabamos de trazer, devemos chamar de* ***grandeza*** *tudo aquilo que é suscetível de aumento e diminuição; ora, a luz é suscetível de aumento e diminuição; entretanto nos expressaríamos com forte impropriedade considerando a luz como uma grandeza"* (Encyclopédie, vol. 7, p. 855).

Ademais, falando de obstáculo "substancialista", Bachelard analisa toda uma série de tendências do pensamento científico, onde ligamos diretamente a uma substância, as qualidades diversas de um conceito (ibid., pp. 121 ss). Neste artigo, colocamos em evidência diversas argumentações contra a existência de números negativos, que se nutrem de um substancialismo deste tipo. Como, entre outros, a identificação da Geometria (euclidiana, em três dimensões) ao espaço de nossa experiência sensível, que supões que a Geometria pode ser apreendida pela evidência ou pela intuição direta.

Observações de Conclusão

As concepções bachelardianas parecem subentender o desenvolvimento cognitivo e científico independente das mentalidades e das visões específicas das nações, como um invariante cultural. Ora, o estudo aqui apresentado fornece indicações sobre as dependências manifestas entre os contextos culturais e nacionais e as epistemologias favoráveis (e desfavoráveis) a certos desenvolvimentos científicos. Estas dependências advertem contra uma transposição imediata de uma certa etapa da evolução científica para o processo de aprendizado, designemos esta etapa como um "obstáculo" ou a privilegiemos como etapa necessária a cada indivíduo, de uma nova geração.

Entretanto, ao mesmo tempo, estas dependências implicam uma responsabilidade da didática, que deve levar em conta as epistemologias subjacentes e as suposições, por vezes implícitas, de suas próprias proposições sobre o ensino.

Notas

1. Versão redigida de uma exposição ao colóquio "História e Epistemologia da Matemática", Montpellier 31.5 – 1.6.1985.

2. Outros exemplos são: o número 15.3 (maio) 1984 do "Journal for Research in Mathematics Education". Apesar do número ser dedicado inteiramente aos problemas da subtração, nenhum dos artigos discute os números negativos.

3. Houve outros estudos de didática versando sobre história. Um estudo bastante interessante descreveu como os autores utilizaram a história dos números negativos para desenvolver nos docentes uma certa sensibilidade aos obstáculos inerentes a este conceito. Eles colocaram um ponto particular no esclarecimento da natureza **convencional** da "regra dos sinais". A história da matemática parece, segundo os autores,

progredir em marcha lenta, porém contínua (Arcavi et al., 1982). Um outro artigo discute os problemas dos números negativos dentro da história da matemática em relação aos modelos, atualmente utilizados nos EUA para ensinar as quatro operações sobre os inteiros (Crowley/Dunn 1985).

4. De fato, eu só conheço um exemplo de refutação da regra dos sinais, J. Klostermann (Petesburg). Correspondente associado da sociedade real de ciências de Göttingen, ele estabeleceu, em 1804 e 1805 o "teorema" seguinte: menos multiplicado por menos dá menos. Notavelmente, ele não refuta a existência dos números negativos. No entanto, ele aceita o cálculo com as "quantidades opostas". O erro principal de sua "demonstração" reside no fato que ele não distingue entre o sinal da operação e o sinal do número (Klostermann 1804 e 1805).

5. Segundo o princípio da permanência, não há um só sistema de leis que reja as operações sobre todos os sistemas de números, mas antes uma hierarquia:

A extensão progressiva do sistema de naturais aos sistemas (maiores) dos inteiros, racionais, reais é definida de uma tal maneira que o conjunto das leis em vigor no sistema inferior continua em vigor no próximo sistema superior.

6. Este livro de um Engenheiro-topógrafo e "Geômetra chefe do Cadastro da Costa do Ouro" é apenas o segundo tratado de didática de matemática na França, junto com o de Lacroix, por toda a primeira metade do século XIX!

7. Busset culpa particularmente Euler, de ter "resolvido esta questão pela afirmativa! Ora, não temo dizer, apesar de meu respeito... pelo gênio de Euler..., esta doutrina é para mim o auge da aberração da razão humana, e só a ela, ela será suficiente, seja para afastar do estudo da matemática uma multidão de espíritos excelentes, seja para acreditar todas as falsas idéias que debitamos sobre estas ciências" (Busset, 1843, p. 47).

8. Glaeser menciona também a dimensão epistemológica das relações da matemática com a realidade física (Glaeser 1981, p. 339), mas a relação grandeza-número não figura nesta lista de obstáculos (ibid., p. 308).

9. Para o período indo das origens até a Idade Média, eu me servi principalmente de artigo de J. Sesiano (1985), que descreve o desenvolvimento dos números negativos durante este período como uma passagem do concreto ao abstrato.

10. Luca Pacioli toma uma posição ambígua: nota-se nele uma refutação, instintiva, dos números negativos, entretanto ele admite uma vez um preço negativo em um problema comercial e uma outra vez considera a solução negativa em um problema abstrato como um "belissimo caso".

11. D'Alembert não distingue o zero matemático do nada absoluto da filosofia.

12. O editor da publicação póstuma transformou "equação" em "operação". Uma mudança que não faz sentido algum e que obscureceu as intenções de Condillac.

13. Carnot diferenciou claramente, no texto de 1801, a quantidade de seu "valor absoluto", o valor positivo e o valor negativo (Carnot, 1801, p. 2). Assim, não se pode mais criticá-lo por

14. Um exemplo eloqüente é o manual de Francoeur, destinado aos alunos da Escola Politécnica e aos universitários de Ciências. No quadro da resolução das equações, em Álgebra, ele discute longamente a solução $x = \frac{b-d}{c-a}$ segundo os casos: $b > d$ ou $b < d$ e ou $c > a$ ou $c < a$. Evidentemente, ele discute esta questão de Álgebra segundo o método da Geometria " dos antigos"; considerando essses casos isolados e independentes. Enfim, ele exclui dois casos como soluções impossíveis porque: "Toda solução negativa denota um absurdo" (Francoeur 1819, vol. 1, p. 149-150). Paralelamente reveladora é a nota "sobre a teoria da quantidades positivas e negativas – de acordo – do famoso manual "Cours d´Analyse" de Cauchy (Cauchy 1821, p. 333-359): ela mostra a necessidade, para Cauchy, de apresentar aos alunos da Escola Politécnica os elementos da Álgebra de maneira que os números negativos sejam aceitos.

15. Depois de procurar um exemplar deste livro (um processo de longa duração) eu fiquei muito surpreso de constatar que antes deste primeiro capítulo "Números positivos e negativos" há como uma verdadeira "cabeça" um capítulo de "Introduções" de Geometria. É uma exposição da doutrina de segmentos orientados, ou melhor, dos "caminhos" (de acordo com a terminologia Mourey, ver mais longe). Ela é utilizada como justificativa ontológica de número negativo. Referindo-se às propriedades dos caminhos (respectivamente dos segmentos), aplica-se as regras do cálculo com o novo tipo números. É preciso acrescentar que sete é um dos raros manuais onde se enfatiza o caráter convencional das regras dos sinais. (Bourlet 1896, p. 21).

16. Esta diferença não foi mencioada até hoje, na historiografia. É muito difícil avançar nas hipóteses sobre as razões desta evidente diferença. Entretanto, a doutrina das quantidades opostas deriva-se das reflexões filosóficas, parece-me que houve na Alemanha debates e trocas bastante estreitas e frutíferas entre matemáticos e filósofos. Além das diferenças profundas entre a filosofia alemã e a filosofia francesa, existe uma desconfiança entre autores (de numerosas correntes filosóficas) de sistemas transcendentes desacreditados, na Fraca, ao lado da anexação à filosofia jesuíta.

17. Infelizmente, não existe uma tradução adequada da palavra "aufheben" (o que já é muito indicativo!). Segundo Hegel, por exemplo, "aufheben" tem às vezes o sentido de negar, assim como o de conservar.

18. A dupla "método analítico" – "método sintético", conheceu, no decorrer da história uma grande variedade de significados (que já expliquei na minha exposição da terceira Escola de Verão de Didática da Matemática, julho 1984, Orleans). Entretanto o significado atribuído aqui aos dois métodos por Klügel tem muitas vantagens porque ele nos conduz ao fundo dos debates ideológicos sobre o "método".

19. Esta crítica é correta, mas Carnot não a aceita como refutação porque ela implica admissão dos números inteiros, tanto que para Carnot só há números absolutos e o significado dos sinais x e - é simplesmente de sinais das operações.

20. Uma outra refutação exaustiva se encontra no livro de W. A. Diesterweg (1831) que trabalha no mesmo nível da "matemática de problemas" mas que defende a independência da Álgebra, apesar desta tendência favorável ao método sintético.

21. O primeiro texto francês onde se diferencia de uma maneira análoga entre números e grandezas é uma memória de 1843: M. Marie está prestes a admitir os números negativos (no quadro de uma "Álgebra pura"), mas uma teoria das grandezas negativas não faz para a autora nenhum sentido matemático (Marie 1843, pp. 11-12).

22. Mesmo Klügel, em "Mathematisches Wörterbuch" limita-se, sob a rubrica "Coordinate" a visualizar em seus gráficos apenas o primeiro quadrante.

E Biot (1805), que utiliza o eixo de coordenadas, designa as duas direções de um eixo pelo mesmo sinal: x e y respectivamente. Mais tarde, encontramos, em todo o século dezenove, nos manuais franceses, como expressão de um "compromisso", a designação *X, X' e Y, Y'*, respectivamente para os quatro eixos. Designa-se os pontos pelas letras nas figuras, mas não pelos números.

23. Não gostaria de excluir a possibilidade de que Grassmann tenha visto o livro de Mourey, pois encontramos este livro já citado, em 1834, em um livro sobre equações algébricas de M.W. Drobisch, matemático e filósofo em Leipzig e bem conhecido à época.

24. O termo "quantidade" não representa apenas a concepção tradicional da Matemática ("a Matemática é a ciência das quantidades", Encyclopédie, vol. 13, 1765, p. 653), donde o caráter "geral" (no sentido de Bachelard) deste conceito – mas ele implica também uma conotação filosófica: ele faz, ao mesmo tempo, alusão ao par de características filosóficas qualidade-quantidade.

25. De fato, as definições respectivas de "quantidade" e de "grandeza" na Enciclopédia mostram que os dois termos poderiam ser quase utilizados um em lugar do outro. Mesmo hoje em dia, não se distinguem sempre claramente estes dois termos (em alemão não há duas palavras diferentes como em francês (e português)). Para uma discussão didática da noção de "grandeza" e de seu contexto, ver Rogalski, 1979.

26. A emersão do conceito de valor absoluto entre os matemáticos é assaz tardia. O conceito não estava ainda claro, e mesmo definido, no início do século dezenove. Ver o estudo de A. Duroux (1983) sobre os obstáculos ligados a este conceito, estudo que contém também visões sobre a história do conceito.

27. Bachelard comenta: "o pensamento científico moderno empenha-se para especificar, limitar, purificar as substâncias e seus fenômenos. Procura o fermento específico, objetivo, e não a fermentação universal... Se tudo fermenta, a fermentação acaba sendo um fenômeno sem grande interesse. Convém, pois, definir o que não fermenta, o que pode impedir a fermentação" (Bachelard, 1996, p. 89-90).

Bibliografia

ARCAVI A., BRUCKHEIMER M. EN-ZVI R. *May be a Mathematics Teacher can Profit from the Study of the History of Mathematics*. For the learning of Mathematics, 3.1, 30-37. 1982.

BACHELARD G. *A formação do espírito científico*. Rio de Janeiro: Contraponto, tradução de Estela dos Santos abreu de *La formation* *de lésprit scientifique* Paris: J. Vrin 1975. 1996.

BELANGER G. *Une approche intuitive pour lénseigment desentiers relatifs*. Instantanés Mathemátiques, XXI.2, 5-12. 1984.

BIOT J. B. *Essai de géométrie analytique, appliqué aux courbes et aux surfaces du second ordre*. Paris, Bernard. Seconde édition. 1805.

MAINE de BIRAN. *Mémoire sur les rapports de l'idéologie et des mathématiques*. Ooevres, éd. P. Tisserand, Paris: Alcan, T. III, 1924, 1-26. 1803.

BOURLET C. *Leçons dálgébre él; ementaire*. In: Cours complet de mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. Darboux. Paris, A. Colin. 1896.

BROUSSEAU G. *Les obstacles épistémologiques et les problémes en mathématique*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 4.2. 164-198. 1983.

BUSSE F. G. *Vergleichung zwischen Carnots und meiner Ansicht der Algebra und unserer beyderseitig vorgeschlagenen Abhelfung ihner Unrichtigkeit*. Freyberg, Craz und Gerlach. 1804.

BUSSET F. C. *De lénseignement des mathématique dans les colléges, considéré sous le double point de vue des prescriptions réglementaires de l'Université et des principes fondamentaux de la science*, Paris, Chamerot. 1843.

CARNOT L. *De la Corrélation des Figures de Géométrie*. Paris, Duprat, an IX. 1801.

CARNOT L. *Géométrie de Position*. Paris, Duprat, an IX. 1803.

CAUCHY A. *Cours d'Analyse de l' École Royale Polytechnique*. Premiére partie, Analyse algébrique. Paris, Imprimerie Royale. 1821.

CLASON R. G. *Number Concepts in Arithmetic Texts of the United States from 1880 to 1966*, with related psychological and mathematical developments. Ph. D. Thesis University of Michigan. Ann Arbor, University Microfilms. 1968.

CONDILLAC E. B. *La Langue des Calculus*, Texte établi et pré senté par Anne-Marie Couillet. Introduction et notes de Sylvain Auroux. Lille, Presses Universitaires. 1981.

CROWLY M. L., DUNN K. A. *On Multiplying Negative Numbers*. Mathematics Teacher, 78, 252-256. 1985.

DESTUTT de TRACY A. L. C. *Mémoire sur la faculté de penser*. Mémoires de morale et politique (institut), an 6, 283-450. 1798.

DESTUTT de TRACY A. L. C. *Elements d'Idéologie*. Premiére partie. Idéologie proprement dite. Second édition, Paris, Courcier, an XIII. 1804.

DIESTERWEG W. A. *Beiträge zu der Lehre von den POSITIVEN und NEGATIVEN GRÖSSEN*. Bonn, Habicht. 1831.

DROBISCH M. W. *Grundzuege der Lehre von den hoeheren numerischen Gleichungen nach ihren analytischen und geometrischen Eigenschaften*: e. Suppl. zu d. Lehrbuechern d. Algebra u. Differentialrechnung. Leipzig, Voss. 1834.

DUROUX A. *La valeur absolue*; difficultés majeures pour une notion mineure, petitxnuméro 3, 43-67. 1983.

Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des métiers. Article Grandeur («O»), t. 7 (1757), 855; Négatif («O»), t. 11 (1765), 72-74; Quantités, en terme d'algébre («E»), t.13 (1765), 655.

EULER L. *Vilständige Anleitung zur Algebra*. Leipzig, Reclam jun. 1940. 1766.

FÖRSTEMANN W. A. *Ueber den Gegensatz positiver und negativer Gröben*. Nordhausen. 1817.

FRANCOEUR L. B. *Cours Complet de Mathématique Pures*. Tome premier, seconde édition. Paris, Courcier. 1819.

GERGONNE J. D. *Réflexions sur le même sujet* (i. e., La théorie des quantités négatives). Annales de Mathématiques Pures et Appliquées, 4, 6-20. 1814.

GLAESER G. *Epistemologie des nombres relatifs*. Recherches en Didactiques des Mathemátiques, 2.3, 303-346. 1981.

GLAESER G. *A propos des obstacles épistémologiques*. Réponse à Guy Brousseau. Recherches en Didactiques des Mathemátiques, 5.3, 229-234. 1984.

GRASSMANN H. G. *Die lineale Ausdehnungslehre*, ein neuer Zweig der Mathematik. Leipzug, Wigand. 1984.

HECKER P. J. *Uber den gewöhnlichen Vortrag der Anfangsgründe der Lehre von den entgegengesetzten Gröben*. (Weinhnachtsprogrammschrift der Universität Rostock). Rostock. 1799.

ITARD J. *L´évolution de l´enseignement des mathématiques en France de 1872 à 1972*. Essais d´Histoire des Mathématiques, réunis et indroduits par R. Rashed. Paris, Blanchard 1984, 353-359. 1972.

KÄSTNER A. G. *Anfangsgründe der Aritmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, und Perspectiv*. Der mathem.

Anfangsgründe Iten Theils erste Abth. Göttingen. Vandenhoek und Ruprecht, Fünfte vermehrte Auflage, 1792. 1755.

KANT I. *Versuch den Begriff der negativen Gröben in die Weltweisheit einzuführen*. Werkausgabe Band II, Vorkristische Schrriften bis 1768: 2, Hg. W. Weischedel, Frankfurt am Main. Suhrkamp, 1977, 777-819. 1763.

KLOSTERMANN J. *Le carré d´une quantité négative est négatif et non positif*. St. Petersbourg. 1804.

KLOSTERMANN J. *Démonstration que la régle: moins multiplié par moins donne plus, induit en erreur et qu´elle ne s´accorde pas avec les opérations de l´esprit humain*. (Avec permission de la censure). St. Petersbourg. 1805.

KLÜGEL G. S. *Über die Lehre von den entgegengesetzten Gröben*. Archiv der reinen und angewandten Mathematik, 1, 3: 309-319, et 4: 470-48. 1795.

LACROIX S. F. *Eléments d´algébre, à l´usage de l´Ecole Centrale des Quatre-Nations*. Seconde éditions, revue et corrigée. Paris, Duprat, an IX; septième éditions, revue et corrigée, Paris. Courcier, 1808. 1800.

MAASS J. G. E. *Grundrib der reinen Mathematik zum Gebrauche bei Vorlesungen und beim eigenen Studium*. Halle, Renger.

MARIE M. *Discours sur la nature des grandeurs négatives et imaginaires*, et interprétation des solution imaginaires en géométrie. Paris, Carillian-Goeury et V^or^ Dalmont. 1796. 1843.

METZ A. *Handbuch der Elementar-Arithmetik in Verbindung mit der Elementar-Algebra*. Zum Gebrauche für Anfänger. Bamberg/ Würzburg, Göbhardt. 1804.

MOUREY C. V. *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires*. Dédié aux amis de l´evidence. Paris, Mallet-Bachelier, deuxiéme édition 1861. 1828.

NOVY L. *Origins of Modern Algebra*. Leyden/Prag: Nijhoff. 1973.

PYCIOR H. M. *The role of Sir William Rowan Hamilton in the development of British modern algebra*. Ph. D. Thesis Cornell University. University Microfilms, Michigan. 1976.

ROGALSKI J. *Quantités physiques et structures numériques*. Mesures et quantifications: les cardinaux finis, leslongueurs, surfaces et volumes. Bulletin de l´APMEP numéro 320, 58, 563-586. 1979.

SAURI J. *Institutions Mathématiques* , servant d´Introduction à un Cours de Philosophie à l[usage des Universités de France. Paris, deuxiéme édition 1772. 1770.

SCHUBRING G. *Essais sur l´histoire de l´enseignement des mathématiques*, particulièrement en France et en Prusse. Recherches en Didactiques des Mathématiques, 5.3, 343-385. 1984.

SCHUBRING G. *Lápport des recherches en histoire de l´enseignement des mathématiques à la didactique des mathématiques*. Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l´Informatique. IMAG Grenoble, année 1984-1985. (1986a). 1986.

SCHUBRING G. *L´Histoire de l´Enseignement des Mathématiques comme sujet de recherches en Didactique des Mathématiques*. IREM UNIVERSITÉ Paris VII, cahier de didactique des mathématiques. Numéro 26. (1986b). 1986.

SCHUBRING G. *On the methodology of analysing historical text-books* – The oeuvre of Lacroix as textbook autor. Forthcoming. 1987.

SESIANO J. *Une Arithmétique médiévale en langue provençale*, Centaurus, 27, 26-75. 1984.

SESIANO J. *The Appearance of Negative Solutions in Mediaeval Mathematics*, Archive for History of Exact Sciences, 32.2, 105-150. 1985.

STEIN J. P. W. *Die Elemente der Algebra*. Trier: Lintz, Erster Cursus. 1828, Zweiter Cursus. 1829. 1828-1829.

WILCKENS H. D. Die Lehre von den entgegengesetzten Gröben in einem neuen Gewande. Braunschweig. 1800.