Sugestão Para Sua Aula

Uma demonstração do Teorema de Pitágoras usando conceitos físicos de equilíbrio e de momento de uma força

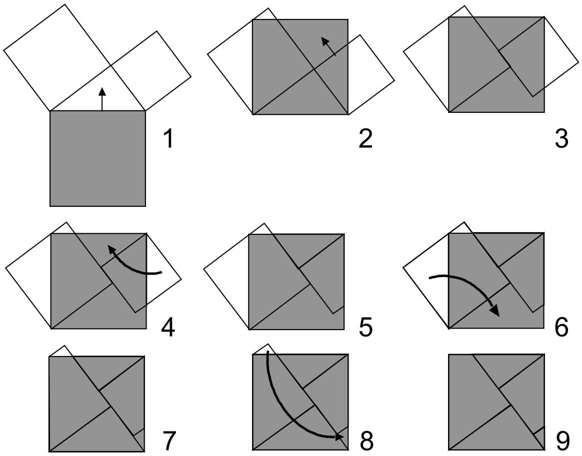
Paulo Antonio Esquef
Centro Universitário Fluminense - UNIFLU
U.O. Faculdade de Filosofia de Campos RJ
pauloesquef@yahoo.com.br

Introdução

É inegável a atração irresistível que o teorema de Pitágoras exerceu (e ainda exerce) sobre os apaixonados pela Matemática desde a sua concepção, por Pitágoras, no período 580-500 AC. Dentre esses apaixonados podemos citar Elisha S. Loomis. Na primeira edição de seu livro "The Pythagorean Proposition" (1927), Loomis catalogou 230 demonstrações para o teorema. Em 1940, na segunda edição, o número de demonstrações tinha subido para 370. O número de demonstrações atualmente conhecidas já se aproxima de 400.

Basicamente as provas são classificadas em "provas geométricas" (em que são usadas as comparações de áreas) e as "provas algébricas" (em que são usadas as relações métricas).

Dentre as provas geométricas, existem aquelas denominadas "sem palavras" objetivando mostrar que os quadrados construídos sobre os catetos cabem no quadrado construído sobre a hipotenusa. A figura ilustra uma dessas provas[1].



[1] A prova "sem palavras" apresentada não foi retirada de nenhum sítio da Internet. Ela foi imaginada por mim. Nos sites e artigos pesquisados não encontrei nada parecido. Não tenho a pretensão dizer que seja inédita, pois existem quase 400 provas do teorema e não tive acesso a todas.

Outras provas são pouco divulgadas. Entre elas, há uma que utiliza conceitos da Física, especificamente, equilíbrio e momento de uma força, objetivo deste artigo.

Sendo graduado em Matemática e com especialização em Física, cadeira que leciono há 38 anos, sempre fui um apaixonado pela História da Matemática e pela própria Matemática. Nesse momento em que a Física e a Matemática se enlaçam compondo as Ciências da Natureza e suas Tecnologias, achei oportuno mostrar essa interdisciplinaridade, apresentando uma demonstração do Teorema de Pitágoras utilizando conceitos da Física.

Embasamento

O enunciado do Teorema de Pitágoras e sua expressão algébrica são amplamente conhecidos e dispensam comentários. Acredito que a maioria dos leitores do Boletim do GEPEM é constituída de professores de Matemática e não está muito familiarizada com os conceitos da Física. A prova que pretendo apresentar envolve os conceitos de momento de uma força e de equilíbrio do corpo rígido. Para entender melhor a abordagem da prova do Teorema de Pitágoras, vamos recordar esses conceitos.

Sistema de forças coplanares e condições de equilíbrio

Quando um conjunto de forças age sobre um objeto, dizemos que o objeto está submetido a um sistema de forças. Um sistema de forças de particular interesse é o coplanar.

Para que um corpo rígido submetido a sistema de forças fique em equilíbrio, duas condições são necessárias:

1. a soma (vetorial) da forças que agem sobre o corpo deve ser nula;
2. a soma algébrica dos momentos das forças em relação a um ponto deve ser nula.

Soma Vetorial - Regra do polígono

Um método gráfico bastante usado para determinar a soma de vetores é o conhecido como ***regra do polígono***. Nesse método, escolhe-se um ponto do plano para colocar a origem do primeiro vetor; o segundo vetor deve ter sua origem coincidente com a extremidade do primeiro; a origem do terceiro deve coincidir com a extremidade do segundo vetor e assim sucessivamente (figura a). O vetor soma deve ter sua origem na origem do primeiro, e sua extremidade na extremidade do último (figura b).

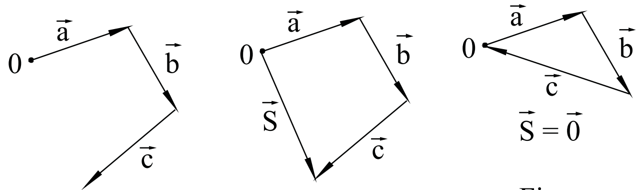


Figura a Figura b Figura c

Se a extremidade do último vetor coincidir com a origem do primeiro (polígono fechado), a soma vetorial é o vetor nulo, como mostra a figura c.

Momento ou Torque de uma Força

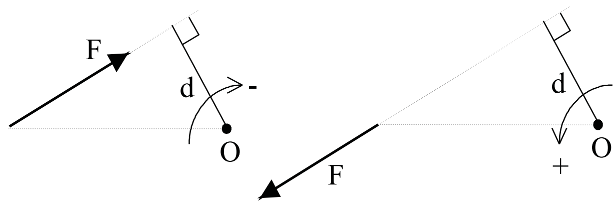
Conceitualmente, momento de uma força (torque), em relação a um ponto de rotação, é uma medida de a tendência da força provocar uma rotação em torno daquele ponto. No nosso dia-a-dia, folgar ou apertar um parafuso, abrir ou fechar uma porta, abrir ou fechar um livro, etc... são aplicações do momento de uma força.

Se o sistema de força agindo sobre um corpo for coplanar, podemos dar um tratamento escalar ao momento, definindo o seu módulo, e adotar um sinal para designar o sentido de rotação da força.

Considere uma força F e um ponto O, pertencentes a um mesmo plano, e d a distância do ponto à força, também conhecido como braço da força.

Define-se momento ou torque da força ***F*** em relação a um ponto de rotação ***O***, (M_F^O) como produto da força pelo seu braço.

$$M_F^O = \pm Fd \qquad (1)$$



Os sinais + e - que aparecem na expressão (1) do momento indicam que o efeito de giro da força em relação ao ponto O pode ser no sentido horário (-) ou no sentido anti-horário (+), indicados na figura.

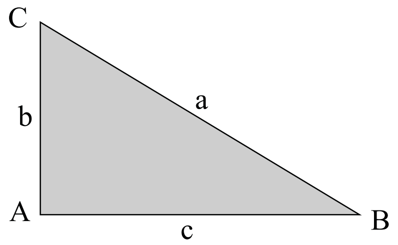
Para que um sistema de forças coplanares fique em equilíbrio de rotação em relação a um ponto qualquer desse plano, a soma dos momentos das forças que produzem a rotação no sentido horário deve ser igual à soma dos momentos das forças que produzem a rotação no sentido anti-horário. Em outras palavras:

Quando um sistema está em equilíbrio de rotação, a soma algébrica dos momentos das forças em relação a um ponto deve ser nula.

$$Equilibrio\ \ de\ rotação \Leftrightarrow \sum M_F^O = 0$$

A Prova

Considere um corpo rígido com a forma de um triângulo retângulo, extraído de uma placa plana e homogênea, rígida e extremamente fina, como mostra a figura a seguir.



Sendo A o ângulo reto da placa triangular, o lado a é a hipotenusa e os lados b e c, os catetos do triângulo.

As forças que serão aplicadas à placa devem obedecer as seguintes condições:

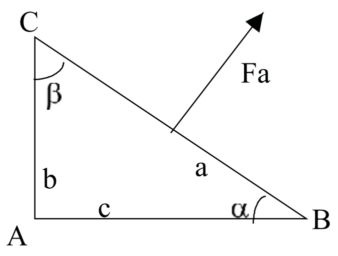
1) devem pertencer ao mesmo plano que contém a placa;

2) devem ser aplicadas no ponto médio de cada lado e perpendicularmente aos mesmos;

3) todas as forças devem "apontar", simultaneamente, para "fora" da placa ou para "dentro" da placa;

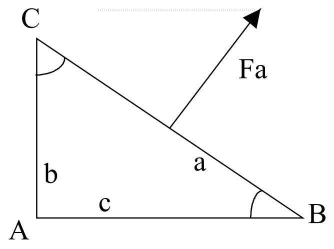
4) a soma vetorial dessas forças dever nula.

Vamos aplicar primeira força na hipotenusa do triângulo, como mostra a figura a seguir.



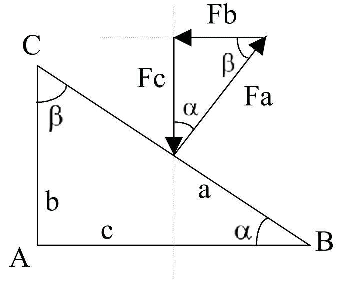
Como devem ser aplicadas as outras duas para que a quarta condição seja obedecida?

A força Fb, aplicada ao lado AC deve ser perpendicular a esse lado e apontar para "fora" da placa (uma vez que foi este o sentido escolhido para a força Fa). Sua origem está na extremidade de Fa, e numa direção perpendicular ao lado AC (linha pontilhada na figura a seguir).



A força Fc deve ser perpendicular ao lado AB e, para obedecer à quarta condição, deve fechar o polígono (triângulo), isto é, sua extremidade deve ser coincidente com a origem da primeira força (Fa) e sua origem deve ser a extremidade de Fb. Portanto, a extremidade de Fb deve ser a interseção da reta perpendicular a AB com a reta que contém a direção pontilhada indicada na figura.

A seguir, mostramos o triângulo de forças construído, de modo a obedecer à quarta condição.



O triângulo formado pelas forças e o triângulo da placa são semelhantes pois possuem os lados correspondentes perpendiculares. Portanto,

$$\frac{F_a}{A} = \frac{F_b}{b} = \frac{F_c}{c} = K$$

De acordo com a condição (4) anterior, os módulos dessas forças são:

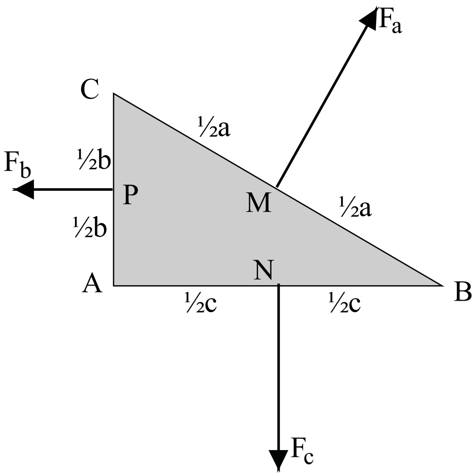
$Fa = ka$ $\quad$ $Fb = kb$ $\quad$ e $\quad$ $Fc = kc$

onde k é uma constante de proporcionalidade.

Portanto, para que a soma vetorial das forças seja nula, o módulo de cada força deve ser proporcional à medida do lado onde está aplicada.

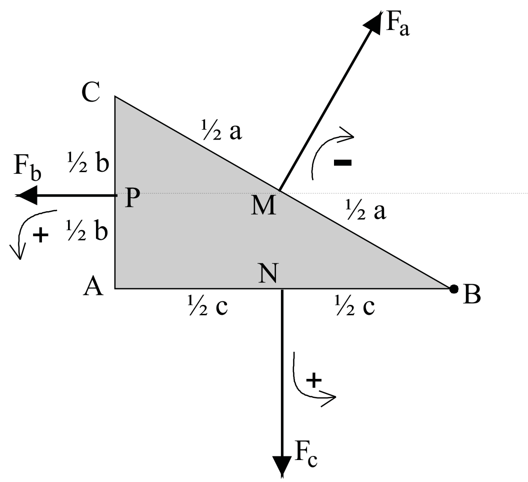
Sejam Fa, Fb e Fc, as forças que serão aplicadas, respectivamente, nos lados ***a, b*** e ***c***.

A figura a seguir mostra as forças aplicadas à placa, obedecendo às condições impostas:



A condição de equilíbrio de rotação é válida para qualquer ponto escolhido no plano da placa. Deste universo de pontos, os pontos A , B e C, são fortes candidatos a serem escolhidos como ponto de rotação para a aplicação dos momentos.

Escolhendo o ponto B como centro de rotação, temos:



Força F_a:

- sua distância a B é BM = ½ a
- seu torque é negativo
- o seu torque vale: $M_{F_a}^{B} = -F_a \times \frac{1}{2}a = -ka \times \frac{1}{2}a = -\frac{1}{2}ka^2$

Força F_b:

- sua distância a B é AP = ½ b
- seu torque é positivo
- o seu torque vale: $M_{F_b}^{B} = F_b \times \frac{1}{2}b = kb \times \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}kb^2$

Força F_c:

- sua distância a B é BN = ½ c
- seu torque é positivo
- o seu torque vale: $M_{F_c}^{B} = F_c \times \frac{1}{2}c = kc \times \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}kc^2$

Como a soma algébrica dos torques deve ser nula, podemos escrever:

Simplificando a expressão, temos:

$a^2 = b^2 + c^2$

expressão algébrica do Teorema de Pitágoras.

A escolha do vértice B, facilitou o desenvolvimento da prova, uma vez que as distâncias das forças ao ponto foram respectivamente, as metades dos lados do triângulo.

Se o ponto escolhido fosse o vértice A, as distâncias de Fb e Fc seriam respectivamente AP = ½b e AN = ½c, mas a distância de Fa a A não é visualmente determinada. Apenas para validar a prova, vamos mostrar seu desenvolvimento, tomando A como ponto de rotação.

Como o problema está em determinar a distância da força Fa ao vértice A, apresentamos a figura a seguir, simplificada.

Como a soma algébrica dos torques deve ser nula, podemos escrever:

$$-\tfrac{1}{2}ka^2 + \tfrac{1}{2}kb^2 + \tfrac{1}{2}kc^2 = 0$$

Simplificando a expressão, temos:

$a^2 = b^2 + c^2$

expressão algébrica do Teorema de Pitágoras.

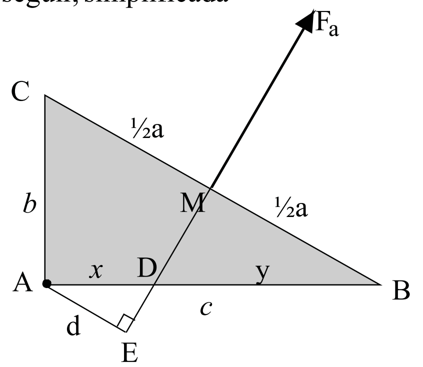
A escolha do vértice B, facilitou o desenvolvimento da prova, uma vez que as distâncias das forças ao ponto foram respectivamente, as metades dos lados do triângulo.

Se o ponto escolhido fosse o vértice A, as distâncias de Fb e Fc seriam respectivamente AP = ½b e AN = ½c, mas a distância de Fa a A não é visualmente determinada. Apenas para validar a prova, vamos mostrar seu desenvolvimento,

tomando A como ponto de rotação.

Como o problema está em determinar a distância da força Fa ao vértice A, apresentamos a figura a seguir, simplificada

.



Os triângulos AED, BMD e BAC são semelhantes.

Considerando os triângulos AED e BAC, podemos escrever:

$$\frac{x}{a} = \frac{d}{c} \rightarrow x = \frac{ad}{c} \quad (3)$$

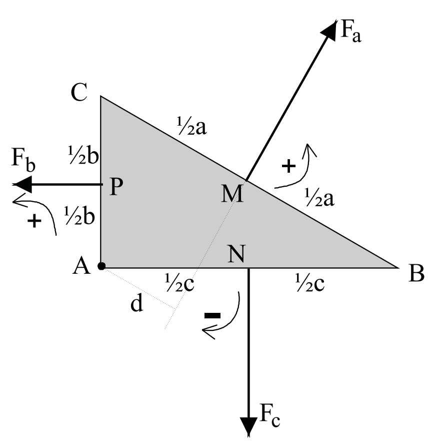
Considerando os triângulos BMD e BAC, temos:

$$\frac{Y}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{c} \rightarrow y = \frac{a^2}{2c} \quad (4)$$

Sendo $x + y = c$, temos:

$$\frac{ad}{c} + \frac{a^2}{2c} = c \rightarrow d = \frac{2c^2 - a^2}{2a} \quad (5)$$

De posse da distância da força Fa ao vértice A, podemos aplicar a condição de equilíbrio de rotação, tomando A como referência. De acordo com a figura a seguir, temos:



Força F_a:
sua distância a A é $d = \dfrac{2c^2 - a^2}{2a}$
seu torque é positivo
o seu torque vale: $M_{F_a}^{A} = F_a \times \dfrac{2c^2 - a^2}{2a} = ka \times \dfrac{2c^2 - a^2}{2a} = k\left(c^2 - \dfrac{a^2}{2}\right)$

Força F_b:
sua distância a A é AP = $\frac{1}{2}b$
seu torque é positivo
o seu torque vale: $M_{F_b}^{A} = F_b \times \frac{1}{2}b = kb \times \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}kb^2$

Força F_c:
sua distância a A é AN = $\frac{1}{2}c$
seu torque é negativo
o seu torque vale: $M_{F_c}^{A} = -F_c \times \frac{1}{2}c = -kc \times \frac{1}{2}c = -\frac{1}{2}kc^2$

Como a soma algébrica dos torques deve ser nula, podemos escrever:

$$k\left(c^2 - \frac{a^2}{2}\right) + \frac{kb^2}{2} - \frac{kc^2}{2} = 0$$

$$c^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} = 0$$

$$\frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$

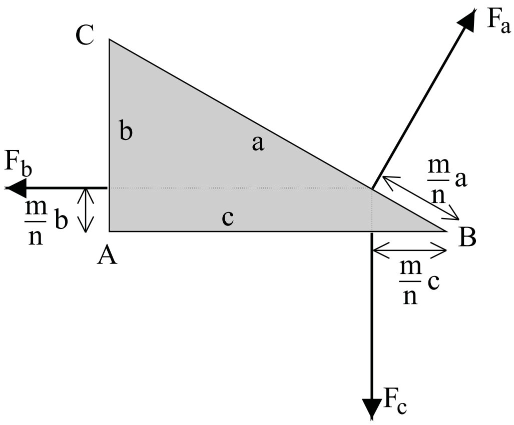
ou

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

expressão algébrica do Teorema de Pitágoras.

Considerações Finais

Para concluir, seria importante esclarecer ao leitor que a primeira parte da condição 2 (forças aplicadas no ponto médio do lado) foi imposta para simplificar as demonstrações. As outras condições são necessárias. A figura a seguir mostra as forças aplicadas fora dos pontos médios dos lados. Definido o ponto de aplicação da primeira força, (Fa), automaticamente são localizados os pontos de aplicação das outras duas (ver figura). A força Fa está aplicada a uma distância $\frac{m}{n}a$ do vértice B: ($\left\{m, n \in \mathrm{N}^* \mid m < n\right\}$).



Utilizando os pontos A, B e C como centros de rotação, o leitor fica desafiado a obter a expressão do teorema de Pitágoras usando as condições dadas na figura anterior.

Não é incrível como um teorema tão simples possa ter uma variedade tão grande de provas?

Referências

PENTEADO, P. C. M. **Física - Conceitos e Aplicações.** São Paulo: Moderna, 1998

TOKIEDA, T. F. **Mechanical Ideas in Geometry**. Amer Math Monthly, 1998

LOOMIS, E.S. **The Pythagorean Proposition:** Its Demonstration Analyzed and Classified and Bibliography of Sources for Data of the Four Kinds of “National Council of Teachers of Mathematics”. Washington, DC, 1968.

Sítios da Internet apresentando provas do Teorema de Pitágoras

http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

http://www.arrakis.es/~mcj/teorema.htmhttp://www.geocities.com/CapeCanaveral/Launchpad/3740/activities.html

Http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pythagoras.htmlhttp://roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm