Um diálogo sobre o crivo de Eratóstenes: Relato de uma experiência com correio eletrônico

Helena Noronha Cury
Professora, PUCRS
curyhn@pucrs.br

Lucas Werkmeister
Albert-Einstein-Gymnasium
Sindelfingen, Alemanha
lucas.werkmeister@web.de

Resumo
Neste relato, é apresentado um diálogo entre um aluno de 7ª série e uma professora de Matemática, por meio de correio eletrônico. As mensagens foram gravadas, sendo posteriormente analisadas. Inicialmente, o estudante manifesta curiosidade sobre a maneira mais fácil de verificar se um determinado número é primo. A partir da resposta da professora, da continuação do diálogo e de buscas na Internet, o estudante produz um trabalho criativo sobre maneiras de encontrar números primos. A experiência mostra que é possível atingir um nível cognitivo mais elevado, com a mediação de recursos tecnológicos, como correio eletrônico, software e Internet.

Palavras-chave: números primos, crivo de Eratóstenes, desenvolvimento cognitivo.

A dialogue about the sieve of Eratosthenes: A report of an experience with e-mail

Abstract
We report in this paper, we report a dialogue between a 7º-grade pupil and a Mathematics teacher, by e-mail. Messages were saved and later analyzed. In his first message the student reveals his curiosity about the easiest way to verify if a given natural is a prime number. Drawing on the dialogue developed with the teacher and on his searches in the Internet, the student produces a creative work about ways to find prime numbers. The experience shows that it is possible to reach a higher cognitive level, mediated by technological resources, as e-mails, software and Internet.

Keywords: prime numbers, sieve of Eratosthenes, cognitive development.

Introdução

Em 1987, em Montreal, Jere Confrey apresentou um trabalho na Conferência Anual do PME (Psychology of Mathematics Education), chamado "O construtivista". Nele, a autora simula um diálogo entre Sócrates e Leggos, um pesquisador em Educação Matemática que segue a linha construtivista. Nesse diálogo, Confrey vai inserindo suas idéias sobre vários tópicos relacionados com o ensino de Matemática. Sua proposta explora o diálogo como forma de construir o conhecimento.

Hoje, quando o uso da Internet é um hábito cotidiano, o diálogo pode ser ainda mais associado à aprendizagem, dadas as facilidades de contato entre as pessoas e de busca de informações. Os diálogos mantidos por mensagens eletrônicas potencializam o acompanhamento aos alunos, permitindo-lhes, sob a orientação de colegas ou do professor, atingir um nível de desenvolvimento superior. É, de certa forma, o que Vygotsky (1989) aponta, quando define zona de desenvolvimento proximal (ZDP) como

> [...] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. (p. 97).

O presente relato tem como objetivo apresentar o diálogo mantido entre uma professora de Matemática e um aluno de 11 anos, discorrendo sobre suas descobertas sobre números primos e mostrando possibilidades de uso de meios eletrônicos pelos professores, para desafiar os alunos na exploração de conteúdos matemáticos que, nas grades curriculares, se encontram em anos posteriores aos da sua escolaridade.

O relato é muito mais fruto do esforço do estudante do que da sistematização e posterior análise que faço, por isso somos, ambos, autores. Na verdade, não sendo sua professora, fui, como diz Vygotsky, um adulto que, por ter formação matemática e pedagógica, pôde acompanhar sua caminhada na busca de respostas a suas inquietações.

A Interação por Correio Eletrônico e o Desenvolvimento Cognitivo

Trabalhos em Educação matemática têm relatado interações a distância entre alunos e professores, por meio de correio eletrônico, fóruns e chats. Sauer

(2004), trabalhando em ambientes virtuais de aprendizagem, considera que "os diálogos matemáticos têm sempre como ponto de partida atividades de estudo" (p. 119) e destaca o fato de "identificar as dificuldades de cada aluno e [...] promover a (re)construção de conhecimentos, levando em consideração os que ele já possui." (p. 120). Borba e Penteado (2001) relatam o uso de e-mails por alunos de um curso de Biologia, durante o desenvolvimento de projetos solicitados pelo professor de Matemática Aplicada. Bairral (2003) apresenta interações entre uma professora e o docente formador, em um projeto de formação continuada em Geometria.

No entanto, também é possível aprender em encontros virtuais que se desenvolvem sem planejamento, fora de ambientes formais de ensino. Em quaisquer circunstâncias, é evidente o desenvolvimento cognitivo proporcionado pelas interações, haja vista a possibilidade de expor as dificuldades sem o controle visual do professor e o interesse pela continuidade dos diálogos. Como diz Valente (2006),

> [...] para que sua atuação seja efetiva, ele [o mediador] deve trabalhar dentro da ZDP. Se o mediador intervem no nível de desenvolvimento atual do aluno, o mediador está "chovendo no molhado" - o aluno já sabe o que está sendo proposto pelo mediador. Se atuar além do nível potencial de desenvolvimento, o aluno não será capaz de entender o mediador. [...]: a atividade do mediador é mais pedagógica do que psicológica (a de investigar a estrutura mental do aluno). (p. 7).

Consideramos que os resultados produzidos pelo aluno, ao construir o seu método para buscar números primos, comprovam essa afirmação.

A Origem do Trabalho e os Diálogos

O aluno em questão, indicado no texto por L, estuda na 7ª série de um *Gymnasium* (a escola pública alemã de nível médio), no estado de Baden-Württemberg. Na 5ª e 6ª séries do *Gymnasium*, os estudantes têm quatro horas semanais de Matemática, na 7ª série, essa carga horária já passa para três horas.

O aluno L, em 2004, portanto na 6ª série do *Gymnasium*, teve sua atenção despertada pelos números primos. Como gosta muito de computador e particularmente de um jogo chamado *Mathica*, que apresenta desafios matemáticos inseridos em um enredo de mistério, ele teve a idéia de usar algum programa para verificar se um número é primo. Em uma mensagem a mim dirigida, ele perguntou: "Qual é a maneira mais fácil de saber se 35249 é um número primo[1]?" Não sabendo o que ele já tinha estudado até então, procurei dar uma resposta que lhe permitisse encontrar alguns elementos em livros ou na Internet.

H - A pergunta não é fácil, pois achar números primos é um desafio até para quem usa computador, pois tem que fazer programinhas para que o micro vá fazendo os testes. Mas, além do que você decerto já tentou (ir dividindo pela seqüência de números naturais, para ver se a divisão é exata ou não), há uma propriedade que eu não sei se você já sabe usar e que diz assim: se um número não é primo, então ele possui um fator primo menor ou igual à raiz dele mesmo.[2] *Por exemplo, o número 40 não é primo, a raiz de 40 é aproximadamente 6,3 e existe o número 5 que é fator de 40 (pois 40 é divisível por 5) e 5 é primo, menor do que 6,3. Para o número 35249, é complicado de fazer. Você sabe de alguma maneira mais fácil?*

Esta foi a semente da idéia e L, desde então, começou a tomar notas e fazer cálculos que não estavam relacionados com o que estudava na escola. Certo dia, ele disse aos pais que estava com uma idéia e que queria escrever sobre ela. Sentou-se à frente do computador e escreveu uma primeira versão, com duas páginas, do que viria a ser, mais tarde, o trabalho aqui descrito.

Já em 2005, na 7ª série, houve por parte da escola a exigência de que todos os alunos dessa série fizessem uma GFS (Gesonderte Feststellung einer Schuelerleistung - Avaliação Excepcional de um Desempenho do Aluno), cujo objetivo é prepará-los para, mais tarde, apresentarem um trabalho em sala de aula, aprofundando um tema. L quis fazer o trabalho que havia começado (ele poderia fazê-lo em qualquer disciplina) e sob a orientação do seu professor de Matemática. Quando perguntado se concordava, o mestre, informado de que era sobre números primos, aquiesceu, apesar de não ser conteúdo da 7ª série.

L passou a semana de férias de outono trabalhando em sua idéia, mas em certo momento teve uma dúvida crucial e novamente enviou uma mensagem:

L - Eu li que Euclides provou que a quantidade de números primos é infinita. Pelo que entendi, ele diz que os números primos não poderiam ser finitos porque sempre seria possível calcular o próximo. Por exemplo, 2, 3, 5 e 7; se estes fossem os únicos primos, logo surgiria alguém para dizer: Ah, mas o 11 também é primo! E assim por diante... Mas eu não entendo porque isso mostra que eles não podem ser finitos. Se existe sempre um primo além desse que foi calculado, por que não precisamos fazer o cálculo para encontrá-lo?

Pela sua pergunta, entendi que ele havia recolhido informações que ainda

---

[1] L. fala e escreve em português, mas já com muitas construções gramaticais da língua alemã, inclusive escrevendo algumas palavras nessa língua. Para facilitar a compreensão do texto, adaptei sua escrita, "traduzindo" alguns trechos.
[2] Referia-me ao teorema que diz: "Se n não é primo, então n possui, necessariamente, um fator primo menor do que ou igual a ."(SANTOS, 1998, p. 12).

não era capaz de elaborar. Tendo trabalhado esse assunto - e a demonstração do teorema atribuído a Euclides - com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de Álgebra, achei que L não estava em um nível de desenvolvimento que lhe permitisse entender a complexidade do argumento.

Assim, escrevi uma resposta-tentativa e nosso diálogo, desenvolvido por meio de vários e-mails, é aqui reproduzido como se fosse contínuo.

H - Vou tentar responder de forma lógica, fazendo uma demonstração "conversada" do teorema de Euclides, está bem? Sabemos que todo número natural maior do que 1, ou é primo ou pode ser decomposto em fatores primos. Por exemplo, 2 é primo, 3 é primo, 4 pode ser decomposto em fatores primos, pois é igual a 2 x 2; 5 é primo, 6 é decomposto em fatores primos, pois é igual a 2 x 3, etc. E quando dizemos isso, dizemos que 6 é divisível por cada um dos fatores primos que o compõem, certo? Com base nisso, vamos provar que existem infinitos números primos. Como você disse, vamos supor que só existam os números primos 2, 3, 5 e 7. Vamos construir um número obtido pelo produto destes, somado com 1, ou seja, o número (2 x 3 x 5 x 7)+1, que é igual a 210+1. Este número é maior do que 1, logo, pela observação acima, ele deve ser primo ou poder ser decomposto em um produto de fatores primos. Se ele puder ser decomposto em um produto de fatores primos, e como aceitamos que só existem os primos 2, 3 , 5 e 7, ele deve ser divisível por algum deles. Vamos supor, por exemplo, que seja divisível por 3; mas 2 x 3 x 5 x 7 também é divisível por 3 , logo, 211 - (2 x 3 x 5 x 7) também é divisível por 3. Você entendeu até aqui?

L - Só não entendi esta última afirmação, que 211 - (2 x 3 x 5 x 7) é divisível por 3!

H - Pense, então, em um exemplo: se 10 é divisível por 2 e 4 é divisível por 2, o que acontece quando fazemos 10 - 4? Obtemos 6, e 6 é divisível por 2, não é mesmo? Poderia provar que, se dois números são divisíveis por um outro, então a diferença entre eles também é divisível por este outro, está certo? Não vou fazer agora porque estou procurando responder a sua outra pergunta. Continuemos, então. O que dá 211 - (2 x 3 x 5 x 7)? Dá 211 - 210, certo? E isso vale 1. Mas então 1 é divisível por 3? Absurdo, não é mesmo? Algo está errado na nossa argumentação, não achas?

L - É, mas nós só pensamos no 3, por enquanto. E os outros números?

H - Ok, então vamos continuar: vamos supor que 211 seja divisível por 2. Você pode repetir comigo o raciocínio?

L - Se 211 é divisível por 2 e como 2 x 3 x 5 x 7 também é divisível por 2, então 211 -(2 x 3 x 5 x 7) é divisível por 2. Mas já vimos que 211 - (2 x 3 x 5 x 7)=1, logo 1 é divisível por 2. Ah, entendi, sempre dá 1, logo não dá para ser divisível por nenhum dos números que nós já pensamos.

H - Pois é, e daí? Daí deve existir mais algum número primo além dos que nós estabelecemos no início. Por exemplo, quem sabe o já citado 11?

L - Espere um pouco, agora eu fiquei com uma dúvida. Você disse: "Se ele puder ser decomposto em um produto de fatores primos, e como aceitamos que só existem os primos 2, 3 , 5 e 7, ele deve ser divisível por algum deles." Mas por que ele não pode ser divisível por mais de um, ou seja, por um produto? Por exemplo, porque não se pode pensar que o 211 é divisível por 2 x 3?

H - Pense um pouco, pegue um número menor para fazer as contas: se estivéssemos pensando no número 31, que é (2 x 3 x 5)+1. Vamos supor que ele seja divisível por 2 x 3, ou seja, por 6. Mas então, como 2 x 3 x 5 (30) também é divisível por 6, então 31 - 30 tem que ser divisível por 6, não é? E temos de novo o número 1! Mesmo que troque os números, por exemplo, pegue 2 x 5 ou 3 x 5, o número 30 vai ser divisível por esses produtos e 31-30 também terá que ser, pela propriedade que eu mencionei antes, certo?

L - Certo, agora entendi! Bom, mas e se o 11 entra na jogada?

H - Daí vamos fazer tudo de novo, repetindo o raciocínio quantas vezes quisermos, e vamos chegar à conclusão de que todas as nossas construções vão levar à afirmativa de que 1 é divisível por algum número maior do que 1, o que é absurdo. Mas de onde partimos para chegar nisso? Da idéia inicial de que só havia um número finito de primos. Portanto, essa idéia inicial é que gera os absurdos, sabe? Daí podemos concluir que ela é absurda, ou seja, existem, mesmo, infinitos números primos.

L - Está certo, entendi. Mas agora eu vou continuar meu trabalho. Se existem, mesmo, infinitos números primos, então eu preciso pensar mais um pouco no que estou fazendo.

Após essa troca de mensagens, pensei que L iria modificar o trabalho (que eu não sabia, ainda, do que se tratava), mas ele se entusiasmou, trabalhou exaustivamente e entregou a primeira versão ao professor.

L enviou-me o trabalho por e-mail e, ao ler, notei que estava além do que eu esperava, pois ele havia "criado" o que chamou de "seu método" para substituir o crivo de Eratóstenes! Surpresa, resolvi, então, voltar ao nosso diálogo, para entender como ele tinha pensado. Muitas das perguntas que lhe fiz foram respondidas com dados coletados por ele na Internet, mas aqui reproduzo a parte principal do trabalho, que evidencia como um aluno de cerca de 12 anos pode, se desafiado pela escola e incentivado pelo professor (a quem admira), produzir um trabalho que, se não acrescentou um novo resultado aos conhecimentos da comunidade matemática sobre números primos - como ele esperava -, com certeza determinou uma potencialização da sua habilidade de desenvolver raciocínios lógicos, o que, independentemente da escolha profissional que fizer no futuro, será importante para a sua vida.

Para começar a conversa, questionei-o especialmente sobre o capítulo em que ele apresenta o seu método; ele inicia mostrando um quadro com 10 colunas e duas linhas, apenas para explicar o crivo de Eratóstenes. Além disso, explicou que existem maneiras diferentes de elaborar o quadro. Por exemplo, conforme representado no quadro 1, a seguir, em que "os múltiplos de 3 estão alinhados verticalmente":

	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**

Quadro 1 - Outra forma de dispor os números naturais para riscar os compostos

Quando vi este quadro, questionei L:

H - Mas 6 é múltiplo de 3 e não está alinhado verticalmente com o 3!

L - Eu me refiro a todas as verticais com múltiplos de 3! Por exemplo, na vertical do 3, só há múltiplos de 3, na vertical do 6, que é múltiplo de 3, também só há múltiplos de 3, etc.

H - Sim, mas eu pergunto se você entende a razão de acontecer isso.

L - Claro, é porque as linhas têm nove números, daí, em cada vertical, soma-se 9 para achar o número seguinte. Como 9 é múltiplo de 3, todos os outros também serão, nas colunas dos múltiplos de 3. Eu poderia fazer uma tabela com os múltiplos de 2 e 3 alinhados na vertical. Provavelmente há tabelas ainda mais práticas, mas elas seriam tão largas que não seria possível reproduzi-las na folha, pois, para uma tabela dessas, em que os múltiplos de 2, 3, 5 e 7 estejam alinhados em colunas, são necessários 210 campos; para uma em que os múltiplos de 2, 3, 5, 7 e 11 estão alinhados...isto eu não consigo calcular de cabeça. Se você quiser saber, pode calcular o mínimo múltiplo comum de 2, 3 , 5, 7 e 11.

Notei que L entendera perfeitamente o processo, inclusive podendo explicar a razão pela qual havia múltiplos de um determinado número dispostos verticalmente e, ainda, calculando o número de campos para cada tipo de quadro sugerido. Para explicar o seu método, L constrói um quadro de cinco linhas e cinco colunas, em que a linha 1 é toda preenchida com o número 1, a linha 2, com o número 2, e assim por diante.

Em seguida, transforma cada número do quadro em uma fração, de forma que os números da 1ª coluna têm denominador 1, os da 2ª coluna têm denominador 2, e assim por diante, como vemos no quadro 2:

1/1	**1/2**	**1/3**	**1/4**	**1/5**
2/1	**2/2**	**2/3**	**2/4**	**2/5**
3/1	**3/2**	**3/3**	**3/4**	**3/5**
4/1	**4/2**	**4/3**	**4/4**	**4/5**
5/1	**5/2**	**5/3**	**5/4**	**5/5**

Quadro 2 - Segunda etapa do método de L

No próximo passo, L troca "cada traço de fração por um sinal de multiplicação e deixa de lado a primeira linha e a primeira coluna." Feitos os cálculos, L obtém o seguinte quadro:

4	**<u>6</u>**	**<u>8</u>**	**<u>10</u>**
<u>6</u>	**9**	**<u>12</u>**	**<u>15</u>**
<u>8</u>	**<u>12</u>**	**16**	**<u>20</u>**
<u>10</u>	**<u>15</u>**	**<u>20</u>**	**25**

Quadro 3 - Resultado obtido ao fazer as multiplicações

Enfim, tomando uma lista de números naturais maiores ou iguais a 2, L elimina dessa lista todos os números que aparecem neste quadro 3. O que resta, segundo ele, são os números primos. Ao notar que ainda apareceriam números compostos, questionei-o e ele respondeu:

L - Eu sei, no final ainda aparecem números não primos, mas quando se estende a tabela inicial para uma com 13 linhas e 13 colunas, este problema está resolvido, pois se encontram os resultados 2x7, 2x9, 3x7, 2x11, 2x12, 2x13, 3x9, 4x7. No entanto, com números maiores haveria a desvantagem da repetição de números. Quando se vê que pouquissimos números não se repetem, é fácil de entender. Para mostrar isso, eu assinalei, no quadro 3, os números que se repetem: eles estão sublinhados.

H - Por que apenas os primos aparecem, depois que você faz a última etapa?

L - Porque numa multiplicação só os números compostos podem surgir como resultado. E aqueles números que não são compostos, são os primos.

Neste momento, notei que L tinha, efetivamente, compreendido o conceito de número primo e número composto. Sua construção, apesar de mais complicada do que o crivo de Eratóstenes, foi uma criação a partir do que ele leu e das poucas explicações que precisou ter. Considero que L estava em um determinado nível de desenvolvimento cognitivo e, não tendo a curiosidade despertada pelos assuntos das aulas, o que compreendia lhe bastava para sair-se bem em Matemática. No entanto, no momento em que surgiu um desafio, o menino entrou em uma zona de desenvolvimento proximal e, apoiado por adultos, atingiu um nível de desenvolvimento superior, adiantando-se, em termos de conhecimentos e habilidades, ao que seria esperado de um aluno naquela série. Da experiência com o trabalho sobre os números primos, acredito que L leva a confiança de que pode construir conhecimentos novos. Para mim, como parceira de diálogo, fica a certeza de que é possível aos alunos, em qualquer nível de ensino, (re)construir o conhecimento matemático, "[...] falível, corrigível e em expansão, como são todos os outros tipos de conhecimento humano." (HERSH, 1979, p. 43).

Considerações Finais

Quando Fossa (2003) comenta que há uma outra maneira de obter o padrão dos números riscados que se vê no crivo de Eratóstenes, ele sugere:

> [...] começamos com 2 e eliminamos cada segundo elemento da lista depois de 2. Verificamos que o próximo número não riscado é 3; assim, riscamos cada terceiro elemento depois de três. Para tanto, contamos os números na lista, mesmo se já foram riscados. (p. 39).

Assim, a idéia do aluno L., de tomar uma lista de números naturais e riscar elementos que são múltiplos de outro (pois o contar cada segundo elemento depois de 2 consiste em eliminar os múltiplos de 2, e assim por diante), é o cerne de qualquer um dos métodos. Ou seja, o propósito é, efetivamente, riscar os números compostos, de forma que os restantes sejam os primos. Esse objetivo foi alcançado por L com o seu método, ainda que ele mesmo tenha se dado conta de que "é pior do que o de Eratóstenes", pois teria que estender os seus quadros e haveria a "desvantagem da repetição de números".

O que há de original, então, no trabalho desenvolvido por L.? Julgo que há alguns elementos a destacar, especialmente pela idade e série em que L. se encontrava quando fez o estudo sobre os números primos. Em primeiro lugar, o interesse pelo tema foi despertado pelo jogo de computador com que ele costumava interagir; em segundo lugar, a possibilidade de desenvolver algo novo foi vislumbrada por ele quando lhe indiquei, por meio de exemplos, o caminho que deveria seguir nos seus testes para saber se um determinado número é primo.

A continuação do trabalho foi apoiada pelo diálogo que mantivemos em nossas mensagens de correio eletrônico e pelas suas buscas na Internet. Acredito que L estava, em termos de cognição, em um "espaço" onde o desenvolvimento estava acontecendo, ou seja, estava em uma zona de desenvolvimento proximal. Com o auxílio do professor, com a mediação dos instrumentos (como o software Mathica e a Internet) e com os diálogos mantidos comigo, em uma certa fase da elaboração do trabalho, L atingiu um nível cognitivo superior, a ponto de conseguir (re)criar um método para descobrir números primos.

A descrição detalhada dos passos seguidos por L. na construção do seu método, bem como as observações sobre o significado de cada pergunta feita a ele e a forma de apresentar a teoria relacionada aos números primos, foram aqui apresentadas para evidenciar a necessidade de proporcionar, a alunos de qualquer nível de ensino, desafios cuja solução exija novos conhecimentos ou habilidades, sendo os recursos tecnológicos excelentes mediadores para que eles alcancem um nível de desenvolvimento cognitivo mais elevado.

Referências

BAIRRAL, Marcelo A. O valor das interacções virtuais e da dinâmica hipertextual no desenvolvimento profissional docente. **Quadrante**, v. 12, n. 2, p. 53-80, 2003.

BORBA, Marcelo de C.; PENTEADO, Miriam G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

CONFREY, Jere. The constructivist. In CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 11., 1987, Montreal. **Proceedings**… Montreal: PME, 1987. p. 307-317.

FOSSA, John A. **Introdução à Teoria Elementar dos Números Primos**. Natal, RN: Cooperativa Cultural da UFRN, 2003.

HERSH, Reuben. Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. **Advances in Mathematics**, n. 31, p. 31-50, 1979.

MATHICA...und Mathematik wird zum Abenteuer. Stuttgart: Heureka-Klett Softwareverlag, 2002. CR-ROM.

SANTOS, José P. de O. **Introdução à Teoria dos Números**. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1998.

SAUER, Laurete Z. **O diálogo matemático e o processo de tomada de consciência da aprendizagem em ambientes telemáticos**. 2004. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio grande do Sul, Porto Alegre, 2004.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

VALENTE, José A. **Por quê o computador na educação**? Disponível em: <http://www.proinfo.mec.gov.br > Acesso em: 13 jul. 2006.