Brincando com a Torre de Hanói e descobrindo fractais: Uma sugestão de atividade para o Ensino Médio

Clarissa Trojack Della Nina
Professora I.E.E. Vasconcelos Jardim - General Câmara/RS e
Colégio Cenecista Carlos Maximiliano - São Jerônimo/RS
Mestre em Educação Matemática pela PUCRS

Resumo
A proposta deste trabalho é relatar uma experiência envolvendo a Torre de Hanói, explorar alguns conteúdos matemáticos, tais como: seqüências numéricas, regra de recorrência, uso compreensivo da calculadora científica, leitura de grandes números, além de levar uma atividade lúdica para a sala de aula e fazer com que os alunos pensem criativamente. O professor que desejar se aventurar um pouco mais pode ainda explorar a idéia de Geometria Fractal com o uso de planilhas eletrônicas, pois nos movimentos dos discos da Torre de Hanói observa-se a auto-semelhança que uma característica dos Fractais.

Palavras-chave: Torre de Hanói - Sugestão de Atividade - Geometria Fractal - Informática na Educação Matemática - Excel

Playing with the Tower of Hanoi and discovering fractals: A suggestion of activity for Secondary School

Abstract
This work aims at giving suggestions of activities which evolve the Hanoi tower, exploring some mathematical contents as numerical sequence, recurring rules, comprehensive use of scientific calculators, reading of large numbers, besides working with playful activity in the classroom in order to make students develop creative thinking. The teacher who wishes to be an adventurer can explore the idea of fractal geometry, using spreadsheets.

Keywords: Tower of Hanoi - Activity - Fractal Geometry - Computers on Mathematic Education - Excel

[1]Integrante do Grupo de Pesquisa: Matemática na Educação. PUCRS - Departamento de Ciências Exatas

Introdução

Brincando com a Torre De Hanói

Este trabalho tem por objetivo levar para a sala de aula atividades que podem ser trabalhadas em várias séries da Educação Básica. Num primeiro momento pode-se contar a seguinte lenda:

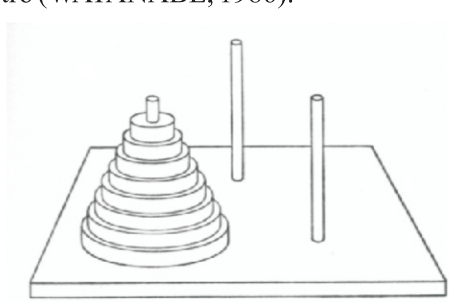
> “Após a criação do mundo, em um mosteiro na Índia, o Grande Criador colocou uma placa de bronze e nela fixou três bastões cobertos de diamantes. Em um dos bastões, em ordem decrescente de tamanho, colocou 64 discos de ouro. E assim disse aos monges:"Transfiram esta pilha de discos para outro bastão, movendo, ininterruptamente, um disco de cada vez e nunca permitindo que um disco maior fique acima de um menor. Quando terminarem essa tarefa e os 64 discos estiverem em outro bastão, este templo se reduzirá a pó e com um estrondo de trovões o mundo acabará" (WATANABE, 1986, p.34).

É claro que essa história é apenas uma lenda, mas serve de motivação para que o professor faça a pergunta: Quando o mundo vai acabar?

O problema está relacionado com um jogo que ficou conhecido como Torre de Hanói que consiste num tabuleiro onde se devem fixar hastes verticais (cilíndricas e iguais), "n" discos (circulares), não havendo dois discos com o mesmo diâmetro. Cada disco tem um pequeno orifício no centro de forma a poder ser enfiado em qualquer uma das hastes. No início do jogo, todos os discos devem ser enfiados na mesma haste por ordem decrescente. O objetivo do jogo é transferir todos os discos de forma a reconstruir a torre numa das outras hastes, obedecendo às seguintes regras:

1.Em cada movimento só poderá ser transferido um disco;

2.Em nenhum dos movimentos poderá o jogador colocar um disco sobre outro de menor diâmetro (WATANABE, 1986).



Depois de explicadas as regras, é distribuído, para cada dupla de alunos, um jogo da Torre de Hanói que pode ser adquirido pela escola, trabalhado no computador ou confeccionado pelos próprios alunos com materiais variados. Deixar os alunos jogarem livremente para que se familiarizem com o mesmo.

Em seguida é proposto aos alunos que respondam as seguintes perguntas: Quantos movimentos, no mínimo, são necessários para mover 1 peça, 2 peças, 3 peças e "n" peças?

Quantos movimentos serão necessários para mover as 64 peças?

Número de discos	**Número de movimentos**
N = 1	$M_1 = 1$
N = 2	$M_2 = 3$
N = 3	$M_3 = 7$
N = 4	$M_4 = 15$
N = 5	$M_5 = 31$
....	....
N = 64	$M_n = ?$

Os resultados obtidos são (1, 3, 7, 15, 31,....) Será que podemos formular alguma lei através desta seqüência?

Muitos alunos depois de algum tempo descobrem a lei, $\mathbf{a_1 = 1}$ e $\mathbf{a_n = 2a_{n-1} + 1}$, para n = 2, 3, 4,..., ou ainda, $\mathbf{a_1 = 1}$ **e** $\mathbf{a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_{n-1} + ... + n}$, para n = 2, 3, 4,... Mas o problema continua... Quantos movimentos são necessários para mover 64 discos? Com as leis formuladas acima, necessitamos saber o número anterior de movimentos, ou seja, 63 discos. Ainda é muito difícil. Será que existe uma outra lei que não necessite do número de movimentos dos discos anteriores?

Observando a segunda coluna da tabela vemos que seus números são uma unidade a menos que a seqüência (2, 4, 8, 16, 32, ...) ou seja, (2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5,...) o que nos leva a fazer a seguinte conjectura[2] :

$\mathbf{M_n = 2^n - 1,}$ onde "n" é o número de discos da torre

Consideremos que esta sentença seja verdadeira sempre!

[2]Uma conjectura é uma opinião sem fundamentação precisa, uma suposição, ou ainda uma hipótese. Para mostrar que uma conjectura envolvendo números naturais é falsa, basta encontrar um contra-exemplo. Se não achamos nenhum contra-exemplo e suspeitando de que é verdadeira, uma possibilidade é tentar demonstrá-la através da Indução Matemática.

Isto significa que 264 -1 é o número de movimentos que os monges terão que fazer para mover toda a torre. Fazendo este cálculo com auxilio de uma calculadora científica obtemos **1.8446744 19**.. O que significa o ponto? E aquele 19 afastado? É uma boa oportunidade de explicar aos alunos que o ponto quer dizer vírgula e, como o número é muito grande não cabe no visor da calculadora, por isto a notação científica. Significa que existem 19 algarismos depois do ponto.Se utilizarmos a calculadora do computador, que tem um visor maior, encontraremos o número **18446744073709551615** que permite descobrir o número exato de movimentos.

Como lemos este número?

Dezoito quintilhões, quatrocentos e quarenta e seis quatrilhões, setecentos e quarenta e quatro trilhões, setenta e três bilhões, setecentos e nove milhões, quinhentos e cinqüenta e um mil, seiscentos e quinze.

Com um pouco mais de Matemática vamos calcular quanto tempo isto vai levar. Suponhamos que os monges demorem em torno de 1 segundo para mover cada peça. Quer dizer que eles levarão 264-1 segundos para transferir as 64 peças.

Quantos segundos têm um ano?

1 minuto = 60 segundos
1 hora = 60 minutos
1 dia = 24 horas
1 ano = 365 dias

Logo, 60 x 60 x 24 x 365 = **31.536.000 segundos** que também será o número de movimentos por ano, pois os monges demoram 1 segundo para movimentar cada peça. Vale lembrar que alguns alunos podem questionar que um ano tem 365 dias e 6 horas. Se isso acontecer, podemos ainda acrescentar às 6 horas.

Quantos anos os monges levaram para transferir as 64 peças?

$$\frac{\text{Número total de movimentos}}{\text{Número de movimentos por ano}} = \frac{264 - 1}{31.536.000} = \textbf{584.942.417.355 anos}$$

Quase 585 bilhões de anos. Os cientistas afirmam que a idade do Sistema Solar é de aproximadamente 4 bilhões de anos, isto quer dizer que faltam 581 bilhões de anos para que os monges terminem sua tarefa - isto supondo que eles não errarão no caminho. Significa que não veremos o mundo acabar tão cedo!

Muitos trabalhos (SLOMP, 2006; SHINE, 2006; WATANABE, 1986; WIKIPÉDIA, 2006) envolvendo a Torre de Hanói param neste tipo de exploração. Porém, ainda é possível criar outras situações, por exemplo:

• Quantas peças uma pessoa que vive 80 anos poderia transferir se iniciasse este trabalho aos 10 anos de idade sem nunca parar?

• Quantas pessoas aproximadamente seriam necessárias para mover os 64 discos se cada uma delas iniciasse aos 10 anos de idade e fosse movendo discos até os 80 anos?

Atividades como esta, também podem ser trabalhadas utilizando os recursos computacionais, pois existem vários endereços na Internet em que pode ser copiado o jogo, tais como: www.npd.ufes.br/hanoi/default.htm; www.usinadejogos.com.br/torre.html e outros. Para saber sobre a utilização da Torre de Hanói na formação inicial de professores de matemática com o foco no aprendizado mediante a escrita, sugiro a leitura de Bairral (2001).

Descobrindo Fractais

Até aqui não há grandes novidades! A novidade está quando é percebida a existência de Fractais nos movimentos dos discos da Torre de Hanói. Para os professores que desejam se aventurar um pouco mais, é uma excelente oportunidade de apresentar aos alunos a idéia de Fractal.

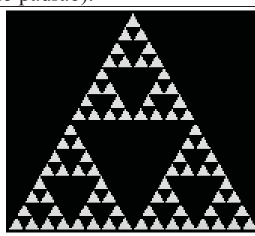
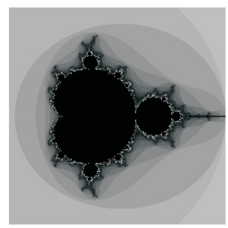
Fractal é um assunto que aos poucos está sendo inserido no currículo escolar, alguns livros didáticos já apresentam o assunto, assim como em eventos de Educação Matemática este tema também está sendo tratado de forma freqüente. Os professores estão percebendo que já não é possível se falar somente em Geometria Euclidiana, pois como nos coloca Mandelbrot, o pai dos Fractais: "Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas costeiras não são círculos, cascas de árvores não são suaves nem o raio se propaga em linha reta". Nesta afirmação percebe-se que é preciso pensar em uma outra geometria, pois os elementos citados apresentam formas diferentes das trabalhadas na Geometria clássica.

O termo fractal surgiu do latim fractus, que significa irregular ou quebrado, como o próprio Mandelbrot disse: "Eu cunhei a palavra fractal do adjetivo em latim fractus. O verbo em latim correspondente frangere significa quebrar: criar fragmentos irregulares, que, além de significar quebrado ou partido, fractus também significa irregular".

Em outras palavras, Fractal é um objeto que não perde a sua definição formal à medida que é ampliado, mantendo a sua estrutura idêntica à original. A característica fundamental dos Fractais é a auto-semelhança, a complexidade infinita e a sua dimensão. Conforme Della Nina e Silva (2005):

> “Os fractais são estruturas geométricas de grande complexidade e beleza infinita, ligada às formas da natureza, ao desenvolvimento da vida e à própria compreensão do universo. São imagens de objetos abstratos que possuem o caráter de onipresença por terem as características do todo, infinitamente multiplicadas dentro de cada parte, escapando assim, da compreensão em sua totalidade pela mente humana".

Existem duas categorias e fractais: os geométricos, que repetem continuamente um modelo padrão; e os aleatórios, que são feitos através dos computadores. Por exemplo:

Fractal Geométrico - Triângulo de Sierpinski (repete infinitamente um modelo padrão).	Fractal Aleatório - Conjunto de Mandelbrot (gerado em computador)
	

Figuras retiradas do site "O mundo dos Fractais" em 06 jan. 2007

Para obter um Fractal Geométrico com os movimentos dos discos da Torre de Harói, numere cada um deles. O menor será o um, depois o dois e assim por diante. Anote a ordem em que os mesmos vão sendo movidos. Percebe-se claramente a existência de autosemelhança.

A pergunta é: Como ficariam estas seqüências se colocadas em gráficos?

Para responder a esta pergunta foi utilizado o computador. De acordo com Della Nina (2005):

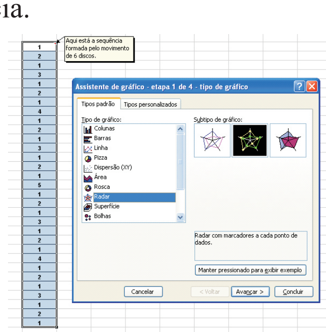
> Para obter um Fractal Geométrico com os movimentos dos discos da Torre de Harói, numere cada um deles. O menor será o um, depois o dois e assim por diante. Anote a ordem em que os mesmos vão sendo movidos. Percebe-se claramente a existência de autosemelhança.
>
> A pergunta é: Como ficariam estas seqüências se colocadas em gráficos?
>
> Para responder a esta pergunta foi utilizado o computador. De acordo com Della Nina (2005):

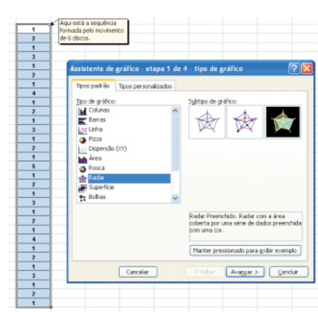
A utilização adequada e inteligente de novas tecnologias, mais precisamente o computador, surge como uma maneira de mudar a metodologia com atividades inovadoras, criativas, desafiadoras e de reconstrução de conhecimento. Ajudam a facilitar a passagem de um modelo tradicional de ensino para um modelo instigante e com autonomia. Tais recursos permitem ao aluno conectar conhecimentos, que do modo tradicional permaneceriam separados, mas, interligados geram conhecimentos mais amplos e completos, além do visual. "Cabe destacar que a visualização tem ocupado posição de destaque nos estudos referentes à associação do computador ao ensino da Matemática". (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004 p. 225).

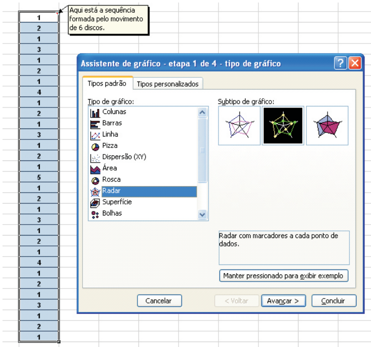
É cada vez mais forte a ligação entre Informática e Educação Matemática. Maltempi (2004) conta que Seymour Papert, com base em idéias de Piaget, na década de 60, deu início a um conjunto de idéias que hoje é chamado de Construcionismo e estuda o desenvolvimento e o uso da tecnologia, mas especificamente o computador, na criação de ambientes educacionais. O Construcionismo oportuniza uma educação contextualizada por meio da tecnologia. O aluno trabalha na construção de produtos que são significativos e de conhecimentos que podem ser compreendidos e aplicados, além de viabilizar a criação de situações mais ricas e adequadas para a construção do conhecimento. Existem diversas ferramentas computacionais que podem ser consideradas construcionistas, se forem utilizadas de maneira correta. O autor exemplifica citando: o uso de processadores de texto, planilhas eletrônicas (Excel) ou qualquer outro ambiente que favoreça a aprendizagem ativa.

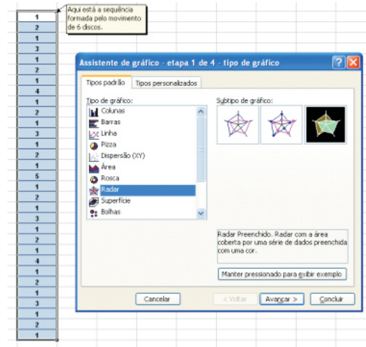
A pergunta continua: Como ficariam as seqüências dos discos da Torre de Hanói se colocadas em gráficos? Vários tipos de gráficos podem ser confeccionados no software Excel, mas nenhum mostra os Fractais de forma surpreendente, até que se utilize o gráfico de radar. Veja o que acontece:

Coloque a seqüência de movimentos em uma coluna do Excel. Selecione esta coluna e vá ao menu inserir - gráfico. Escolha radar como tipo de gráfico e depois escolha o terceiro subtipo de gráfico, em seguida, avançar, novamente avançar. Elimine os eixos dos valores (Y), linhas de grade, legenda e por último selecione os números e delete. O fractal está pronto! Escolha uma cor de sua preferência.









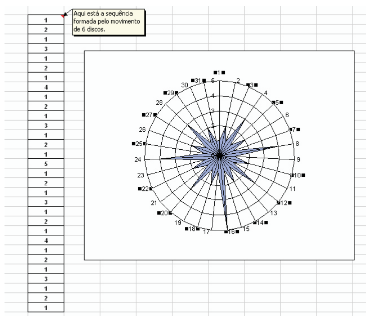
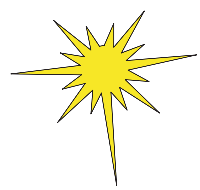


Gráfico com o movimento de 5 discos



Esse é o desenho formado com o movimento de cinco discos. Não é interessante?

Com um disco temos a seqüência de 1 movimento:
(1)
Com dois discos temos a seqüência de 3 movimentos:
(1,2,1)
Com três discos temos a seqüência de 7 movimentos:
(1,2,1,3,1,2,1)
Com quatro discos temos a seqüência de 15 movimentos:
(1,2,1,3,1,2,1,4, 1,2,1,3,1,2,1)
Com cinco discos temos a seqüência de 31 movimentos:
(1,2,1,3,1,2,1,4,1,2,1,3,1,2,1,5,1,2,1,3,1,2,1,4,1,2,1,3,1,2,1)

Observem que em cada nova seqüência, é repetida a anterior, acrescida de mais um disco e novamente a seqüência anterior. Com essas seqüências foi possível construir os seguintes gráficos:

Gráfico com o movimento de 2 discos

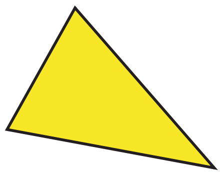


Gráfico com o movimento de 3 discos

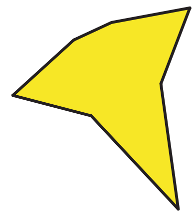


Gráfico com o movimento de 4 discos

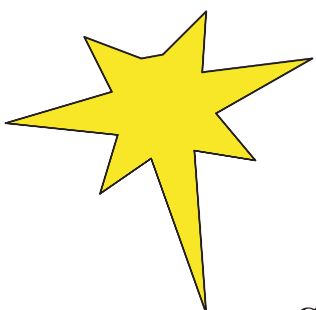
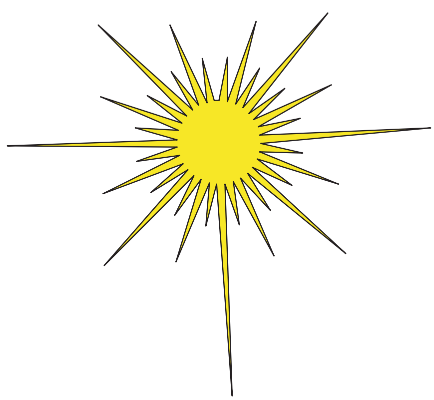


Gráfico com o movimento de 5 discos

Gráfico com o movimento de 6 discos



Podemos perceber que a cada nova iteração a ponta maior da estrela é o movimento do disco "n-ésimo". Quer dizer que cada nova estrela tem em sua metade os movimentos da estrela anterior. Este estudo está apenas no início, acreditamos que outras descobertas possam ser feitas. Fica então o registro e a sugestão para que outros colegas também se aventurem em pesquisas com a Torre de Hanói e os Fractais.

Considerações Finais

Percebemos que nos últimos tempos, muitos educadores matemáticos têm lançado mão de atividades que tornam suas aulas mais motivadoras e prazerosas para si, e seus alunos. Surgiram várias ferramentas, metodologias, estratégias para alcançar este objetivo, entre eles o uso de jogos e os recursos computacionais.

Nessa experiência usamos o jogo da Torre de Hanói que agora mais que um jogo, se tornou um material concreto e facilitador do aprendizado de Matemática. Mesmo que num primeiro momento os alunos pensem que vão apenas "brincar", a Torre de Hanói se torna mais que um jogo. É possível abordar vários conteúdos matemáticos, mas ao mesmo tempo, os alunos, não percebem que estão relembrando ou aprendendo conteúdos novos.

Atividades como estas instigam a conexão com outros ramos da Matemática como os Fractais, outro assunto novo para muitos, mas que na verdade deve ser apresentado. Como é um assunto bastante complexo, o computador se faz um grande aliado, pois consegue mostrar com rapidez a ligação entre vários assuntos.

Se não tivéssemos utilizado o computador, provavelmente não teríamos tido tempo ou paciência para a confecção de diferentes tipos de gráficos até encontrar o modelo adequado, que transformou a seqüência do movimento de discos da Torre de Hanói em lindos Fractais geométricos em forma de estrelas.

Acreditamos que muitas atividades inovadoras podem ser criadas baseadas em outras já existentes. Como bem diz Garbi (1997):

> “Dificilmente alguém que lhe tenha sido apresentado permanece indiferente à Matemática. Ao contrário, e isto costuma acontecer já no início da vida escolar, as pessoas desenvolvem por ela um dentre dois tipos de sentimentos opostos: paixão, da parte de uma minoria, ou aversão, da parte da maioria". (p. xiii)

Infelizmente, a maioria dos estudantes não tem oportunidades de ser apresentados a essas outras facetas da Matemática como a descrita acima. Por isso, é tarefa de nós, educadores, oportunizarmos atividades diferenciadas e fazermos com que mais pessoas se apaixonem pela mesma. Atividade como a descrita coloca em questionamento as formas tradicionais de Educação, assim como a produção de conhecimento e o desenvolvimento profissional dos professores.

Referências

BAIRRAL, Marcelo Almeida, Movendo discos, construindo torres e matematizando com futuros professores. **Boletim GEPEM**, n. 38. fev. 2001, p.95-11.

DELLA NINA, Clarissa T. **Modelagem Matemática e Novas Tecnologias: uma alternativa para a mudança de concepções em matemática**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Faculdade de Química, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2004.

DELLA NINA, Clarissa T; SILVA Mercedes M. Fractais na vida das pessoas. In: ENCONTRO REGIONAL DE ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUL, 11., 2005, Santa Maria. **Anais...** Santa Maria: UNIFRA, 2005.1 CD-ROM

GARBI, Gilberto G. **O romance das equações algébricas**: A história da álgebra.São Paulo:Makron Books, 1997.

O mundo dos Fractais. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/index.htm >Acesso em: 06 jan. 2007

ONUCHIC, Lourdes de la R., ALLEVATO, Norma S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO Maria A. V., BORBA, Marcelo de C. (Org.) **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

POLYA, George. **Como resolvê-lo**. 1990. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/polya_solveit/traducaocoment.htm> Acesso em: 10 jun 2005.

SHINE, Carlos Yuzo **A Torre de Hanói**. Disponível em:<www.obm.org.br/eureka/artigos/hanoi.pdf> Acesso em 25 jul 2006

SLOMP, Paulo Francisco. **A Torre de Hanoi - Jean Piaget**. Disponível em:< http://www.ufrgs.br/faced/slomp/edu01136/hanoi.htm> Acesso em: 25 jul 2006

WATANABE, Renate. Vale para 1, para 2, para 3,... Vale sempre? **Revista do professor de Matemática**.. Vol.9. SBM. São Paulo, 1986.

Wikipédia. **Torre de Hanoi**. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Torre_de_Hanoi> Acesso em: 25 jul 2006.