Diversidade no Pensar: Um Caminho Para Construção do Conhecimento Matemático

Maria Celma da Silva Boher

Comentários Iniciais[1]

Este relato de experiência originou-se no curso de Álgebra de Pós-Graduação em Educação Matemática da Faculdade Santa Dorotéia na cidade de Nova Friburgo - Rio de Janeiro.

O curso de Álgebra foi distribuído da seguinte forma: 1) Um passeio pela história da Álgebra; 2) Leitura de artigos sobre dificuldades no ensino e aprendizagem da Álgebra; 3) Álgebra no ensino fundamental, médio e superior; 4) Parâmetros Curriculares Nacionais: o que dizem sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra. Como trabalho final, foi solicitado aos professores-alunos do curso de Especialização que aplicassem uma atividade em suas salas de aula e fizessem um relato sobre o desenvolvimento da atividade. O relato a seguir é um desses trabalhos apresentado por uma das professoras do curso. De um modo geral, existe nos professores uma grande resistência em escrever, registrar suas experiências. O registro é parte fundamental na socialização e construção de novas práticas pedagógicas. Este relato foi escrito na terceira pessoa, porém foi a própria professora que aplicou a atividade em sala de aula. Esta seção do Boletim GEPEM é um convite para o professor contar sua experiência em de sala de aula, ele dessa forma estará contribuindo para a prática de outros professores.

[1] Os Comentários Iniciais e Finais deste artigo são da professora do curso de Álgebra, Rosana de Oliveira, Mestre em educação Matemática. Email: rosanaol@highway.com.br

INTRODUÇÃO

No dia primeiro de fevereiro de 2001, primeiro dia de aula no Externato Santa Ignez, colégio da rede particular da cidade de Nova Friburgo, após aquela apresentação informal entre a professora de Matemática e os alunos, foi entregue aos alunos uma folha onde estava registrado o seguinte problema:

> O PAI NUNCA PERDE...
> Querendo incentivar seu filho a estudar Matemática, um pai combina pagar-lhe R$ 8,00 por problema que ele acertar, mas cobrar R$ 5,00 por problema que ele errar. Depois de um certo número de problemas resolvidos pelo filho, ambos fazem as contas e o filho nada recebe e nada deve. Quantos problemas, no mínimo, o filho acertou?

Essa mesma atividade foi trabalhada por 220 alunos do Ensino Médio, distribuídos por três turmas da 1ª série (110 alunos), duas da 2ª série (75 alunos) e uma turma da 3ª série (35 alunos).

A proposta foi a seguinte: a professora pediu aos alunos que resolvessem o problema acima, num período de 10 minutos, utilizando qualquer tipo de conhecimento matemático, como aritmética, álgebra, lógica ou um outro qualquer que justificasse a solução do problema, podendo até mesmo ser resolvido através da escrita, usando a linguagem comum.

Após esse momento, todas as folhas foram recolhidas pela professora, com o objetivo de fazer uma análise das resoluções desenvolvidas pelos diversos alunos nas diferentes séries. Nos 25 minutos restantes da aula, foi solicitado a alguns alunos que fossem ao quadro de giz apresentar a maneira pela qual resolveram o problema. Neste momento, houve uma participação ativa de todos os alunos da turma, cada aluno querendo mostrar sua resolução. Houve também uma grande discussão entre eles em relação ao resultado. Queriam saber qual era a resposta certa. Pediam a professora que falasse a resposta correta do problema, e ela respondia: "A resposta não é importante, nem eu mesma sei, o importante é a idéia que cada um de vocês desenvolveu." Assim, continuou até o término da aula nesse primeiro dia. É importante ressaltar que esse comportamento ocorreu em todas as turmas.

Ao corrigir todos os problemas, a professora ficou literalmente surpreendida, pois, ao organizar tal atividade, esperava que seus alunos tivessem uma intenção algébrica, já que o trabalho de álgebra é bem desenvolvido em sua escola desde as primeiras séries, porém, o caminho mais utilizado pelos alunos foi a aritmética.

A seguir, serão descritas algumas resoluções desenvolvidas pelos alunos.

Resolução I

Foi desenvolvida através de duas progressões aritméticas, uma com os múltiplos positivos de 8, representando o número de problemas certos, e outra com os múltiplos positivos de 5, representando o número de problemas errados. Desenvolveram as progressões até encontrar a primeira intersecção entre elas, assim:

P(A) = { 8, 16, 24, 32, **40**, 48, ... } e P(A) = { 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, **40**, ... } Através desse raciocínio, chegaram à resposta de que o filho havia acertado no mínimo 5 problemas.

- Essa resolução foi desenvolvida por alunos da 2ª e 3ª séries.

Resolução II

A solução foi encontrada e justificada através do mínimo múltiplo comum positivo entre 5 e 8.

M(5) = { 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45,.... }(Quantias pagas por problemas errados)

M(8) = { 8, 16, 24, 32, 40,... } (Quantias recebidas por problemas certos)

Justificativa: Para que o filho não perca nada e não ganhe nada, é preciso que o valor pago por ele ao pai seja igual ao valor ganho pelos problemas certos; logo, esse valor é R$ 40,00. Isto significa que o filho acertou 5 problemas e errou 8.

- Essa resolução foi desenvolvida por alunos das três séries.

Resolução III

A solução foi justificada da seguinte maneira: Para que o filho não receba e nem perca nada, é preciso que o total recebido por ele seja igual ao total pago ao seu pai. Esse total precisa ser múltiplo de 8, sendo assim, deve ser um número par, mas também ser múltiplo de 5, e os múltiplos de 5 são todos os números terminados em 0 e 5. Como o número precisa ser par, não poderá ser terminado em 5, então, o número deve ser terminado em zero. Como o primeiro número multiplicado por 8 que termina em zero é o cinco, o filho acertou no mínimo 5 problemas.

• Essa resolução foi desenvolvida por alunos das três séries, sendo mais comum na 1ª série.

Resolução IV

O aluno justificou a sua resposta, dizendo que encontrou a solução através da tabuada e apresentou o seguinte desenvolvimento:

Problemas certos	Problemas errados
8 x 1 = 8	5 x 1 = 5
8 x 2 = 16	5 x 2 = 10
8 x 3 = 24	5 x 3 = 15
8 x 4 = 32	5 x 4 = 20
8 x 5 = 40	5 x 5 = 25
8 x 6 = 48	5 x 6 = 30
8 x 7 = 56	5 x 7 = 35
8 x 8 = 64	5 x 8 = 40

Resposta: O filho acertou no mínimo 5 problemas e errou 8, fazendo um total de 13 problemas.

• Essa resolução foi desenvolvida por alunos das três séries, sendo mais comum na 1ª série.

Resolução V

Solução também encontrada através de m.m.c.

R$ 8,00 = acertos ⇔ 8 x 5 = 40

R$ 5,00 = erros ⇔ 5 x 8 = 40

Resposta: O número múltiplo entre 8 e 5 foi 40, então , no mínimo, o filho acertou 5 problemas.

• Esta foi a resolução mais comum nas diferentes séries

Resolução VI

Resolução envolvendo álgebra e equivalência de frações.

- O filho tem de errar mais do que acertar, para poder anular os valores pagos e recebidos por ele.

x = problemas errados ⇔ 5x é o total de problemas errados

y = problemas certos ⇔ 8y é o total de problemas certos

Para anular os valores,deve-se ter: $5x = 8y$, daí $\frac{x}{y} = \frac{8}{5}$

Esta proporção equivale a um valor mínimo, pois é irredutível; logo, obtém-se $y = 5$, que corresponde ao número de problemas certos.

• Esta resolução foi menos comum e desenvolvida por alunos da 2ª e 3ª séries.

Resolução VII

Resolução que os alunos justificaram como dedução.

- O filho acertou cinco problemas, porque, se o menino errasse 8 problemas, ele teria que pagar ao pai R$ 40,00 e, se ele acertasse 5 problemas, ganharia R$ 40,00. Neste caso, ele não ganharia e nem perderia.

Resolução VIII

Resolução envolvendo m.m.c. de forma diferente.

8 , 5	2
4 , 5	2
2 , 5	2
1 , 5	5
1 , 1	40

R$ 40,00 : R$ 8,00 = 5 x 8 ⇔ 5 problemas certos

Resposta: O filho acertou no mínimo 5 problemas, pois, sabendo que 40 é o primeiro múltiplo positivo comum de 5 e 8, pode-se afirmar que 5 acertos correspondem a quarenta reais e que, errando 8 problemas, este dinheiro retornaria ao seu pai.

Resolução IX

Outra maneira diferente de resolução.

x = número de problemas certos

y = número de problemas errados

8,0 0 → x (1)
- 5,00 → y (1)
3,00
+ 8,00 → x (1)
11, 00
- 10,00 → 2 y (2)
1,00
+ 8,00 → x (1)
9,00
- 5,00 → y (1)
4,00
+ 8,00 → x (1)
12,00
- 10,00 → y (2y)
2,00
+ 8,00 → x (1)
10,00
- 10,00 → y (2y)
0

Conclusão: Problemas certos = x + x+ x + x + x = 5x ⇔ 5 problemas certos

y + 2y + y + 2y + 2y = 8y ⇔ 8 problemas errados

Resolução X

Resolução através de equação.

x = Problemas certos

y = problemas errados

- Como o filho nada recebeu e nada deve, então temos: $8x - 5y = 0$. Como é pedido o número mínimo de problemas certos, conclui-se que $x = 5$ e $y = 8$ para que a igualdade se torne verdadeira. Logo, o filho acertou 5 problemas.

Resolução XI

Outro tipo de resolução.

R$ 8,00 por cada acerto

R$ 5, 00 por cada erro

- Se o menino acertou 5 problemas, ele ,certamente, terá um total de R$ 40,00, mas, se ele errar 8 problemas, o pai lhe cobrará também R$ 40,00; logo, ele terá R$ 40,00 – R$ 40,00 = 0, o que mostra que o filho acertou, no mínimo, 5 problemas.

Resolução XII

Outro tipo de resolução.

1 acerto = R$ 8,00 e 5 acertos = 5 x 8 = 40

1 erro = R$ 5,00 e 40 : 5 = 8 erros

- O produto do número de acertos com o valor recebido (de R$ 8,00) tem que ser divisível por 5, já que este é o valor cobrado por erro. Só assim é possível obter um conta exata, fazendo com que o menino não receba e nem pague nada; logo, o menino acertou no mínimo 5 problemas.

Resolução XIII

Outro tipo de resolução.

$8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40$

$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 40$

$40 - 40 = 0$

- Ele acertou 5 problemas e ganhou R$ 40,00, porém, errou 8 problemas, perdendo os R$ 40,00. Assim, o filho não recebeu e nem ganhou.

Resolução XIV

Resolução algébrica.

x = nº de problemas errados → paga R$ 5,00 por cada problema

y = nº de problemas certos → ganha R$ 8,00 por cada problema

$8y = 5x \rightarrow y = 5x/8 \Leftrightarrow$ que x = 8, isto é, o menor valor inteiro de x para que a divisão seja exata, pois y representa o número de problemas, sendo assim tanto y como x precisam ser valores inteiros positivos, daí conclui-se que x = 8 e y = 5, logo, o filho acertou, no mínimo, 5 problemas.

Resolução XV

Outro tipo de resolução.

- Como o valor pago pelo pai ao filho por problema certo é maior do que o valor pago pelo filho ao pai por problema errado, e, no final, o saldo do filho tem que ser zero, isto significa que o filho errou mais problemas do que acertou, então basta encontrar o m.m.c. entre 5 e 8 para se chegar à conclusão de que o filho acertou, no mínimo, 5 problemas e errou, no mínimo, 8.

Resolução XVI

Outro tipo de resolução.

$(8 - 5) = 3 \rightarrow (1)$ Resposta: O filho acertou no mínimo 5 problemas

$(3 - 5) = -2$

$(-2 + 8) = 6 \rightarrow (2)$

$(6 - 5) = 1$

$(1 - 5) = -4$

$(-4 + 8) = 4 \rightarrow (3)$

$(4 - 5) = -1$

$(-1 + 8) = 7 \rightarrow (4)$

$(7 - 5) = 2$

$(2 - 5) = -3$

$(-3 + 8) = 5 \rightarrow (5)$

$(5 - 5) = 0$

Foram descritas acima algumas formas de resoluções feitas pelos alunos. A partir das resoluções, fez-se um levantamento dos conteúdos matemáticos aplicados por eles para a resolução de tal problema. Eles foram dizendo e a professora foi escrevendo no quadro de giz, como por exemplo:

- Mínimo múltiplo comum;
- Equação do primeiro grau;
- Lógica;
- Sistema do primeiro grau;
- Equivalência de frações
- Proporções;
- outros.

Os alunos observaram, também que, se no problema não estivesse escrito a palavra "mínimo", o problema poderia ter infinitas soluções, ou seja, poderia ser representado por um sistema indeterminado.

Após a correção de todos os problemas, a professora discutiu, em cada turma, na aula seguinte, todas as formas de resoluções feitas por eles, com o objetivo de mostrar os diversos caminhos que podemos utilizar para a resolução de um mesmo problema. Essas resoluções ficaram fixadas no mural da sala de aula. Foi investigado pela professora o porquê da preferência pela aritmética e não pela álgebra, mostrando que o problema era típico da 7ª série, quando eles aplicavam apenas o conhecimento algébrico para a sua resolução. Foram enumerados, oralmente, pela professora, outros problemas semelhantes a este, estudados na 7ª série. Os alunos lembraram perfeitamente dos problemas estudados e até deram outros exemplos, e, finalmente, concluíram: *"A álgebra a gente só estuda na 7ª série e na escola, enquanto a aritmética se estuda desde que se entra na escola até quando se sai dela. Além disso, a álgebra não é aplicada no nosso dia-a-dia, na vida, enquanto a aritmética, além de não exigir nenhuma fórmula, é aplicada diariamente em nossas vidas."* Disseram também que aprenderam álgebra como sendo uma ferramenta utilizada como facilitador na resolução de problemas, mas que, a partir daquele momento, eles descobriram que nem sempre isto ocorre. A Álgebra, segundo eles, realmente facilita a resolução de problemas, porém, há casos em que ela dificulta, ou seja, complica. Os alunos chegaram, assim, à conclusão de que é necessário e de suma importância identificar, primeiramente, de acordo com a situação problema, o processo facilitador. Álgebra ou Aritmética?

Nesse momento, houve a intervenção da professora que procurou mostrar a relação entre a álgebra e a aritmética, informando que tanto a Álgebra como a Aritmética são ferramentas utilizadas na resolução de problemas e que se pode usar tanto uma como outra. Em certos casos, resolver um problema através da Álgebra realmente facilita, dependendo da situação e do conhecimento da pessoa que irá resolver o respectivo problema, pois algumas pessoas possuem maior facilidade com os processos algébricos. Outras, ao contrário, acham mais fácil a resolução através de processos aritméticos; outras têm facilidades com a lógica, ou com a visualização através da geometria, e assim por diante. Mostrou também a importância de se buscar a coexistência da educação algébrica com a aritmética, de modo que uma esteja relacionada ao desenvolvimento da outra e que, através desta coexistência, consegue-se uma aprendizagem mais sólida, permitindo, assim, o uso de ambas com mais flexibilidade e competência. Essa flexibilidade oferece o desenvolvimento da capacidade de refletir sobre o que há de genérico nas situações envolvidas (sendo a generalização uma das funções da Álgebra), e de refletir sobre a lógica das operações, proporcionando até mesmo uma maior capacidade de articular os recursos matemáticos com a resolução de um problema ou na condução de uma investigação. E assim a professora terminou aula.

Conclusão da Professora

Esta aula foi extremamente enriquecedora para os alunos e, principalmente, para a professora. A professora reconheceu que os diferentes modos de resolver o problema e os diversos questionamentos surgidos pelos alunos durante essa aula levaram-na a um grande momento de reflexão sobre o exercício de sua profissão. Foi a partir daí que começou a pensar em termos de significados que são produzidos no interior de uma atividade, e, não somente, em termos de técnicas ou conteúdos específicos. O objetivo principal desta experiência foi criar condições para que os alunos trabalhassem com técnicas, ao mesmo tempo, permitindo-lhes que tivessem acesso a formas diferentes de resolução de problemas, e não apenas àquelas formas em que professor procura induzir o processo de resolução, e o aluno, por sua vez, procura adivinhar o que o professor gostaria que ele fizesse.

A riqueza deste trabalho está na tomada de consciência da importância, tanto na educação algébrica como na aritmética ou em outra qualquer, que é preciso, e, absolutamente necessário, desenvolver no aluno o pensamento visível, combinado e proporcional para que ele possa prosseguir seus estudos na Matemática. Através do grande número de alunos que procuraram resolver o problema fugindo do conhecimento algébrico e de seus questionamentos, acredita-se que, realmente, a Álgebra representa um momento de corte severo na Educação Matemática escolar e tornou-se visível que ela é realmente "coisa" do domínio exclusivo da escola. É preciso desenvolver, urgentemente, nas nossas escolas, um trabalho com a álgebra no sentido de mostrar o seu significado matemático, assim como mostrar que o objetivo da educação algébrica e aritmética, hoje, deve ser o de encontrar um equilíbrio entre o desenvolvimento da capacidade e da habilidade do aluno em resolver problemas através de diversos modos de pensar, aplicando os diversos conhecimentos apreendidos por ele (dentro e fora da escola) (Lins e Gimenez- 1997). A educação matemática hoje deve, portanto, objetivar o aprimoramento das habilidades de pensar e registrar do aluno, isto é, da capacidade de usar as ferramentas com maior facilidade. Deve procurar, também, desenvolver no aluno os novos modos de pensar, de comparar e relacionar os diferentes processos de conhecimentos, e até mesmo de avaliar os pontos fortes e fracos de cada um, buscando meios de tornar os instrumentos mais seguros e mais familiares.

Comentários Finais

Este relato apresentou uma diversidade de registros feitos pelos alunos que podem ser um referencial para o professor. Importante ressaltar que essa diversidade foi estimulada pela professora na proposta inicial da realização da atividade quando ela afirma "A resposta não é importante, nem eu mesma sei, o importante é a idéia que cada um de vocês desenvolveu".

Muitas vezes, os professores deparam-se em sala de aula com resoluções não padrões e se perguntam se a resolução deve ou não ser considerada correta. Levando em conta tais relações como um ponto importante na construção do conhecimento, o professor aprende com essa diversidade.

Outro aspecto relevante foi a surpresa da professora ao constatar que a maioria dos alunos não optaram por uma solução prototipicamente algébrica. Essa solução para ser considerada algébrica deveria envolver o uso de letras e equações, ou seja, uma "língua matemática" específica (vide resolução XIV).

O desenvolvimento desta atividade da maneira como foi proposta pela professora, sinaliza a importância do professor ouvir seus alunos e deixar que criem estratégias de resolução, deixando de lado a "imposição" de uma resolução única, a do professor. As resoluções de alunos e professor devem servir de estímulo a socialização das diversas formas de pensar, além disso, as diferentes resoluções podem ser um poderoso instrumento para que os professores criem argumentos no trabalho com outros grupos de alunos.

Neste relato não foram apresentadas respostas erradas, uma postura natural. Porém, a socialização do erro é um outro caminho para a construção do conhecimento. Uma resposta errada pode trazer uma resolução impregnada de ricos conhecimentos matemáticos, muitas vezes usados inadequadamente a situação proposta. Por outro lado, uma resposta prototipicamente correta, pode ser a reprodução de um modelo.

Num breve passeio pelas diversas resoluções vale destacar alguns aspectos que julgamos relevantes. Na resolução I, os alunos consideraram apenas a PA de razão 5. As resoluções II, III, IV, V, VII, VIII, XI, XII e XV assemelham-se a resolução I, porém os alunos justificam fazendo uma análise de diversas formas sobre o conjunto dos múltiplos. Enquanto alguns alunos enumeram o conjunto dos múltiplos, outros utilizam a tradicional tabuada para representá-lo e outros vão direto ao múltiplo de 5 e 8 que satisfaz o problema, não sentem necessidade de enumerar todo o conjunto. A resolução VI, considerada pela professora como uma solução algébrica envolvendo equivalência de frações foi menos freqüente. Na resolução VIII, o aluno faz um registro errado, $40 : 8 = 5 \times 8$, entende-se o que o aluno quis dizer, porém não obedece a transitividade. A resolução IX apresenta a tradução de uma situação particular, ou seja, indica uma determinada ordem em que o filho acertou e errou os problemas. Na resolução X os alunos montam uma equação com duas variáveis e justifica a resposta com o argumento do número mínimo de problemas, mais uma resolução considerada algébrica. Na resolução XIII o aluno usa o conceito de multiplicação como soma de parcelas iguais. As resoluções XVI e IX aproximam-se, o aluno sempre que soma 8 considera uma questão certa, prossegue somando 8 e diminuindo 5 até que a "conta" dê zero.

Todas as resoluções apresentadas têm pontos em comum, porém cada uma traz a originalidade do registro e da forma de pensar. As resoluções onde o aluno justifica através de uma Progressão Aritmética (PA) e a outra em que o registro do aluno são as tabuadas de 8 e 5 são ótimos exemplares para defendermos a não linearidade da construção do conhecimento e o quanto nossas práticas devem estimular o registro do aluno.

As abordagens dos diversos conceitos matemáticos devem ocorrer de forma cíclica, com graus de complexidade crescente, envolvendo diferentes aspectos através dos níveis de escolaridade.

Referências Bibliográficas

ARCAVI, A. *Álgebra, História e Representação*. Série Reflexões em Educação Matemática (vol.2). Rio de Janeiro: MEM/USU, 1995.

LINS, R.C. e GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*: Perspectivas em Educação Matemática. Campinas - SP: Papirus, 1997.

OLIVEIRA, R. *Pensando algebricamente antes da 7ª série: uma outra perspectiva sobre os processos de construção do conhecimento.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1997.