Um Olhar Sobre a Formação Continuada do Professor de Matemática

ROSANA DE OLIVEIRA E ROSA M. MAZO REIS

Esta seção foi criada no Boletim 36 e nosso objetivo foi abrir um espaço para o professor, infelizmente ainda não recebemos nenhum relato dirigido a este espaço, mas queremos lembrar que ele está aberto.

— Professor conte o que aconteceu em sua aula!

Ao final desta seção no boletim 37, dissemos que neste boletim apresentaríamos os relatórios produzidos pelos professores com os comentários sobre a produção de seus alunos. Optamos por mudar de rumo e usar este espaço para relatar a produção dos professores sobre a atividade sugerida no boletim 37.

A atividade foi proposta no Curso de Atualização em Matemática para Professores do Ensino Médio, do Programa Pró-Ciências da FAPERJ que se realizou no primeiro semestre de 2000. Lembramos que ministrávamos a disciplina Aplicações Complementares à Sala de Aula.

O relato nesta seção está voltado para a produção matemática do professor. Procuramos registrar neste espaço como o professor se expressa como aprendiz, e observar a sua relação com conteúdo matemático. Vale ressaltar que não é nosso objetivo avaliar sua competência matemática, tomando como referencial os manuais formais. Esta atividade remete a um modelo algébrico (uso de letras e equações) de resolução. De maneira geral, espera-se que o professor se expresse com esta língua. Usaremos aqui uma distinção entre língua e linguagem, chamamos de língua aos símbolos ou sinais escritos no papel e linguagem ao conjunto de símbolos, cálculos, explicações verbais com entonações, olhares. Digamos que a língua é parte constituinte da linguagem, mas não se restringe a ela. O que poderemos observar é que independente da sua habilidade em algebrizar situações problemas, quando está diante de uma situação nova, o professor tende a percorrer os mesmos caminhos que a maioria de nossos alunos percorre.

A atividade proposta foi a seguinte:

Resolva a atividade abaixo, busque estratégias para resolvê-la.

Que conteúdos vocês acham que poderiam emergir dessa atividade?

Em que série você aplicaria esta atividade?

Os Sete Jogadores

Sete jogadores combinaram que o que perdesse teria de pagar aos restantes seis, tanto dinheiro quanto cada um deles já tivesse. Noutras palavras, deveria duplicar o dinheiro deles. Jogaram-se sete partidas e, a cada vez, perdeu um jogador diferente, isto é todos perderam uma vez, no fim, fez-se um balanço das posses de cada um, verificando-se que todos tinham o mesmo tanto, a saber, 128 reais. Com quanto dinheiro cada um deles começou?

Embora as perguntas não se restringissem a resolução do problema, de um total de seis grupos observe o retorno que recebemos.

- Quanto à resolução: foi apresentada por todos grupos.
- Quanto a estratégias: apenas um grupo referiu-se a ela.
- Quanto a conteúdos: três grupos

Os conteúdos citados por estes grupos foram: operações em N, potenciação, razão, proporção, matrizes, determinantes, raciocínio lógico, operação inversa, método recursivo, seqüências (Progressão Aritmética - P.A e Progressão Geométrica - P.G.), e somatório.

- Quanto à série: três grupos - do ensino fundamental, 4º ciclo (antiga sétima e oitava séries), e ensino médio.

Diante deste levantamento estatístico levantamos duas hipóteses, uma sobre o quanto o professor está envolvido na tarefa de resolver o problema e nesse sentido prioriza o *fazer matemático* em prol do *fazer pedagógico*, e a outra hipótese é de que o professor só se sentirá à vontade em discutir o *fazer pedagógico* após ter cumprido o seu *fazer matemático*, nesse sentido ele estaria vivenciando a tarefa do seu aluno e, portanto, teria mais informações sobre como orientar o *fazer pedagógico*.

Mas o que estamos chamando de *fazer pedagógico e fazer matemático*?

Esta é ainda uma concepção em processo de construção, mas que de alguma forma, vem aparecendo no comportamento de professores envolvidos em cursos de formação continuada.

Estamos chamando de *fazer matemático*, o fazer que está relacionado a produção escrita sobre a atividade, e a troca que acontece no processo de resolução da questão proposta. Já o *fazer pedagógico* é o pensar sobre a atividade aplicada ao seu aluno, ao ciclo adequado, aos conteúdos e competências envolvidos. Em outras palavras o *fazer matemático* diz respeito à interação entre professor (aprendiz) e a atividade proposta, o registro no caminho dessa solução e a troca com o outro professor (aprendiz), o *fazer pedagógico* é um olhar de "fora" do processo de resolução, é avaliar a interação do seu aluno com a atividade e decidir a melhor forma de encaminhar esta relação para que se estabeleça um diálogo que propicie a aprendizagem.

O professor tem se comportado, de uma maneira geral, mais preocupado com o seu *fazer matemático*, com raras exceções, ele se dispõe envolver-se na tarefa de discutir sobre o seu *fazer pedagógico* antes de se envolver no seu *fazer matemático*.

Vamos a partir deste momento voltar o nosso olhar para o *fazer matemático* do grupo de professores sobre a atividade dos Sete Jogadores, aquilo sobre o que todos os grupos produziram registros e discussões.

O problema remete num primeiro momento a uma discussão sobre o entendimento do enunciado, uma interpretação inicial é que por terminarem todos com a mesma quantia, então todos deveriam começar com a mesma quantia, deixando assim de lado a informação sobre a duplicação do dinheiro de cada um dos ganhadores. Esse fato tem gerado um grande debate nos grupos. Uma vez convencidos que a quantia inicial precisa ser diferente, muitas vezes tem sido preciso alguma interferência no grupo para que sua interpretação inicial seja modificada. Outro caminho que alguns grupos vêm tomando é o de atribuir determinados valores e analisar o que acontece, ou seja, iniciam a resolução do problema através da estratégia de tentativa e erro. Quando esta é a estratégia escolhida, de uma maneira geral, não tem ido muito longe. Com certa freqüência percebem que a questão do duplicar, está relacionado a potências de 2. Um professor atribuiu uma letra para a quantia que cada um tinha inicialmente e se perdeu em cálculos algébricos sem chegar a uma resposta, mas identificou as potências e estabeleceu algumas relações verdadeiras entre os valores. Depois de algum tempo de tentativas que não conduzem a solução os professores tem começado a trilhar um caminho que leva a solução do problema, um caminho de cálculos, que parte do fim para o início, atribuindo alternadamente a cada jogador a perda em cada uma das sete partidas.

Apresentaremos a seguir os registros dessas soluções, embora possa parecer num primeiro momento que todas são iguais, ao final, pequenas diferenças, reflexos da maneira de pensar de cada grupo serão comentadas. Dentre outras, a descoberta da maneira de pensar, da forma utilizada por cada grupo, são aspectos norteadores para o professor conduzir sua aula, para atingir os objetivos da mesma.

Grupo A:

	0	1	2	3	4	5	6	7
1ª							64	128
2ª							64	128
3ª							64	128
4ª					16	32	64	128
5ª	29	58	116	232	464	32	64	128
6ª	18	36	72	144	288	32	64	128
7ª	5	10	21	40	80	32	64	128

	1	2	3	4	5	6	7
449	2	4	8	16	32	64	128
225	450	4	8	16	32	64	128
113	226	452	8	16	32	64	128
57	114	228	456	16	32	64	128
29	58	116	232	464	32	64	128
15	30	60	120	240	480	64	128
8	16	32	64	128	256	512	128

O grupo A esboça um quadro onde as colunas representam os jogadores e as linhas representam partidas A utilização do zero provoca uma discussão. O que seria o jogador 0 (zero)? E a jogada zero? Não encontramos significado para jogador 0 (zero), mas a partida zero pode ser pensada como um instante 0 (zero) anterior ao início da partida.

No segundo quadro parece que resolvem essa discussão não atribuindo nenhum número ou código para a primeira coluna. Interpretamos aqui que as colunas estão representando as partidas e as linhas os jogadores. A resposta da questão aparece na primeira coluna. Ali estão os valores que cada jogador possuía antes de começar o jogo.

Grupo B:

Final	7ª P.	6ª P.	5ª P.	4ª P.	3ª P.	2ª P.	1ª P.
128	64	32	16	8	4	2	449
128	64	32	16	8	4	450	225
128	64	32	16	8	452	226	113
128	64	32	16	456	228	114	57
128	64	32	464	232	116	58	29
128	64	480	240	120	60	30	15
128	512	256	128	64	32	16	8

X o jogador que perdeu na partida em questão.

Cada coluna traz o valor que cada jogador possui durante aquela partida.

Na solução apresentada por este grupo podemos perceber uma simetria ou uma matriz transposta. Podemos pensar como numa versão simétrica àquela apresentada pelo grupo A. Embora eles registrem na primeira linha da tabela a ordem das partidas, não fazem o mesmo com os jogadores, que por exclusão consideramos representados nas linhas.

Grupo C:

Total $ = 896,00

8	15	29	57	113	225	449	1ª
16	30	58	114	226	450	2	2ª
32	60	116	228	452	4	4	3ª
64	120	232	456	8	8	8	4ª
128	240	464	16	16	16	16	5ª
256	480	32	32	32	32	32	6ª
512	64	64	64	64	64	64	7ª
128	128	128	128	128	128	128	8ª

A solução apresentada por este grupo traz uma diferença no significado das linhas e colunas. Aqui, ao contrário do usual, na última coluna é onde está registrado o que já foi registrado nas colunas anteriores daquela linha. O grupo registra uma oitava partida, que na verdade seria o momento posterior a sétima partida, melhor dizendo um oitavo momento.

Neste quadro a solução da questão está registrada na 1ª linha.

Grupo D:

1ª	8	15	29	57	113	225	449
2ª	16	30	58	114	226	450	2
3ª	32	60	116	228	452	4	4
4ª	64	120	232	456	8	8	8
5ª	128	240	464	16	16	16	16
6ª	256	480	32	32	32	32	32
7ª	512	64	64	64	64	64	64
	128	128	128	128	128	128	128

A solução do grupo D é uma resposta "quase" idêntica ao do grupo C, eles representam por 1ª , 2ª ,.... e 7ª as partidas deixando o momento final em branco, de certa forma, esta indicação aparece num lugar oposto a solução anterior. Não indicam o que as colunas estão representando.

Grupo E:

Jogadores	1ª Partida	2ª P.	3ª P.	4ª P.	5ª P.	6ª P.	7ª P.	FINAL
A	X=2+ 225+113+ 57=29+ 15+8= X=449	2	4	8	16	32	64	128
B	225	X=2+ 226+ 114+58+ 30+16+4 X=450	4	8	16	32	64	128
C	113	226	X=8+ 228+ 116+60+ 32+8 X=452	8	16	32	64	128
D	57	114	228	X=3.8+ 232+120+ 64+16= X=456	16	32	64	128
E	29	58	116	232	X=4.16+ 240+ 128+32 X=464	32	64	128
F	15	30	60	120	240	X=5.32+ 256+64 X=480	64	128
G	8	16	32	64	128	256	X=6.64+ 128 X=512	128

A solução do grupo E é um retorno a solução apresentada pelo grupo A, neste caso deixam registrados os cálculos de cada perdedor e trazem os registros do que representam linhas e colunas, nomeiam os sete jogadores por A, B, C, D, E, F e G. também definem o momento posterior a sétima partida como o final, assim como apresentou o grupo B.

Grupo F:

7ª	128	128	128	128	128	128	128
6ª	512	64	64	64	64	64	64
5ª	256	480	32	32	32	32	32
4ª	128	240	464	16	16	16	16
3ª	64	120	232	456	8	8	8
2ª	32	60	116	228	452	4	4
1ª	16	30	58	114	226	450	2
	8	15	29	57	113	225	449

896

A solução do grupo F é simétrica (a simetria é visualizada se tomarmos um eixo imaginário horizontal) em relação a solução do grupo D, aqui o momento inicial não é nomeado.

Como podemos perceber são diferenças sutis, mas que expressam o pensamento de cada grupo. Uma ansiedade inicial dos grupos era encontrar um modelo algébrico para resolver a atividade proposta. Os grupos tiveram dificuldades de entendimento, e, em sua maioria partiram diretamente para uma solução algébrica. Questionamos os grupos para que a partir de suas soluções, apresentadas acima, chegassem a uma generalização, procurassem um padrão, enfim analisassem os dados dispostos nas tabelas. Algumas tentativas foram feitas, em sua maioria utilizando observações sobre as tabelas construídas. Nenhum grupo chegou a uma solução expressa por um modelo algébrico.

Ilustraremos a seguir essas observações feitas por alguns grupos, para melhor compreender essas observações o leitor deve se remeter à tabela referente a cada grupo. Mesmo aquelas observações expressas através de símbolos, encontram-se associadas à tabela, elas não são afirmações gerais, desvinculadas da estratégia utilizada para solucionar o problema proposto.

Grupo B

Em particular:

- Tomando os elementos de uma diagonal, da direita para esquerda, as diferenças entre eles, tomados dois a dois, vão dobrando de valor ou podem ser vistos como uma seqüência de potências de base 2.

- Retirando da tabela um quadrado qualquer de 4 elementos, os mesmos formam uma proporção, uma vez que o produto dos meios equivale ao produto dos extremos.

- Tomando um quadrado qualquer, podemos vê-lo como uma matriz onde o produto dos elementos da sua diagonal principal é igual ao produto dos elementos da respectiva diagonal secundária.

- Observamos que as matrizes citadas no parágrafo anterior possuem determinante nulo.

- Considerando as quantias iniciais, aquelas da primeira rodada, a diferença entre elas formam uma PG de razão $q = 2$.

Grupo D

- Formamos a matriz $A\ (a_{ij})_{7\times7}$ onde $i \rightarrow$ jogada e $j \rightarrow$ jogador. Cada elemento de sua diagonal secundária pode ser expresso através da relação: $2a_{ij-1} - 2^{i-1}$.

- Esta relação acontece sempre que $i < j$

Se $i > j$ vale a relação $a_{ij} = 2^{i-1}$.

- Outra observação:

2^3	$2^4 - 2^0$
2^4	$2^5 - 2^1$
2^5	$2^6 - 2^2$
2^6	$2^7 - 2^3$
2^7	$2^8 - 2^4$
2^8	$2^9 - 2^5$
2^9	$2^{10} - 2^6$

- Observamos que o valor que cada jogador tinha no início era obtido $2^3 + 7n$, onde $1 \leq n \leq 6$

Grupo F

64x 32x 16x 8x 4x 2x x
$64x = 128$ $x = 128/64$ $x = 2$
$x^7 = 128$ $x^7 = 2^7$ $x = 2$

O livro do qual retiramos a atividade dos sete jogadores apresenta um esboço da solução que apresentaremos abaixo. Mesmo sendo um livro que propõe que se Aprenda Álgebra brincando, ele ao apresentar a solução, dá alguns saltos pressupondo que o leitor possua habilidade para concluir o que foi feito.

Solução "Algébrica"

O dinheiro que circulou era o mesmo todo o tempo do jogo, isto é 7 vezes 128,00, perfazendo o total de R$ 896,00.

Essa observação é feita por alguns grupos e os grupos C e F deixam esse valor registrado próximo a tabela.

Chamando a quantia do primeiro a perder no jogo de y. Ele tinha y dinheiro, restando 896 – y. Depois da primeira mão ele pagou e fica com $y - (896 - y)$ ou seja $2y - 896$.

Nesta etapa o autor faz uma manipulação algébrica relativamente simples, $y - (896 - y) = y - 896 + y = 2y - 896$, essa transformação tem por objetivo visualizar o número 2 (dois) e suas potências.

Depois da segunda partida seu capital dobrou $2(2y - 896)$

Depois da terceira mão $2^2(2y - 896)$

Depois da quarta mão $2^3(2y - 896)$

Depois da quinta mão $2^4(2y - 896)$

Depois da sexta mão $2^5(2y - 896)$

Observe que o autor usa a expressão "depois da primeira mão", "depois da segunda mão", a confusão que aparece nos registros dos grupos em relação ao último momento, ou 8° momento ou momento final relaciona-se com essa interpretação, só seria possível avaliar quanto jogador tinha após realizada a partida e um dos jogares fosse o perdedor.

Depois da sétima mão ele fica com $2^6(2y - 896) = 128$.

Assim podemos determinar o valor do primeiro jogador a perder: Y=449

Procurando não seguir o procedimento usual dos manuais de Matemática, temos:

$2^6\ (2y - 896) = 128$

$2y - 896 = 128 : 2^6$

$2y - 896 = 2^7 : 2^6$

$2y - 896 = 2$

$2y = 2 + 896$

$2y = 898$

$y = 898 : 2$

$y = 449$

Se a partir do valor de Y retornarmos substituindo y nas expressões acima, teremos quanto o jogador Y tinha de dinheiro ao final de cada partida, esses valores podem ser vistos em todas as tabelas, são eles:

$2y - 896 = 2.\ 449 - 896 = 2$

$2\ (2y - 896) = 4$

$2^2\ (2y - 896) = 8$

$2^3\ (2y - 896) = 16$

$2^4\ (2y - 896) = 32$

$2^5\ (2y - 896) = 64$

$2^6\ (2y - 896) = 128$

Procedendo da mesma forma, o jogador que perdeu a segunda partida, inicia o jogo com a quantia z, após a primeira partida ele ficou com 2z.

Lembre-se que esse jogador após a primeira partida onde não foi o perdedor, ele dobra seu capital, por isso 2z.

Após a segunda, a qual ele perdeu, ele fica com 896 –2z, restando 2z – (896 –2z) ou seja, 4z – 896.

Depois da terceira $2\ (4z - 896)$

Depois da quarta mão $2^2\ (4z - 896)$

Depois da quinta mão $2^3\ (4z - 896)$

Depois da sexta mão $2^4\ (4z - 896)$

Depois da sétima mão ele fica com $2^5\ (4z - 896) = 128$. Assim podemos determinar o valor do segundo jogador a perder: $Z = 225$

Todo o processo se repete, mas observe que há uma diferença entre a expressão relativa ao primeiro jogador e a expressão do segundo jogador, o que não nos impede que possamos a partir daí, intuir uma regularidade.

Vejamos:

1° jogador a perder: $2^6\ (2y - 896) = 128$

2° jogador a perder $2^5\ (4z - 896) = 128$

O expoente do dois que está fora dos parênteses diminui de uma unidade, ou seja, dividimos por 2, enquanto no número que multiplica a letra se escrito em potência de 2, seu expoente aumenta de uma unidade, ou seja dobra.

Percebendo essa regularidade, então é possível escrever as outras Expressões relativas ao 3º, 4º, 5º, 6º e 7º jogador.

O terceiro perdedor 2^4 (8t – 896) = 128

O quarto perdedor 2^3 (16h – 896) = 128

O quinto perdedor 2^2 (32j – 896) = 128

O sexto perdedor 2 (64r – 896) = 128

O sétimo perdedor 2^0 (128s – 896) = 128

Resolvendo cada uma dessas equações de maneira similar à resolução da primeira encontraremos, t = 113, h = 57, j = 29, r = 15 e s= 8.

É importante analisar que cada representação algébrica está expressa nas tabelas construídas pelos grupos, mas uma associação da resposta "com números" a resposta "com letras" não é algo simples, exige análise. Pensar sobre a solução numérica, não implica na percepção de um caminho para uma "solução com letras", isto é uma expressão geral.

Por outro lado, apresentar simplesmente a solução do autor, sem fazer com que os aprendizes vivenciem o processo de busca pela solução, seria perder o pensamento e as discussões que surgem nos grupos.

Terminamos este relato enfatizando que a preocupação do professor com o seu *fazer matemático,* só faz sentido se modificamos o *fazer pedagógico* nos cursos oferecidos ao professor. Embora, na maioria das vezes o professor esteja envolvido com o seu *fazer matemático,* acreditamos que ao estimular diferentes registros, confrontar esses registros, discutir as soluções apresentadas nos livros e analisar as possíveis relações entre todas as soluções, estaremos possibilitando a discussão sobre um *fazer pedagógico*. Esta discussão pode ser uma forma de levar o professor a transformar sua prática em sala de aula.

O professor precisa vivenciar práticas distintas das tradicionais, para poder avaliar sua importância e decidir sobre o seu *fazer pedagógico,* neste ponto acreditamos que durante o curso oferecido abrimos alguns caminhos para essa transformação.

A afirmação de uma das cursistas nos leva a acreditar que essa transformação é possível.

".... fiquei frustrada a princípio pois não recebi de vocês a fórmula mágica que esperava.... nunca pensei que eu seria capaz de me permitir mudar meu comportamento, estratégias que não davam certo... se eu não tivesse vivido, continuaria dentro de um "pokebola" e não conseguiria reestrutura-me, arrumar-me." (Valéria de Oliveira)

BIBLIOGRAFIA

OLIVEIRA, R. - *Pensando Algebricamente antes da 7ª série: Uma Outra Perspectiva sobre os Processos de Construção do Conhecimento*, USU, RJ, Dissertação de Mestrado defendida em dezembro de 1997.

PERELMANN, I. *Aprenda Álgebra Brincando* – Tradução: Milton da Silva Rodrigues, São Paulo: Hemus Editora.

PERRENOUD, P. *Novas Competências para Ensinar* – Tradução Patrícia Chittoni Ramos, Porto Alegre, Artes Médicas Sul, 2000.

PONTE, J. P. *Da formação ao desenvolvimento profissional*, In Actas do ProfMat, APM, Lisboa, 1998 (pp. 27-44).