As Equações e Gráficos - Representações e Metáforas

Rosana de Oliveira

Resumo / O presente artigo discute a construção do conceito de equação. Considera que essa construção está diretamente relacionada às noções que envolvem o conceito de equação, tais como: equilíbrio, igualdade, conjunto universo, variável, incógnita, conjunto universo e sua representação gráfica. Aponta alguns estereótipos que os alunos constróem sobre equações e suas resoluções e, para finalizar, contribui com sugestões de atividades que permitem ao professor trabalhar as diferentes noções defendidas no decorrer do artigo.

Palavras-chave / Equação, Igualdade e Equilíbrio, Conjunto Universo, Incógnita e Variável.

O ensino e a aprendizagem da álgebra ainda é um grande obstáculo na vida acadêmica e escolar de professores e alunos.

Dentre os diversos aspectos que envolvem a Álgebra como corpo de conhecimentos, está o estudo das equações. Segundo Bekken (1994) *Lagrange, em 1798 afirmava que "a principal preocupação da álgebra é a resolução de equações".*

Professores e alunos resolvem equações através de uma seqüência de procedimentos, na maior parte das vezes sem dar atenção ou até mesmo sem entender as noções envolvidas no estudo das equações e consequentemente, os alunos seguem através dos anos escolares sem atribuir significado a esta atividade.

Nos primeiros anos de escolaridade os alunos são postos diante de situações como: "qual o valor do quadradinho?" Ou em tarefas do tipo: • + 7 = 15 ou 9 - • = 3. Poderíamos dizer que estamos diante de uma equação ou apenas de manipulações numéricas? Ou ainda, ao perguntamos para uma turma de alunos ainda não iniciados nos procedimentos de resolução de uma equação: "qual é o número que somado ao 7 o resultado é 15?" Ouviremos um grande coro como resposta, 8 (oito). Porém, se escrevermos $x + 7 = 15$, qual o valor de x? O coro já não será o mesmo.

Talvez porque muitos professores não dêem atenção à compreensão dos conceitos matemáticos, em particular, o de equação, existe uma certa naturalização das noções nele envolvidas. Até mesmo o nome de um ente matemático deve ser visto com atenção. Conhecemos as coisas através de seus nomes. Por isso, acredito ser de fundamental relevância uma conversa com os alunos sobre o que é uma equação e que outras noções são necessárias para construir o conceito de equação. Minha atenção, portanto, será dirigida às noções que devem necessariamente ser trabalhadas para a compreensão do conceito de equação.

A idéia de equação tem estreita relação com a noção de **equilíbrio.** Para trabalhar esta noção, muitos professores utilizam a metáfora da balança, porém segundo Lins (1997), essa metáfora não é oportuna para casos com valores negativos, do tipo $2x + 50 = 10$. Não há problema em utilizarmos uma metáfora se o professor deixa claro para o aluno que modificada a situação a metáfora já não resolve. Na maioria dos casos, o professor acredita que ao modificar a situação o aluno deve "deduzir" que o pensar sobre a nova atividade seja "análogo" a atividade anterior, onde a metáfora utilizada resolvia a questão proposta.

A noção de **igualdade** também é importante para conversarmos com os alunos. No senso comum, dizemos que dois objetos são iguais quando visualmente nos parecem ter as mesmas características, por exemplo dois pratos brancos, rasos, de mesmo diâmetro. Podemos dizer com certo purismo que pelo fato de ocuparem lugares distintos no espaço possuem uma certa distinção. Em matemática, a igualdade que aparece nas equações na maioria das vezes não tem essa conotação visual, por exemplo: $3x + 4 = 2x + 6$, o que torna essa igualdade verdadeira é que ela envolve números, isto é, para um determinado valor para x, nesse caso 2, o número que aparece como resultado das operações feitas no primeiro membro será exatamente igual ao mesmo número resultado das operações feitas no segundo membro. Observe que o número não se confunde com o numeral que o representa, por isso podemos falar em igualdade. Além disso, devemos ter em mente que este número será encontrado através de algum método, ou de manipulação utilizando as operações inversas, ou por estimativa, usando tentativa e erro.

A falta de um olhar cuidadoso para a noção de igualdade pode levar a procedimentos absurdos como alguns que freqüentemente encontramos nos rascunhos de nossos alunos: $2 = x$, troca-se o x e o 2 de lados, encontrando $-x = -2$, então multiplica-se por (-1) e assim por diante. Alunos olham com estranheza o fato do x não estar no primeiro membro da equação.

Outra noção imprescindível a ser discutida é a de **variável,** e sua distinção das noções de **incógnita** ou **valor desconhecido**. Existe uma certa polêmica sobre essas noções, é natural que seja assim, pois têm significados muito próximos quando o assunto é equação e que precisam ser avaliados dentro de cada contexto. Se tomarmos como exemplo uma equação do tipo $2x + 5 = 11$, encontraremos um único valor que satisfaz a equação dada, podemos dizer que 3 é o valor de nossa incógnita, antes desconhecida. Se tomarmos $x^2 = 4$, temos agora dois valores que satisfazem a equação 2 e -2. Se ainda tomarmos uma equação de duas variáveis (ou incógnitas?) do tipo $x + y = 5$ temos um conjunto de pares de números que satisfazem essa equação. As soluções de todas essas equações utilizadas nos exemplos anteriores e em particular o conjunto de pares de números que vão satisfazer uma equação com duas variáveis dependem de uma outra noção importante que vamos discutir mais adiante, a de conjunto universo, quase que deixada de lado por professores e alunos como algo sem importância na resolução de uma equação.

A noção de **variável** pode ser analisada sob o ponto de vista do nosso exemplo $x + y = 5$. Como representação para a solução desta equação podemos ter $y = 5 - x$ ou $x = 5 - y$, e nesse caso essa representação independe de quem seja o nosso conjunto universo. Essa forma de representar a solução de uma equação não é natural nem para alunos nem para muitos professores. Espera-se sempre um valor para x e outro para y, o próprio fato de se encontrar um conjunto de valores como solução causa estranheza. Particularmente o uso do gráfico para representar o conjunto de todas as soluções de uma equação é um instrumento imprescindível.

Ainda para entender a diferença tênue entre variável e valor desconhecido, tomemos $y = x + 3$. Esta equação pode representar uma função, uma dependência entre os valores de x e y, aqui chamados com mais propriedade de variáveis. Porém, podemos pensar que ao fixarmos um valor, por exemplo para y, por exemplo 7, deixamos de ter x como variável e passamos a tê-lo como uma incógnita, $x + 3 = 7$, nosso valor desconhecido é 4. Observe que cada valor de y determina um único valor para x. Este jogo de significados, no entanto, pouco acrescenta ao conceito de equação.

É importante perceber essa proximidade entre os significados e discuti-los com os alunos. No ensino de funções, geralmente um dos principais objetivos é encontrar as raízes, ou zeros das funções. É proveitoso mostrar para os alunos que ao substituirmos nosso y ou ainda f(x) por 0 (zero), deixamos de considerar a função e passamos a resolver uma equação na busca de um ou mais valores que tornem o $y = 0$. Temos aqui uma solução local, ou seja, encontramos apenas um número finito de soluções (uma, duas, etc.) do conjunto de soluções possíveis. Determinamos apenas aqueles pares de soluções onde o valor da ordenada é zero. Nesse caso a solução deve ser relacionado com o fato desses pontos, no gráfico cortarem o eixo das abscissas do plano cartesiano. Mais um aspecto deixado de lado na resolução de equações. A representação gráfica da solução.

O **conjunto universo** é mais uma noção de extrema relevância na resolução de uma equação. Na maior parte dos casos, equações expressa ou modela problemas. A solução da equação deve ser analisada sob o ponto de vista da situação problema dada. O problema delimita, ou seja, restringe o universo de soluções da equação. Por exemplo: O dobro da idade de Rafael somada com a idade de Lúcia que comemorou ontem seus 7 anos é igual a 3. Qual a idade de Rafael? Modelando este problema através de uma equação teríamos $2x + 7 = 3$, onde o valor que satisfaz essa equação é -2, a idade de Rafael não pode assumir valores negativos, nesse caso embora seja possível resolver a equação, o problema proposto não tem solução.

Se tomarmos a equação $5x + 17 = 2$ independente de uma situação problema, precisamos identificar o conjunto universo, e de acordo com ele podemos ter diferentes respostas. Se o nosso conjunto universo for o conjunto dos números naturais o conjunto solução para esta equação será o conjunto vazio, porém se o conjunto universo for o conjunto dos números inteiros, racionais ou reais, teremos como solução -3.

No caso do nosso exemplo de uma equação de duas variáveis, fica ainda mais interessante conversar sobre o conjunto universo, para $x + y = 5$, tendo como valores possíveis para x ou y o conjunto dos números naturais, nosso conjunto solução é um número finito de valores, ou melhor de pares de valores, (0, 5); (1, 4); (2, 3); (3, 2); (4, 1) e (5, 0). Se os possíveis valores de x e y forem os números reais, continuaremos a ter pares de números como solução, porém um conjunto infinito de soluções. A idéia de conjunto universo, quando cada solução é um par de números, pode não ser simples para alunos da escola básica que ainda não conhecem a idéia de produto cartesiano. Eles não têm como dar sentido para R x R, por exemplo. Nesse caso a representação gráfica (figura 1) pode expressar de forma clara o conjunto universo, se levamos em conta pontos do plano, e o conjunto solução dessa equação, ou ainda, conjunto solução $S = \{(x, y) \in R \times R / x + y = 5\}$, o que não acrescenta muito em significado para o aluno, embora seja importante que o ele domine o registro correto.

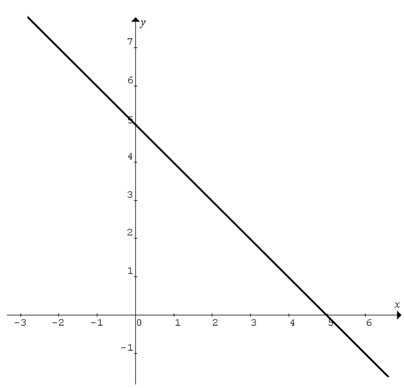


Figura 1

O que significa resolver uma equação? Essa é mais uma conversa imprescindível. Os alunos acreditam que resolver uma equação é encontrar um valor para **x**. Como se o **x** fosse a personificação da incógnita ou variável, abrindo-se algumas vezes exceção para o **y**. É bastante comum o professor que trabalha com ensino fundamental se deparar com alunos (e não são poucos!) que se a equação é proposta com letras diferentes, do tipo $3h + 2 = 6$, eles dizem que não sabem resolver. Dizemos no primeiro dia aos alunos que uma incógnita ou variável pode ser representada por qualquer letra, mas depois só utilizamos o **x.** Os alunos personificam essa letra como sendo **a** variável ou **a** incógnita. Além disso, a falta de significado que atribuem as equações e suas resoluções, é um fator que torna compreensível a dúvida dos nossos alunos. Os professores não devem encarar como absurdos certos erros cometidos pelos alunos, devemos procurar perceber o que eles não sabem, para podermos oferecer atividades que possam estar contribuindo para sanar as dúvidas e contribuir para construção de conceitos matemáticos.

Ressaltamos a importância da conversa sobre as noções importantes que envolvem o conceito de equação, ao falar sobre essas noções, vamos aos poucos procurando desmistificar os estereótipos que os alunos constróem sobre o tema. Assim, resolver uma equação não é apenas encontrar o valor de **x** ou de uma incógnita**,** esse valor procurado não necessariamente é um único número. Podemos ter pares, ternos e etc. de números. Dependerá de quantas variáveis terá a equação proposta. Além disso, um olhar cuidadoso para o conjunto universo, delimitará as soluções possíveis para uma equação. Além disso, a solução de uma equação pode ser uma outra equação equivalente à equação dada.

Sobre atribuir significado para as etapas de resolução de uma equação podemos recorrer a Arcavi (1997), onde fala acerca do "sentido do símbolo". O estereótipo de que resolver uma equação é chegar a único valor para a incógnita deixa de lado o significado de cada equação equivalente a anterior.

Tomemos a equação $3x - 7 = 11$, um procedimento usual e econômico do ponto de vista do número de transformações, seria $3x = 18$, ou ainda, $x = \frac{18}{3}$, ou ainda $x = 6$. Nesse caso, ao trabalharmos com a idéia de igualdade, utilizamos as operações inversas, ou seja,

$3x - 7 = 11$

$3x - 7 \mathbf{+ 7} = 11 \mathbf{+ 7}$

$$\frac{3x}{\mathbf{3}} = \frac{18}{\mathbf{3}}$$

$x = 6$

Mas outros caminhos poderiam ser utilizados como:

$3x - 7 = 11$

$3x - 7 \mathbf{+ 4} = 11 \mathbf{+ 4}$

$$\frac{3x - 3}{\mathbf{3}} = \frac{15}{\mathbf{3}}$$

$x - 1 + \mathbf{1} = 5 + \mathbf{1}$

$x = 6$

O problema está em oferecermos um único caminho de desenvolvimento, não discutindo que existem outros, e podemos estar atribuindo significado a cada uma das equações equivalentes que trabalhamos no processo de encontrar um valor final para a equação.

Abaixo apresento algumas sugestões de atividades que podem contribuir para que o professor converse com os alunos sobre as noções que envolvem o conceito de equação.

Atividade 1:

Das equações abaixo, escolha aquelas que fazem parte da mesma "família"?

(a) $2x = 8$

(b) $2x + 3 = 7$

(c) $4x = 16$

(d) $x + x = 7 + 1$

(e) $x = 8$

(f) $x = 4$

(g) $2x - 5 = 3$

(h) $6x + 3 = 12$

(i) $3x - x = 4 + 4$

(j) $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} - 1 = 3$

Comentário: Nesta atividade a conversa já começa quando teremos que definir o que estamos chamando de equações que façam parte da mesma família, na verdade são equações que possuem o mesmo conjunto solução. No exemplo temos que as equações (a), (c), (d), (f) (g), (i) e (j) possuem todas o mesmo conjunto solução, ou seja, o 4.

Atividade 2:

Como podemos no conjunto dos números inteiros, expressar soluções no plano para as seguintes equações:

(a) $x - y = 1$

(b) $x = -3$

(c) $3x + 2y = 24$

Como podemos no conjunto dos números reais, expressar soluções no plano para as seguintes equações:

(a) $x - y = 1$

(b) $x = -3$

(c) $3x + 2y = 24$

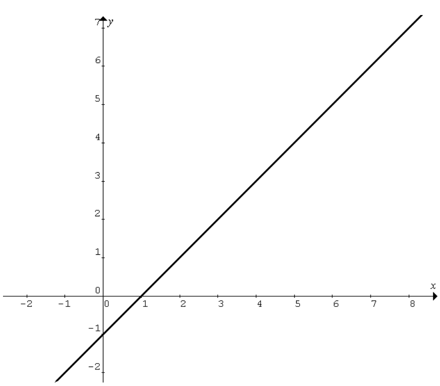
Comentário: Neste caso, o objetivo é mostrar que a representação gráfica expressa o conjunto de soluções da equação. E que os valores de uma das variáveis pode ser representado em função da outra. Assim podemos ter:

(a) $x = 1 + y$ ou $x - 1 = y$

(b) $x = -3$

(c) $x = \dfrac{24 - 2y}{3}$ ou $y = \dfrac{12 - 3x}{2}$

Além disso, podemos expressar as soluções através de suas representações gráficas, onde dependendo do conjunto universo o gráfico pode ser um conjunto discreto de pontos ou um conjunto de pontos contínuo (uma reta).



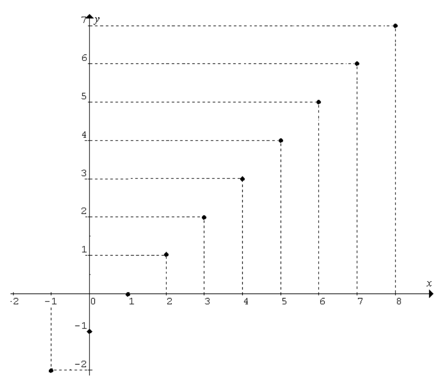


Figura 2

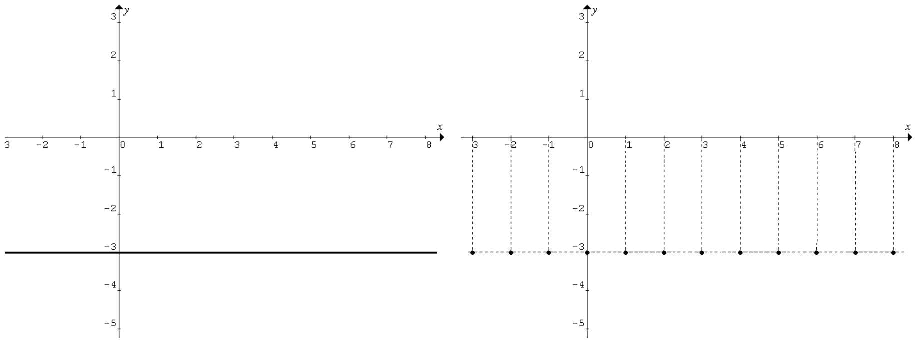


Figura 3

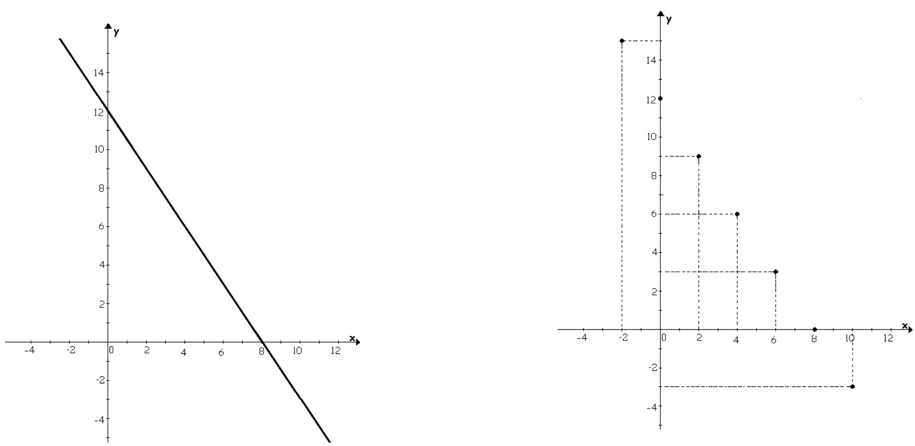


Figura 4

Atividade 3:

Qual o valor de **n** na equação $n^3 - n = 24$, onde n é um número inteiro?

Comentário: Pode parecer num primeiro olhar que temos uma equação onde não é simples encontrar a solução, mas após alguns procedimentos algébricos vemos que é possível fazer uma interpretação bastante interessante sobre a resolução dessa equação, assim temos:

$$n^3 - n = 24$$

$$n\,(n^2 - 1\,) = 24$$

$$n\,(n + 1)\,(n - 1) = 24$$

$$(n - 1)\,.\,n\,.\,(n + 1) = 24$$

Uma análise possível é identificar que nesse ponto devemos encontrar três números consecutivos que o produto seja 24, ou seja, 2, 3 e 4, assim o valor de **n** é 3, sendo $n - 1 = 2$ e $n + 1 = 4$. Nesse caso estamos utilizando procedimentos algébricos e uma interpretação sobre esses procedimentos e atribuindo significado aos símbolos, o que Arcavi (1996) denomina de *"sentido dos símbolos"*.