Como o Surpreendente Arquimedes Determinou o Volume e a Área da Esfera

Paulo Antonio Esquef

Época provável: 212 a.C. durante a Segunda Guerra Púnica entre Roma e Cartago. Local: cidade de Siracusa, colônia grega do sul da Sicília. Cenário: após um sítio de 2 anos a cidade é subjugada pelo poderoso exército romano comandado pelo general Marcelo. Durante o saque da cidade, um senhor com aproximadamente 75 anos tentando resolver um problema de Matemática, ignora à intimação de um soldado romano para acompanhá-lo. Irritado, o soldado traspassa-o com uma espada. Assim morreu Arquimedes de Siracusa, a vítima mais ilustre da batalha final.

Arquimedes nasceu por volta de 287 a.C., em Siracusa, filho do astrônomo Fidéas.

Alguns historiadores admitem que Arquimedes tenha estudado com sucessores de Euclides, em Alexandria, centro de toda atividade matemática durante toda a Idade Helenística, uma vez que ele era totalmente familiarizado com a Matemática lá desenvolvida.

Arquimedes é considerado o maior gênio da antigüidade por algumas autoridades modernas, como o alemão Felix Klein, que o colocam ao lado de Newton e Gauss, como um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Arquimedes foi simultaneamente físico e matemático, usando suas habilidades e conhecimentos na construção de engenhosas máquinas. Os achados de suas obras mostram seus estudos nos campos da Aritmética, Geometria, Mecânica e Hidrostática. Sua grande paixão era a Matemática e nela produziu trabalhos de rara beleza e originalidade, idéias que nenhum de seus antecessores ousaram pensar. Criou e aperfeiçoou um método de integração que lhe permitia determinar áreas de figuras planas e áreas superficiais e volumes de sólidos. O método de exaustão usado por Arquimedes é uma forma primitiva de integração, do qual obteve uma série de resultados importantes, dos quais muitos chegaram aos nossos dias. Deu os primeiros passos na noção de limite, ao considerar a circunferência como limite para o qual tendem duas famílias de polígonos inscritos e circunscritos a ela, cujo número de lados crescem indefinidamente. Começando com um polígono de 6 lados, um inscrito e outro circunscrito, Arquimedes foi determinando seus perímetros até chegar aos polígonos de 96 lados e constatou que p encontra-se entre, $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{10}{70}$ uma precisão fantástica, considerando o inadequado sistema de numeração grego da época.

Entre os textos originais de suas obras que chegaram até nós, estão: **Sobre a esfera e o cilindro, Sobre os corpos flutuantes, A medida do círculo, A quadratura da parábola, Sobre as espirais, O contador de grãos de areia, Sobre conóides e esferóides, Sobre o equilíbrio das figuras planas** e **O método**.

Na Física, estudou as polias e os parafusos, construindo o parafuso de Arquimedes, usado para elevar água; formulou as leis que regem as alavancas, chegando a pronunciar a célebre frase: *"Dê-me um ponto de apoio fora de Terra e um lugar para me firmar que eu moverei a mesma".* Na hidrostática, descobriu a lei do empuxo; *"Todo corpo mergulhado em um fluido sofre uma força vertical, de baixo para cima e igual ao peso do volume do fluido deslocado"*, ao estar envolvido na solução da falsificação ou não da coroa do rei Hierão. Conta a história que essa lei foi descoberta quando Arquimedes mergulhou em sua banheira cheia de água. Eufórico com a descoberta (que iria salvar o seu pescoço), sai correndo nu pelas ruas da cidade, gritando: *"Eureka, Eureka"*, "Achei, Achei".

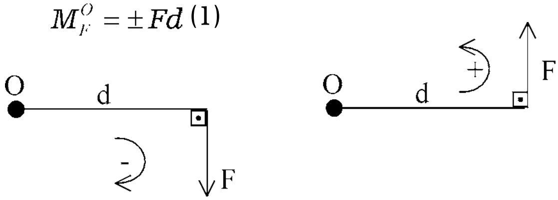
Até o início do século XX, sabia-se que Arquimedes chegara aos resultados corretos para as fórmulas da área e do volume da esfera, mas não se conheciam os métodos empregados pelo sábio de Siracusa nas respectivas demonstrações.

Em 1906, um estudioso dinamarquês, Johan Ludvig Heiberg, que dedicara sua vida à Matemática Grega, em especial à edição completa e comentada dos Elementos de Euclides, teve sua perseverança recompensada ao encontrar perdido na biblioteca de um monastério de Constantinopla, um pergaminho datado do século X, contendo a transcrição da obra **O Método**, de Arquimedes, onde estavam as provas exaustivamente procuradas. O que ali estava foi surpreendente: o sábio de Siracusa adotara uma abordagem física para a questão, aplicando conceitos de momentos de pesos suspensos sobre barras para chegar às suas conclusões.

Para entender melhor a abordagem física de Arquimedes na determinação do volume da esfera, vamos recordar os conceitos de momento de uma força e de equilíbrio.

Define-se momento ou torque de uma força em relação a um ponto de rotação, ao produto da força pela distância que vai do ponto de rotação à força.

$M_F^O = \pm Fd$ (1)

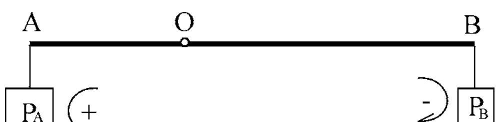


Os sinais + e - que aparecem na expressão (1) do momento indicam que o efeito de giro da força em relação ao ponto O pode ser no sentido horário (-) ou no sentido anti-horário (+).

Se um sistema onde atuam forças está em equilíbrio de rotação relativo a um ponto, a soma dos momentos da forças que produzem a rotação no sentido horário deve ser igual à soma dos momentos das forças que produzem a rotação no sentido anti-horário. Em outras palavras: *Quando um sistema está em equilíbrio de rotação, a soma algébrica dos momentos das forças em relação a um ponto deve ser nula.*

Equilíbrio de rotação $\Leftrightarrow \sum M_F^O = 0$ (2)

Considere uma barra AB ideal (sem peso) articulada no ponto O. Nas extremidades A e B estão pendurados os pesos P_A e P_B de modo a manter a barra em equilíbrio e na posição horizontal.



Aplicando a condição de equilíbrio de rotação em relação ao ponto O, temos:

$+ P_A \times \overline{OA} - P_B \times \overline{OB} = 0$ (3)

onde $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são os braços da alavanca.

Se os corpos A e B forem homogêneos e constituídos do mesmo material, eles têm o mesmo peso específico r (peso específico de uma substância homogênea é a relação entre o seu peso e o respectivo volume: $\rho = \frac{P}{V}$). Sendo V_A e V_B os respectivos volumes dos corpos A e B, temos:

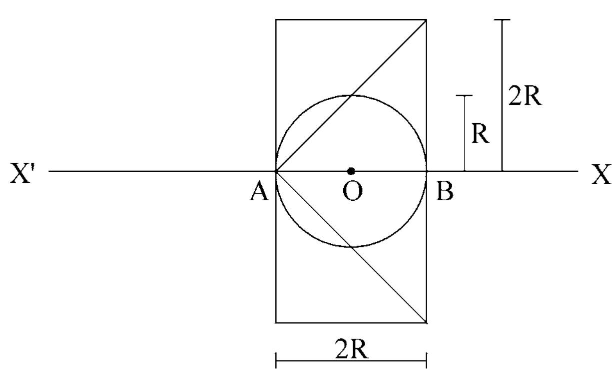
$$\rho V_A \times \overline{OA} - \rho V_B \times \overline{OB} = 0 \quad \text{ou} \quad \boxed{V_A \times \overline{OA} - V_B \times \overline{OB} = 0} \qquad (4)$$

Para aumentar a praticidade da demonstração de Arquimedes, vamos denominar o produto do volume do corpo pendurado pelo braço da alavanca de "momento de volume".

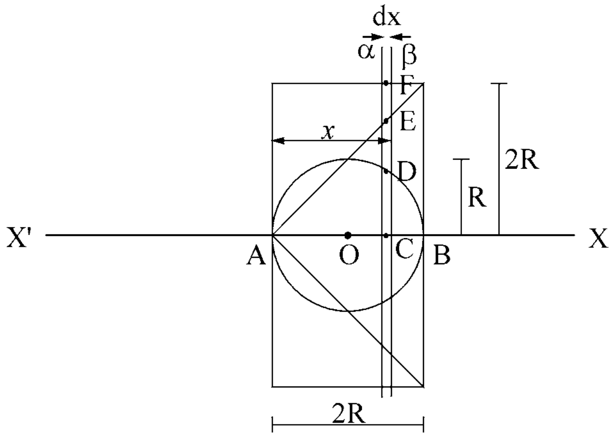
Usando a nova definição e a relação (4) podemos afirmar que: *se vários corpos homogêneos estão pendurados numa barra ideal articulada num ponto O de modo a manter a barra em equilíbrio de rotação, a soma algébrica de seus "momentos de volume" em relação ao ponto O deve ser nula*.

A conclusão anterior será usada para demonstrar como Arquimedes chegou à formula do volume da esfera.

Imagine uma esfera de raio R, um cone de altura 2R e raio da base igual a 2R parcialmente inscrito e parcialmente circunscrito a ela e um cilindro de altura 2R e raio da base igual a 2R com base concêntrica com a base do cone, ambos coaxiais e cujo eixo comum contém o centro da esfera. A figura a seguir representa um corte do conjunto por um plano passando pelo centro da esfera e contento X'X, os eixos comuns do cilindro e do cone.



Considere agora, dois planos a e b, paralelos entre si e perpendiculares ao eixo X'X e separados por uma distância muito pequena (dx), cortando os três sólidos em "fatias" extremamente finas, conforme a figura a seguir.



As "fatias" semelhantes a três moedas bastante finas, têm raios:

Cilindro: CF   Cone: CE   Esfera: CD

Seus volumes aproximados são:

Cilindro: $dV_{ci} = p(CF)^2dx$ (5)

Cone: $dV_{co} = p(CE)^2dx$ (6)

Esfera: $dV_e = p(CD)^2dx$ (7)

Para o cilindro temos: CF = 2R.

Para o cone temos: CE = CA = x

Imaginando o triângulo ADB, vemos que o mesmo é retângulo uma vez que a hipotenusa é o diâmetro da circunferência da seção da esfera e o ponto D pertence à essa circunferência. Pela propriedade da altura relativa à hipotenusa do triângulo podemos escrever:

(CD)2 = (AC)x(CB)   ou (CD)2 = x.(2R -x) = 2Rx - x2

Substituindo os valores de CF, CE e CD nas relações (5), (6) e (7), respectivamente, temos:

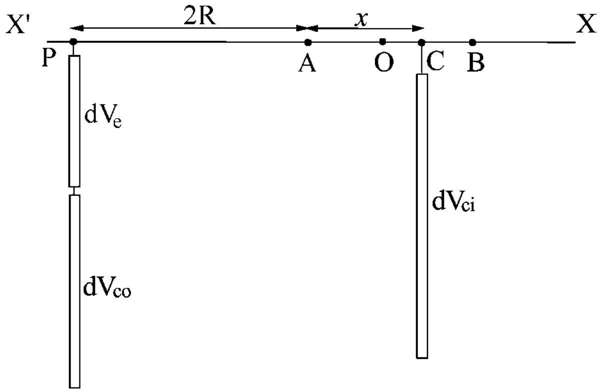
$dV_{ci} = p(2R)^2dx = 4pR^2dx$ (8)

$dV_{co} = px^2dx$ (9)

$dV_e = p(2Rx - x^2)dx = 2pRxdx - px^2dx$ (10)

Considere o ponto P, localizado no eixo X'X e distante 2R de A e à esquerda do mesmo.

Vamos pendurar as "fatias" do cone e da esfera no ponto P e a "fatia" do cilindro fica pendurada no ponto C (a uma distância x de A).



Vamos determinar os “momentos de volume” das “fatias” do cone e da esfera em relação ao ponto A.

$$M^A_{dV_{co},dV_e} = +\left(dV_{co} + dV_e\right)\ 2R$$
$$M^A_{dV_{co},dV_e} = \left(\pi x^2 dx + 2\pi Rxdx - \pi x^2 dx\right)2R$$
$$\boxed{M^A_{dV_{co},dV_e} = 4\,\pi R^2 xdx} \qquad (11)$$

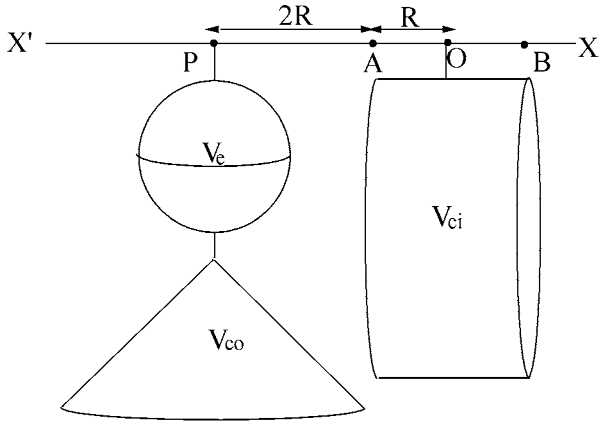
Vamos calcular o “momento de volume” da “fatia” do cilindro em relação ao ponto A:

$$M^A_{dV_{ci}} = -\left(dV_{ci}\right)x = -\left(4\pi R^2 dx\right).x$$
$$\boxed{M^A_{dV_{ci}} = -4\pi R^2 xdx} \qquad (12)$$

Comparando os resultados obtidos em (12) e (11), vemos que o módulo do “momento de volume” da “fatia” do cilindro é igual o módulo do “momento de volume” das “fatias” cone mais a esfera, qualquer que seja a posição em que se faça o corte pelos planos a e b (distância *x*).

Deslocando-se continuamente os planos a e b desde o ponto A até o ponto B e repetindo-se o procedimento de se pendurar as “fatias” da esfera e do cone em P, ao fim do procedimento teremos pendurados em P todas as partes que compõem a esfera e o cone e a soma de todas essas partes constituirão estes dois sólidos.

As “fatias” do cilindro (todas iguais) estarão simetricamente distribuídas em relação à vertical que passa pelo ponto O. A figura a seguir mostra o final da operação.



O "momento de volume" em relação ao ponto A produzido pelo conjunto esfera-cone (anti-horário) é igual momento do cilindro (horário) relativo ao mesmo ponto.

Aplicando a condição de equilíbrio dos momentos em relação a A na figura anterior temos

$(V_{co} + V_e).2R - V_{ci}.R = 0$

$V_{co} + V_e = V_{ci}$

$V_e = V_{ci} - V_{co}$ (13)

Os volumes do cilindro e do cone já eram conhecidos na época de Arquimedes. Seus volumes são:

$$V_{ci} = \acute{A}rea_{base} \times altura = \pi (2R)^2 2R = 8\pi R^3$$

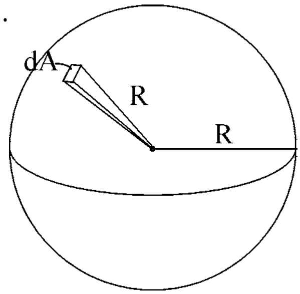
$$V_{co} = \frac{1}{3} \acute{A}rea_{base} \times altura = \frac{1}{3}\pi (2R)^2 (2R) = \frac{8\pi R^3}{3}$$

Substituindo os valores de V_{ci} e V_{co} na relação (13), temos:

$$V_e = \frac{1}{2}(8\pi R^3) - \frac{8\pi R^3}{3} = 4\pi R^3 - \frac{8}{3}\pi R^3$$

$$\boxed{V_e = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

Numa correspondência enviada a Eratóstenes, Arquimedes relatou que, após deduzir o volume da esfera foi fácil calcular a área da mesma. Arquimedes imaginou a esfera composta de uma infinidade de pequenas pirâmides, cujas alturas eram o raio da esfera e cujas bases eram pequenos elementos da superfície.



Cada pequena pirâmide tem como volume (dV) um terço do pequeno elemento de superfície (dA) multiplicado pela altura (que é o raio da esfera). Somando-se todos volumes das pequeninas pirâmides, obtém-se o volume da esfera que também será um terço da soma das pequenas áreas multiplicada pelo raio da esfera.

$$\frac{1}{3}\left(\sum dA\right).R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Mas, $\sum dA$ é a própria área da esfera (A_{esfera}). Logo:

$$\frac{1}{3}A_{esfera}.R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\boxed{A_{esfera} = 4\pi R^2}$$

Incrível, fantástico, extraordinário, prodigioso, admirável, singular, arrepiante, sensacional. Teria o leitor adjetivo apropriado para qualificar a inusitada demonstração do volume da esfera? E da área da esfera? Lembre-se das dificuldades enfrentadas por Arquimedes naquela época: não existia o papel, papiros e pergaminhos eram escassos, os instrumentos de escrita eram rudimentares, a simbologia complexa, etc.

O leitor estará se perguntando: "Como Arquimedes conseguiu tudo isso?". A resposta é simples: ELE ERA UM GÊNIO.

Referências bibliográficas

[1] Boyer, Calr B., *História da Matemática*, Ed. Edgard Blücher Ltda, 1974 - p. 89-102

[2] Garbi, Gilberto G., *O Romance das Equações Algébricas,* Makron Books do Brasil Editora Ltda -1997. p. 222-226