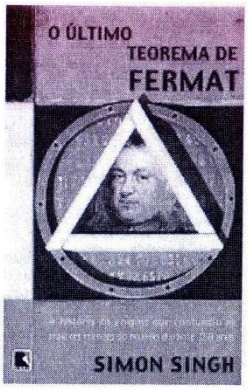

RESENHA DE LIVRO

O Último Teorema de Fermat

PAULO ANTONIO ESQUEF

"Acho que vou parar por aqui".

Essas foram as palavras finais de Andrew Wiles, matemático britânico, no dia 23 de junho de 1993, no Instituto Isaac Newton, na Universidade de Cambrige após uma séries de palestras. O título das palestras de Wiles era *"Formas Modulares, Curvas Elípticas e Representações de Galois"*. Era a mais importante conferência sobre Matemática do século XX. Duzentos matemáticos estavam extasiados. Estima-se que apenas 50 dos presentes compreenderam a densa mistura de símbolos gregos e álgebra que cobria o quadro negro. Para os presentes, acabava de ser provada a conjectura de Taniyama-Shimura (análises posteriores mostraram que a demonstração continha um erro que foi consertado por Wiles 14 meses depois) e que por conseqüência provava que o Último Teorema de Fermat era verdadeiro.

A história do Último Teorema de Fermat é singular. Sua beleza é extraordinária. Sua concepção é simples. É um problema que pode ser enunciado em termos familiares a qualquer estudante de primeiro grau. Basicamente sua origem está na Grécia – no Teorema de Pitágoras. Por volta de 1637, Pierre de Fermat, um matemático francês amador, estudava problemas e soluções relacionados ao Teorema de Pitágoras. Fermat, num momento de genialidade fez uma pergunta que os gregos jamais teriam imaginado: "O que acontece com o Teorema de Pitágoras quando se troca a potência 2 pela potência 3?". Com essa simples troca criou-se um dos problemas matemáticos mais difíceis da Terra.

Fermat afirmou que não havia solução para o problema. Para complicar mais a situação, ele usou potências maiores que três, ratificando que essas equações também não tinham solução. Fermat presumiu que não existia um trio de números inteiros positivos que se encaixassem na equação:

$x^n+y^n=z^n$ onde $n=3, 4, 5...$

> *Cubem autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullan in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere.*
>
> *"É impossível para um cubo ser escrito como a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como uma soma de dois números elevados a quatro, ou, em geral, para um número que seja elevado a um potência maior que dois ser escrito como a soma de duas potências semelhantes".*

O livro de Aritmética de Diofante foi o grande guia de Fermat durante seus anos de estudo. Curiosamente, Fermat escreveu, em 1637, a seguinte anotação na margem do livro e ao lado do Problema 8:

> *Cuius rei demostrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non caperet.*
>
> *"Eu tenho uma demonstração realmente maravilhosa para esta proposição mas esta margem é muito estreita para contê-la".*

A simples troca da potência 2 para 3 na relação de Pitágoras, implicava numa equação aparentemente sem solução para qualquer número inteiro. O método de tentativa e erro logo mostra a dificuldade de encontrar dois números elevados ao cubo que, ao serem somados produzam um outro número elevado ao cubo. A pergunta crucial era: "Como poderia uma simples modificação transformar a equação de Pitágoras, com um número infinito de soluções, em uma equação insolúvel?"

Entre todos os números possíveis parecia não haver razão por que pelo menos um conjunto de soluções não poderia ser encontrado. E, no entanto, Fermat declarava que em parte alguma do infinito universo dos números existiria um "trio fermatiano". Sua anotação à margem da Aritmética de Diofante, ratificava essa declaração. Fermat acreditava que poderia prová-la. Este era Fermat no seu modo mais frustrante. Suas próprias palavras sugerem que ele estava particularmente satisfeito com uma demonstração "realmente maravilhosa" mas não se daria ao incômodo de escrevê-la em detalhe, quanto mais publicá-la. Ele nunca falou a ninguém sobre sua prova e, no entanto, apesar desta combinação de indolência e modéstia, o Último Teorema de Fermat, como mais tarde foi denominado, se tornaria famoso no mundo e desafiaria as maiores mentes matemáticas por mais de 350 anos.

Fermat morreu em 12 de janeiro de 1665, isolado da escola parisiense de matemática. O trabalho de Fermat só não foi perdido graças ao seu filho mais velho, Clement-Samuel, que passou cinco anos reunindo as cartas e anotações de seu pai.

Último Teorema Fermat ganhou fama devido a tremenda dificuldade em demonstrá-lo. Muitos matemáticos pensavam: "Se Fermat afirmava ter a demonstração, por que não encontrá-la?" A partir de então o problema tornou-se o santo graal da matemática. Vidas inteiras foram devotadas – e até mesmo sacrificadas – à busca de uma demonstração de um problema aparentemente simples.

Leonhard Euler, o maior matemático do século XVIII, teve que admitir sua derrota. Sophie Germain assumiu a identidade de um homem para poder pesquisar num campo fechado às mulheres. Apesar da grande contribuição de Sophie para o progresso da matemática, também fracassou na demonstração. Alguns historiadores admitem que o matemático alemão Carl Friedrich Gauss – um dos maiores matemáticos de todos os tempos – estudou secretamente o Último Teorema de Fermat e teria fracassado em conseguir algum progresso na demonstração do problema. Para esses historiadores, a evidência para o fracasso de Gauss está numa carta resposta para seu amigo, o astrônomo alemão Heinrich Olbers, que o encorajou a disputar do prêmio oferecido pela Academia de Paris para a solução do problema de Fermat: "Fico-lhe muito grato pela notícia referente ao prêmio de Paris. Mas confesso que o Último Teorema de Fermat, como uma proposição isolada, tem muito pouco interesse para mim. Eu poderia facilmente apresentar uma série de proposições semelhantes que ninguém poderia provar ou desmentir". Assim, a resposta de Gauss para Olbers seria meramente um caso de despeito intelectual.

O turbulento Évariste Galois tentou passar a noite escrevendo os resultados de suas pesquisas, antes de ser morto num duelo em 1832.

Alguns matemáticos do século XX recorreram ao primeiro teorema da indecidibilidade de Gödel – "Se um conjunto axiomático de uma teoria é consistente, então existem teoremas que não podem ser provados nem negados" – para justificarem seus fracassos.

No início do século XX, Paul Wolfskehl, um industrial alemão, deu nova vida ao problema. Paul estudara matemática na universidade mas dedicava sua vida à construção do império financeiro da família. Após uma desilusão amorosa, Paul resolver suicidar-se. Marcou o suicídio para a meia noite de um determinado dia. No dia do suicídio, um pouco antes da meia noite, ele dirigiu-se a biblioteca e começou a ler um livro de Krummer sobre o fracasso de Cauchy e Lamé relativo ao problema de Fermat. Ao examinar os cálculos ficou surpreendido pelo que parecia um erro de lógica. Paul sentou-se para examinar o problema e logo foi envolvido pelo mesmo. Quando terminou sua análise o dia estava amanhecendo. A hora marcada para o suicídio tinha passado. A matemática tinha lhe salvado a vida. Quando ele morreu em 1908, deixou em testamento um prêmio de 100 mil marcos, equivalente a um milhão de dólares, para quem demonstrasse o Último Teorema de Fermat. Era o seu modo de pagar uma dívida com o enigma que salvara sua vida. Estava criado o Prêmio Wolfskehl.

O Último Teorema de Fermat é um problema extremamente difícil e, no entanto, pode ser enunciado de forma que qualquer estudante pode entender. Não existe problema de Física, Química ou Biologia que possa se enunciado de forma tão simples. No livro, *O último problema*, E. T. Bell escreveu que a civilização provavelmente acabaria antes que o Último Teorema de Fermat fosse demonstrado. Essa demonstração tornou-se o prêmio mais valioso da teoria dos números e não é de surpreender que tenha levado a alguns dos episódios mais empolgantes da história da Matemática.

A fama do enigma se espalhou além do mundo fechado dos matemáticos. Em 1958, o problema acabou aparecendo num conto faustiano. Uma antologia intitulada *Pactos com o demônio* contém um conto escrito por Arthur Poges. Em "O Diabo e Simon Flagg" o diabo pede a Simon que lhe faça uma pergunta. Se o Diabo conseguir responder dentro de 24 horas, levará a alma de Simon, mas, se fracassar, dará cem mil dólares a Simon. Simon então pergunta: "O Último Teorema de Fermat está correto?"'. O Diabo desaparece e sai pelo mundo absorvendo todo o conhecimento matemático existente para demonstrá-lo. No dia seguinte o Diabo volta cabisbaixo e admite sua derrota:

"Você ganhou, Simon", disse ele quase num sussurro, olhando-o com indisfarçável respeito. "Nem mesmo eu posso aprender Matemática suficiente, em tão curto espaço de tempo, para resolver um problema tão difícil. Quanto mais eu mergulho na coisa, pior ela fica. Fatoração não única, ideais - Bah! Você sabe", confidenciou o Diabo, "nem mesmo os matemáticos de outros planetas, todos eles muito mais adiantados do que o seu, conseguiram resolvê-lo. Até um cara em Saturno, que se parece com um cogumelo sobre pernas de pau e que resolve equações diferenciais parciais de cabeça, desistiu do problema."

O Último Teorema de Fermat era uma sereia matemática atraindo os gênios em seu sentido somente para frustrar suas esperanças. Qualquer matemático que se envolvesse com o Último Teorema de Fermat se arriscava a desperdiçar sua carreira, e, no entanto, qualquer um que pudesse fazer o avanço crucial entraria para a história como tendo resolvido o problema mais difícil do mundo.

Um grande matemático contemporâneo confessou que o prazer que ele sente em resolver problemas de matemática é semelhante ao desfrutado por viciados em jogos de computador. Derrotar o inimigo no final de um jogo, no nível máximo de dificuldade, é sempre uma experiência agradável, mas imagine o sentido de realização depois de passar anos enfrentado um problema que ninguém no mundo foi capaz de resolver e finalmente descobrindo uma solução.

Foram esses os motivos que levaram Andrew Wiles, a ficar fascinado por Fermat. "Desde que vi o Último Teorema de Fermat pela primeira vez, ainda criança, ele se tornou minha grande paixão", dizia Wiles num tom de voz que transmitia a emoção que ele sentia em relação ao problema. "Os matemáticos puros adoram um desafio. Eles adoram problemas não-resolvidos. Quando fazemos matemática temos esta grande sensação. Você começa com um problema que o intriga. Não consegue entendê-lo, é tão complicado que você não distingue o começo do fim. Mas então, quando finalmente consegue resolvê-lo, você tem esta sensação incrível de como ele é bonito, de como tudo se encaixa de modo tão elegante. Os mais enganadores são os problemas que parecem fáceis e depois se mostram extremamente complexos. O Último Teorema de Fermat é o mais belo exemplo deste tipo de problema. Ele parecia ter uma solução e, é claro, muito especial porque Fermat disse que ele tinha uma solução".

Ao completar a série de palestras no dia 23 de junho de 1993, Wiles acreditava ter provado a conjectura de Taniyama-Shimura e realizado seu sonho de provar o Último Teorema de Fermat. Qual a relação entre Curvas Elípticas, Formas Modulares e a conjectura de Taniyama-Shimura? Afinal, qual a ligação entre a conjectura de Taniyama-Shimura com o Último Teorema de Fermat?

Wiles era um especialista em ***equações elípticas***, equações do tipo $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ onde a, b, e c são números inteiros. O desafio com as equações elípticas é determinar se elas possuem soluções para números inteiros e, se assim for, quantas. As equações elípticas foram estudas pelos gregos, incluindo Diofante, que dedicou uma grande parte de sua *Aritmética* ao estudo de suas propriedades. Como não podiam enumerar todas as soluções de uma equação elíptica trabalhando com um espaço infinito, os matemáticos, incluindo Wiles, se conformavam em determinar o número de soluções de uma determinada equação elíptica numa aritmética muito especial denominada *aritmética de relógio*. A lista de soluções de uma dada equação em cada aritmética de relógio era denominada *série E.* A série E contém muitas informações sobre a equação elíptica que ela descreve.

Um tópico exótico da Matemática - *as formas modulares* - fascinava dois matemáticos japoneses Yutaka Taniyama e Goro Shimura. As formas modulares estão entre os objetos mais bizarros e maravilhosos da Matemática. Trata-se de uma das entidades mais esotéricas do mundo matemático. Martin Eichler - um teórico dos números - as considerou uma das cinco operações fundamentais: adição, subtração, multiplicação, divisão e formas modulares. A maioria dos matemáticos se considera mestre nas quatro primeiras operações, mas a quinta ainda os deixa um pouco confusos.

O fator principal das formas modulares é seu nível excessivo de simetria. As formas modulares estudadas por Taniyama e Shimura podem ser empurradas, trocadas, refletidas e giradas de um número infinito de modos e ainda permanecerão imutáveis, o que as torna os objetos matemáticos mais simétricos que existem. As formas modulares vivem num espaço quadridimensional complexo denominado *espaço hiperbólico*. O universo hiperbólico é difícil de ser entendido pelos humanos, presos ao espaço convencional, tridimensional. O espaço hiperbólico (quadridimensional) é um conceito matemático válido e é esta dimensão extra que dá às formas modulares seu nível de simetria tão imenso. Mauritz Escher na sua gravura Limite Circular IV tenta encaixar o mundo hiperbólico em uma página bidimensional.

As formas modulares podem ter várias formas e tamanhos, mas cada uma é constituída com os mesmos ingredientes básicos. O que diferencia cada forma modular é a dosagem de cada ingrediente contido nela. Os ingredientes de uma forma modular são enumerados de um ao infinito. Esta informação, descrevendo como cada forma modular é construída, constitui a chamada série modular, ou série M, uma receita com ingredientes e a quantidade de necessária de cada um.

As formas modulares são muito independentes na Matemática. Elas aparentemente estão desligadas das equações elípticas, especialidade de Wiles. Taniyama estudara os primeiros termos de uma série M de uma determinada forma modular. Ele reconheceu o padrão e percebeu que era idêntico à lista de números de uma série E de uma bem conhecida equação elíptica. Em muitos outros cálculos, Taniyama percebeu que havia uma correspondência perfeita entre os termos de séries M da forma modular com os da série E das equações elípticas. Formas modulares e equações elípticas que existiam em regiões diferentes do cosmo matemático estavam se correspondendo. Taniyama e Shimura iram chocar o mundo matemático sugerindo que as equações elípticas e as formas modulares na verdade era uma coisa só. Estava criada a *conjectura de Taniyama-Shimura.* Em 17 de novembro de 1958, o mundo matemático foi surpreendido com o inexplicável suicídio de Taniyama.

No final da década de 1960 muitas evidências apontavam para a veracidade da conjectura de Taniyama-Shimura; os matemáticos suspeitavam que ela era verdadeira, mas não tinham encontrado nenhuma prova.

No outono de 1984, um matemático alemão Gerhard Frey, especulou que quem pudesse provar a veracidade da conjectura de Taniyama-Shimura também demonstraria o Último Teorema de Fermat. Frey partiu da equação de Fermat:

$x^n+y^n=z^n$ onde n=3, 4, 5...

e admitindo que A, B e C fosse um trio fermatiano, $A^n + B^n = C^n$ era uma solução para a equação de Fermat. Nesse caso o Último teorema de Fermat seria falso. Frey rearrumou a equação solução (procedimento matemático rigoroso que muda a aparência de uma equação sem alterar sua integridade) para a forma da equação elíptica.

$y^2 = x^3 + (A^n - B^n)x^2 - A^nB^n$

Se o teorema de Fermat é falso, a equação de Frey deve existir. Frey mostrou que sua equação era tão estranha que as repercussões de sua existência seriam devastadoras para a conjectura de Taniyama-Shimura. A série E da equação de Frey continha uma seqüência tão estranha de números que seria inconcebível uma forma modular possuir uma série M idêntica. A equação de Frey não podia ser modular e sua existência está condicionada à hipótese do Último Teorema de Fermat ser falso. Frey tinha conseguido ligar a conjectura de Taniyama-Shimura ao Último Teorema de Fermat.

Frey usou os seguintes argumentos:

1) Se for verdade a conjectura de Taniyama-Shimura, então toda equação elíptica deve ser modular.

2) Se toda equação elíptica deve ser modular, então a equação de Frey não pode existir.

3) Se a equação de Frey não existe, então não podem existir soluções para a equação de Fermat.

4) Portanto, o Último Teorema de Fermat é verdadeiro.

Frey chegou à fantástica conclusão de que quem conseguisse provar a conjectura de Taniyama-Shimura automaticamente provaria que o Último Teorema de Fermat era verdadeiro.

O único problema era o fato do seu trabalho ser incompleto. Ele não demostrara inteiramente que sua equação elíptica era suficientemente bizarra.

Em 1986, o matemático Ken Ribet, professor da Universidade da Califórnia conseguiu provar que a equação elíptica de Frey não era modular.

O Último Teorema de Fermat estava irremediavelmente ligado à conjectura de Taniyama-Shimura. Wiles agora tinha as informações necessárias para realizar seu sonho. Wiles decidiu usar a *prova por indução* para tentar provar a conjectura de Taniyama-Shimura. Seu grande desafio era construir um argumento indutivo, mostrando que cada uma das infinitas equações elípticas podiam ser relacionadas com cada uma das infinitas formas modulares. O que torna a conjectura de Taniyama-Shimura tão difícil de demonstrar é que não se trata meramente de um problema infinito, e sim um infinito de problemas infinitos. O primeiro passo para sua prova indutiva estava oculto no trabalho sobre a teoria dos grupos, desenvolvida por Galois cerca de 100 anos atrás. Wiles teve que adaptar um método para análise de equações elípticas, denominado método Kolyvagin-Flach. Wiles que trabalhava secretamente, confidenciou seu segredo ao professor Nick Katz e pediu que ele o ajudasse a enfrentar a montanha de cálculos fantásticos baseados no método Kolyvagin-Flach. Finalmente no dia 23 de junho de 1993, Wiles ministrou as famosas palestras que o consagraram. Para a platéia presente, o Último Teorema de Fermat havia sido demonstrado.

Para que o prêmio Wolfskehl fosse pago era preciso que toda a demonstração fosse verificada por um comitê. Durante essa verificação uma falha foi detectada. O sonho tinha virado um pesadelo. O fantasma do fracasso ameaça Wiles. Ele voltou aos seus cálculos para descobrir a falha na demonstração. Depois de 13 meses, à beira de admitir seu fracasso, Wiles teve uma inspiração que jamais iria esquecer. Ele percebeu que, uma teoria que ele usava antes do método de Kolyvagin-Flach - a teoria de Iwasawa - sozinha fora inadequada, que o método Kolyvagin-Flach usado no momento, também era inadequado, mas que os dois juntos se completavam perfeitamente. Um mês depois Wiles completou sua demonstração. O Último Teorema de Fermat estava definitivamente provado. Em 1995, Wiles voltou à páginas dos jornais do mundo inteiro e ganhou o prêmio de 50 mil libras da Fundação Wolfskehl. Não era apenas a realização de um sonho de infância e o clímax de oito anos de esforços concentrados. Após estar à beira da derrota, Wiles reagira para mostrar ao mundo a sua genialidade

A demonstração de Wiles é uma obra-prima da matemática moderna, o que leva à conclusão inevitável de que a demonstração de Wiles para o teorema não foi a mesma de Fermat. O francês não usou formas modulares, a conjectura de Taniyama-Shimura, os grupos de Galois, a teoria de Iwasawa, o método Kolyvagin-Flach e os próprios métodos desenvolvidos por Wiles. Se Fermat não tinha as ferramentas de Wiles, o que ele tinha? Alguns matemáticos acreditam que a frase escrita na margem da Aritmética de Diofante foi um devaneio de Fermat e que de fato ele tinha uma demonstração equivocada. Outras acham que Fermat tinha a demonstração genuína, com as ferramentas disponíveis no século XVII, argumentos tão astuciosos que escapou a todos durante 350 anos. Esses acreditam que ainda podem ficar famosos descobrindo a demonstração original de Fermat.

O livro *O Último Teorema de Fermat* escrito pelo físico Simon Singh, da editora Record, conta a eletrizante história do teorema de Fermat. É uma excitante viagem pela evolução da teoria dos números. Narra emocionantes detalhes biográficos relativos a Pitágoras, Fermat, Euler, Sophie Germain, Galois, Paul Wolfskehl, Tanyiama, Wiles e outros.

Mostras as técnicas e conceitos usados, os personagens que se envolveram nessa maravilhosa jornada. Não espere o leitor encontrar a demonstração do teorema no livro. A demonstração original de Wiles tem mais de 200 páginas. Estas páginas estão recheadas de cálculos da mais avançada matemática moderna. O livro de Simon Singh vale à pena ser lido.