A História da Matemática na Educação Matemática de Futuros Professores: O Problema das Quadraturas[1]

Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Professora, UEL
emcyrino@sercomtel.com.br

Júlio Faria Corrêa
Mestrando, UEL
Bolsista Capes
juliofc13@gmail.com

Resumo
Reaver os caminhos trilhados pela humanidade na constituição dos objetos matemáticos, analisando criticamente as trajetórias percorridas, pode, não somente, ampliar o campo de visão a cerca de sua realidade, como também possibilitar uma (re)significação do modo como o homem a concebe. Nesse momento em que os cursos de licenciatura em Matemática estão em processo de implementação de seus projetos políticos pedagógicos, consideramos que é indispensável buscar momentos nos quais os futuros professores possam conhecer, entender e refletir sobre o modo pelo qual a matemática foi produzida ao longo da história da humanidade. Desse modo, nesse artigo apresentamos alguns aspectos do desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de área e uma proposta de trabalho, que pode ser desenvolvida com alunos do curso de licenciatura em Matemática, a fim de discutir como se desenvolveu o conceito de área por meio da história do cálculo, por um processo conhecido como "problema das quadraturas".

Palavras-Chaves: História da Matemática, formação de professores, área, problema das quadraturas, Educação Matemática.

The History of Mathematics in the Mathematical Education of future Teachers: The Problem of the Quadratures

Abstract
Recovering the paths trod by humanity in the constitution of mathematical objects, and critically analyzing the tracked trajectories, may not only enlarge the field of view of its reality, but also make possible a (re) significance of the way that mankind conceives it . At this moment when the Mathematics Licentiate courses are in process of implementation of their political pedagogical projects, we consider that it is indispensable to search for moments in which the future teachers can know, understand and reflect on the way that mathematics was produced in the course of human history. Therefore, in this article we present some aspects of the historic-epistemological development of the concept of the area and a work proposal, which can be developed with the pupils of the course of licentiate in Mathematics, in order to discuss how the concept of the area was developed by means of the history of calculus, by a process known as "the problem of quadratures".

Keywords: History of Mathematics, Teacher's Education, area, problem of the quadratures, Mathematical Education.

---
[1] Apoio: Fundação Araucária e FAEPE/UEL.

Introdução

Investigar os caminhos trilhados pela humanidade na constituição dos objetos matemáticos, analisando criticamente as trajetórias percorridas, as dificuldades encontradas, as alternativas tomadas em vista destas, os erros e acertos, ou seja, as formas com as quais o homem ao longo de sua história construiu e se apropriou de artefatos e mentefatos, conhecimentos e construtos, pode, não somente, ampliar o campo de visão acerca de sua realidade, como também possibilitar uma (re)significação do modo como o homem a concebe. A história da humanidade é uma rica fonte que podemos fazer uso, visto que por meio dela podemos entender um pouco melhor a situação na qual se encontra a humanidade e buscar energias para melhorar o futuro, na perspectiva de uma nova ética, que é a ética da vida (CYRINO, 2003).

A história da matemática pode revelar a sua potencialidade pedagógica na medida em que a utilizamos na busca de produzir significados para conteúdos matemáticos. O campo de investigação promissor nessa busca caracteriza-se como a *História da Matemática na Educação Matemática*.

É possível, por meio da História da Matemática na Educação Matemática, estudar as implicações da história nas práticas pedagógicas, sob diferentes perspectivas teóricas. Em uma dessas perspectivas busca-se investigar as relações – por meio de análises histórico-epistemológicas – entre os "caminhos trilhados" e os que estão sendo construídos. Realçar as interfaces entre estes dois contextos pode modificar qualitativamente a educação matemática de futuros professores.

Nos últimos anos, vários autores vêm se dedicando à construção de propostas didáticas fazendo uso da história da matemática. No campo de investigação História na Educação Matemática Miguel e Miorim (2004) discutem algumas perspectivas teóricas[2] constituídas ou em construção. Entretanto, esses autores revelam uma limitação no que diz respeito a estas perspectivas. Muitas vezes elas não vão além do terreno restrito da História da Matemática propriamente dita. Assim, estudos que busquem na História da Matemática a realização de projetos em Educação Matemática (enquanto campo de pesquisa), formação de professores ou na educação matemática escolar são de extrema importância para o quadro educacional brasileiro.

Gaspar (2003), em suas análises acerca da formação de professores, relata que ainda hoje futuros professores de Matemática não têm consciência da contribuição que a história da matemática pode oferecer para sua formação. A história da matemática pode contribuir tanto para a compreensão da matemática como para ação pedagógica desses futuros professores. A compreensão do modo

[2] Sobre essas perspectivas teóricas ver: MIGUEL, A.; MIORIM, M.A. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

como foram constituídos os conceitos matemáticos pode interferir no entendimento das relações matemáticas e nas possíveis formas de encaminhamento desses conceitos em sala de aula.

Além disso, consideramos que a história da matemática pode colaborar, dentre outros aspectos, na organização do currículo, no desenvolvimento de uma abordagem multicultural, no resgate da identidade cultural, bem como no modo de conceber a natureza da matemática.

Baroni, Teixeira e Nobre (2004) afirmam:

> [...] nas pesquisas em que se trata da presença implícita da história o professor passa ver a matemática como um processo contínuo de reflexão e progresso, ao invés de uma estrutura definida e composta de verdades irrefutáveis [...] tida como um movimento entre diferentes modos de pensamentos (p. 168).

Na discussão sobre a natureza da matemática entram em jogo as concepções e crenças dos professores a respeito do que seja matemática e conseqüentemente dos seus processos de ensino e de aprendizagem. Acreditamos que o modo como o professor concebe a matemática influência no modo como ele a ensina e desta forma consideramos de extrema relevância discutir a natureza da matemática, questões históricas e o desenvolvimento da matemática ao longo do tempo. “[...] as controvérsias acerca do ensino da Matemática dificilmente serão resolvidas sem se refletir sobre a natureza da matemática e da produção do saber matemático” (PONTE, 1997, p.25).

Investigar o desenvolvimento histórico-epistemológico de conceitos matemáticos pode evidenciar a influência do mesmo no ensino e na aprendizagem da matemática. As conseqüências desse processo permeiam a legitimidade dos significados produzidos pelos atores (professor e alunos) da cena educacional e também o que eles entendem e concebem por matemática e de como ensiná-la. A questão da concepção, crenças, do professor frente à matemática por ele concebida e a ser ensinada, interfere no aprendizado dos alunos e no que os mesmos irão entender por matemática.

Propostas didáticas embasadas na história da matemática que busquem explicitar “idas” e “vindas”, acertos e erros, os “porquês” e os “pra quês”, podem fornecer informações que promovam reflexões sobre o contexto geral de um conteúdo, do seu desenvolvimento ao longo da história, e oferecer uma visão mais ampla da construção deste conteúdo e do entendimento de como a matemática foi se estruturando e se desenvolvendo. Ou seja, uma busca da produção de significados dos conteúdos[3].

[3] Usamos o termo produção de significados segundo Lins 2001, The Production of Meaning for Álgebra. In: Perspectives on School Álgebra. SUTHERLAND, R; ROJANO, T.; BELL A. & LINS, R. (eds). Dordrecht: Kluwer.

Na formação inicial de professores de Matemática poucas vezes, a não ser na disciplina de História da Matemática, os professores fazem uso da história nas aulas (Cálculo, Análise Real ou Álgebra Linear). Na grande maioria das Licenciaturas em Matemática, permeia uma concepção de matemática na qual o importante são somente os resultados, as relações entre os objetos matemáticos e as propriedades dos mesmos. Se perguntarmos para um graduando o que é integral ou o que é derivada, dificilmente ele dará outra resposta a não ser a seguinte: "Eu apenas sei fazer, nunca me disseram o que é, muito menos o porquê de aprender, o pra quê aprender e muitíssimo menos como foi o desenvolvimento histórico-epistemológico de tal conteúdo".

Tais considerações revelam que muitas vezes nesses cursos não há uma preocupação com o significado dos conceitos veiculados, assim podemos notar que nas "pseudos-licenciaturas" permeia uma concepção de matemática *internalista* na qual seus objetos têm uma natureza *simbólica* (LINS, 2004).

Nesse momento em que os cursos de Licenciatura em Matemática estão em processo de reestruturação, consideramos que é indispensável, nas discussões sobre currículo, buscar momentos nos quais os futuros professores possam conhecer, entender e refletir sobre o modo pelo qual a matemática foi produzida e constituída ao longo da história da humanidade, nas diferentes culturas.

> Não se trata simplesmente de uma reestruturação da grade curricular, tão pouco de alterar a metodologia utilizada pelos professores que trabalham na formação. Trata-se de rever a concepção de formação de professores e, conseqüentemente, a sua prática pedagógica (CYRINO, 2005, p.53).

Desse modo, seria interessante buscar uma formação em que os futuros professores pudessem vivenciar, refletir e se conscientizar de que a produção/difusão de conhecimentos é um processo que envolve transformação, criatividade, criticidade, liberdade solidária e participação ativa na constituição dos saberes.

Nesse artigo relatamos um levantamento histórico-epistemológico do conceito de área por meio um processo conhecido como "problema das quadraturas" e apresentamos uma proposta de trabalho que pode ser desenvolvida com futuros professores de Matemática. Esta proposta pode contribuir para uma (re)significação do conceito de área por meio do estudo da análise histórico-epistemológica apresentada.

Alguns aspectos do desenvolvimento histórico e epistemológico do conceito de área

Ao iniciarmos o estudo da história do conceito de área uma primeira questão surgiu: quais são os primeiros registros deste conceito na história?

Esta resposta não pode ser dada com precisão, pois desde tempos anteriores aos povos babilônios e egípcios já eram utilizadas formas geométricas em decorações de cerâmicas, ferramentas, utensílios e jóias (BARON, 1985), e existem poucos registros históricos anteriores a estes povos.

Acredita-se que os babilônios (c.a. 2000 a.C. a 1600 a.C.) deveriam estar familiarizados com as regras gerais para o cálculo de áreas de várias figuras geométricas (retângulos, triângulos,...), e também para o cálculo do volume de alguns sólidos. Os papiros de Moscou e Rhind trazem fórmulas de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terras e volumes de grãos.

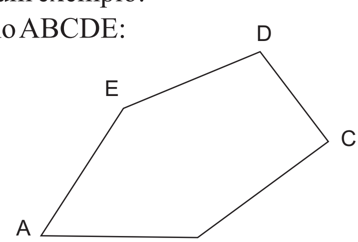
Importante ressaltarmos que nesse período os povos não possuíam fórmulas de áreas, mas sim regras de cálculo das mesmas, ou seja, a matemática aqui utilizada era essencialmente empírica, para solucionar problemas do cotidiano, não havia preocupação em saber o porquê das regras funcionarem, bastava que funcionassem.

Com a decadência dos impérios babilônio e egípcio, e ascensão dos gregos, muitas mudanças sociais e culturais aconteceram. Alguns gregos começaram a se questionar quanto à inteligibilidade do universo e a razão das coisas serem o que são. Provocando assim um grande desenvolvimento da matemática.

Na história do cálculo, já com os matemáticos gregos, podemos encontrar algumas tentativas de se calcular a área de regiões delimitadas por curvas; comprimento de curvas e volumes delimitados por superfícies curvas, problemas que hoje são resolvidos pelo cálculo integral. Estas questões começaram a ser pensadas no quinto século a.C. e deram origem ao problema das quadraturas.

O problema das quadraturas consiste em: dada uma figura poligonal plana, ou curva plana, encontrar um quadrado de mesma área. No que segue, quando desenharmos uma figura que tenha a mesma área da figura dada, diremos que a estamos *transformando* em uma figura equivalente. Diremos também que *quadrar* uma figura é transformá-la em um quadrado equivalente. Quando isso for possível, utilizando apenas régua sem graduação e "compasso euclidiano", diremos que a figura é quadrável. Eis um exemplo:

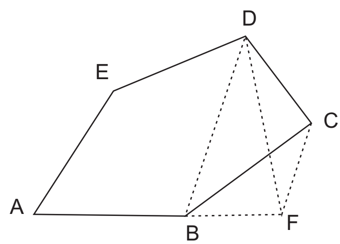
Dado o polígono ABCDE:



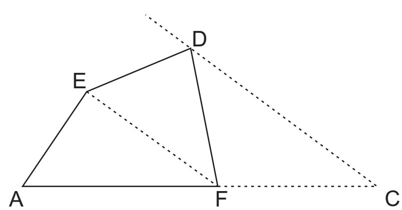
Apenas com o uso de uma régua sem escala, e um compasso (como os gregos exigiam que se fizesse), vamos transformá-lo em um quadrado de mesma área.

Traça-se uma reta que passe por um dos vértices, C, e seja paralela a reta que passa pelos dois vértices adjacentes a ele, BD, encontrando assim o ponto F AB, pertencente à reta suporte de um dos lados adjacentes aos vértices B ou D.

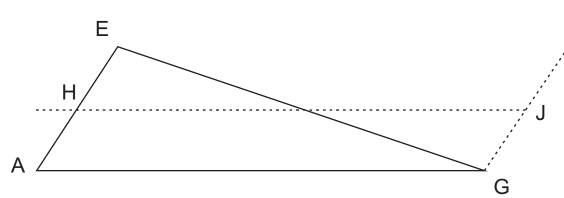
Como as áreas dos triângulos BCD e BFD são iguais, podemos construir o novo polígno ABFDE equivalente ao polígono ABCDE.



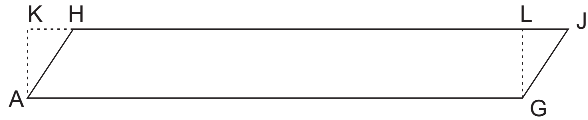
O mesmo será feito com uma reta paralela a FE passando por D, para se encontrar o ponto G. Então Δ FDE é equivalente ao Δ FGE. O polígono ABCDE fica transformado no triângulo AGE.



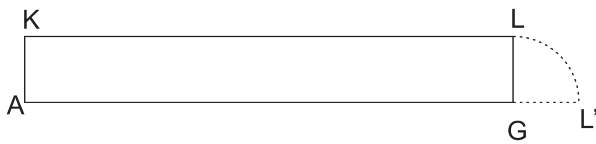
Construiremos a partir deste triângulo um paralelogramo de mesma área AGJH. Para isso traçamos uma paralela a AG, passando pelo ponto médio de EG, e outra paralela a AE passando por G, obtemos o ponto J.



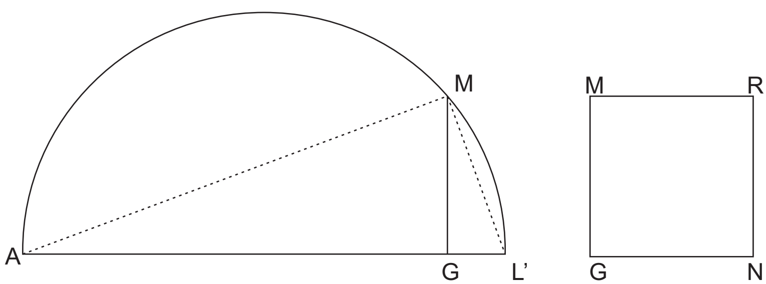
A partir desse paralelogramo obtemos o retângulo AGLK por construção de perpendiculares em A e G.



A área desse retângulo, que é equivalente à área do polígono ABCDE, é dada pelo produto AGxGL. Para obtermos o lado GM do quadrado de mesma área que esse retângulo determinamos a média geométrica dos segmentos AG e GL', ou seja, na linguagem atual, utilizando-se as relações métricas em um triângulo retângulo AGxGL'= $(GM)^2$. Essa média pode ser obtida por meio da altura do triângulo retângulo AML'. Ou seja, prolonga-se AG até L' de modo que GL=GL'. Desenha-se assim, o quadrado GMRN.



Assim, desenha-se o semicírculo AML' cujo diâmetro seja AL'. Se prolongarmos GL do retângulo até que ele encontre o semicírculo determinaremos M. GM será o lado do quadrado GMRN.



Portanto o polígono ABCDE é equivalente ao quadrado GMRN

Três problemas geométricos, que foram estudados pelos matemáticos gregos, ficaram famosos na tentativa de, apenas com régua (sem escala) e compasso, construir:

1º) um cubo de volume igual ao dobro do volume do outro cubo dado; este problema é conhecido como "duplicação do cubo".
2º) um ângulo igual a um terço de um ângulo dado; "trissecção do ângulo".
3º) um quadrado de área igual à de um círculo dado; "quadratura do círculo".

Apresentaremos, a seguir, um estudo do problema da quadratura do círculo, que acabou influenciando o desenvolvimento da integração.

A quadratura do círculo

Segundo Plutarco, Anaxágoras de Clazomene ocupou-se com a tentativa de quadrar o círculo, enquanto esteve preso, acusado de impiedade, ao asseverar que o Sol não era uma divindade e que a Lua era uma terra habitada que emprestava sua luz do Sol. Anaxágoras foi um filósofo da natureza, mais do que um matemático, mas tomou parte de algumas questões matemáticas.

Um pouco mais jovem que Anaxágoras, Hipócrates de Quios (430 a.C.), que foi descrito por Eudemo (350 a.C.), estudou a quadratura das lúnulas[4] que deu origem ao problema da quadratura do círculo. Na história da matemática, segundo Boyer (1998), Hipócrates foi o primeiro a demonstrar, pelo método indireto, a quadratura do círculo, teorema que se encontra com detalhes em Euclides, XII,2.

O teorema diz que: as áreas de círculos estão entre si como o quadrado de seus diâmetros.

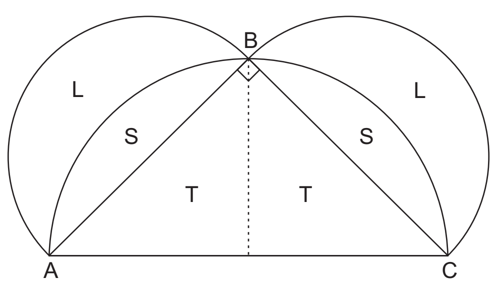
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

Hipócrates em seus trabalhos, pelas informações que temos, parece que avançou em provar que algumas lúnulas são quadráveis e outras não. Podemos citar dois de seus trabalhos:

1º) Dado um triângulo retângulo isósceles ABC inscrito em um semicírculo de diâmetro AC, provemos que as lúnulas (L), geradas pelos semicírculos cujos diâmetros são os catetos AB e BC, são quadráveis.

Do M_1, temos:

$$\frac{\text{semicírculo (AB)}}{\text{semicírculo (AC)}} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{1}{2}$$



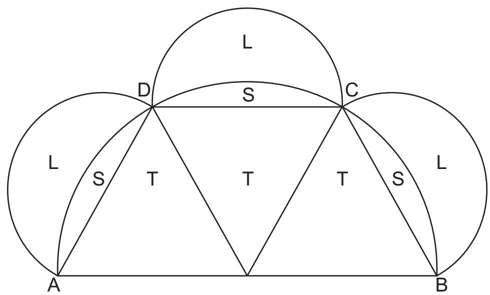
Como $AB = BC$, e ABC é um triângulo retângulo $AC^2 = AB^2 + BC^2$, então $AC^2 = 2\,AB^2$ e $\frac{AB^2}{AC^2}\ \frac{1}{2}$. Assim usando as notações da figura para as áreas, tem os:

[4] Uma luna, ou lúnula, é uma figura limitada por dois arcos circulares de raios diferentes (BOYER, 1998, p.94).

$$\frac{1}{2} = \frac{\text{semicírculoAB}}{\text{semicírculoAC}} = \frac{L+S}{2(S+T)}$$. Então, L+S = S+T e L=T

Portanto a lúnula é quadrável, pois sua área é equivalente a do triângulo T, que também é quadrável.

2º) Dado um hexágono regular inscrito em um círculo, traçaremos semicírculos com diâmetros em seus lados e verificaremos se as lúnulas L são quadráveis ou não.



Temos que AD = DC = CB = (1/2)AB, e

$$\frac{\text{semicírculo (AD)}}{\text{semicírculo (AB)}} = \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{1}{4}$$, assim

$$\frac{L+S}{3(S+T)} = \frac{1}{4}$$ em que 4L + 4S = 3S + 3T

Logo 3T = 4L + S, S = 3T - 4L

Assim, se a lúnula for quadrável, o semicírculo também o será. Mas Hipócrates nunca provou que esta lúnula é quadrável.

O estudo sobre a quadratura do círculo foi continuado por Arquimedes que utilizou o método da exaustão de Eudoxo (não por régua e compasso), para demonstrar que "a área de qualquer círculo é igual à área de um triângulo retângulo, no qual um dos lados, partindo do vértice cujo ângulo é reto, é igual ao raio, e o outro é igual à circunferência do círculo" (BARON, 1985, v.1, p.34). Sendo assim, já que podemos quadrar um triângulo, ficaria provado, por conseqüência, a quadratura do círculo, desde que soubéssemos construir, com régua e compasso, um segmento igual ao da circunferência.

Segundo Eves (2004), o método da exaustão:

> [...] admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição: *Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor*

> *do que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie* (p. 419).

Apresentaremos, a seguir, uma proposta didática para o estudo do conceito de área por meio da quadratura e da demonstração de Arquimedes em um curso de Licenciatura em Matemática.

Uma proposta para o trabalho com área do círculo na educação matemática de futuros professores

Segundo Cyrino (2006) os cursos de formação de professores devem renunciar à idéia de repartir o tempo disponível somente entre as disciplinas.

> A instituição de tempos e espaços curriculares diferenciados pode contribuir para que as práticas cognitivas e organizativas do futuro professor não se desvinculem do contexto histórico no qual aquele se forma e onde ocorrem suas constantes evoluções. Estes espaços diferenciados podem ser: oficinas, seminários, grupos de trabalhos supervisionados, grupos de estudos, tutorias e eventos, exposições e debates de trabalhos realizados, atividades culturais, dentre outros (CYRINO, 2006, p.85).

Desse modo, acreditamos que a presente proposta poderia ser desenvolvida em algum desses espaços diferenciados com o objetivo de fornecer informações, promover discussões e reflexões na busca produzir significados sobre o conceito de área, e particularmente a área do círculo.

Sugerimos que o trabalho seja desencadeado com a apresentação por escrito, aos estudantes, do texto descrito anteriormente nesse artigo: “Alguns aspectos do desenvolvimento histórico e epistemológico do conceito de área”, e das seguintes perguntas para reflexão:

1. Em que consiste o processo de quadratura?
2. Como Hipócrates pensou a quadratura do círculo?
3. É possível quadrar um círculo, utilizando apenas régua sem graduação e o “compasso euclidiano”? Por que?
4. O processo de quadratura de polígonos contribui para compreensão do conceito de área? Justifique sua resposta.

Em seguida, o professor pediria que os estudantes, individualmente, buscassem representar, de algum modo, a sua compreensão sobre estas perguntas.

Após esse primeiro contato com o texto, com o auxílio do professor, os estudantes seriam incentivados a ler em voz alta partes do texto que indicassem possíveis respostas para as perguntas e as anotações sobre suas compreensões, para que estas fossem discutidas pelo grupo. Após negociação com os estudantes, o professor registraria no quadro uma síntese da compreensão do grupo.

Em um segundo momento, o professor apresentaria outras perguntas para reflexão:

5. Apresente uma possível interpretação para o modo como Arquimedes pensou no problema da área do círculo.
6. Por que a área do círculo é o comprimento da circunferência vezes o raio dividido por dois?

A mesma estratégia de encaminhamento descrita para as perguntas anteriores seriam repetidas nesse momento, porém o professor poderia apresentar aos estudantes as problemáticas, os instrumentais matemáticos disponíveis e utilizados na época de Arquimedes, e os possíveis erros de encaminhamento dessa demonstração, para que os estudantes possam levantar outros erros e buscar soluções para os mesmos. O objetivo da discussão dos possíveis erros de encaminhamento é identificar as repercussões dessa problemática para esses estudantes no contexto atual e criar uma base comum de conhecimento matemático, necessária para que cada estudante possa construir a sua demonstração. Em um próximo momento, os estudantes seriam incentivados a comparar e discutir as suas demonstrações.

Apresentamos a seguir algumas possibilidades que podem ser utilizadas pelo professor para dinamizar o processo descrito anteriormente, no que se referem às problemáticas, os instrumentais matemáticos disponíveis e utilizados na época para essa demonstração, ou seja, apresentação aos estudantes das possibilidades de demonstração e a demonstração de Arquimedes. Bem como, outras perguntas para reflexão.

Idéias presentes na matemática grega

Duas idéias eram muito utilizadas nas provas feitas pelos matemáticos gregos: o método da exaustão e prova por redução ao absurdo.

O método de exaustão tem por base a seguinte proposição: *Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor do que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie*.

Ou seja, temos uma grandeza que será subdivida (chamaremos de a_1) e outra grandeza pré-determinada c.

Tomemos $b_1 > a_1/2$, e definamos $a_2 = a_1$-b_1, então teremos $a_2 < a_1$. Façamos agora $a_3 = a_2$-b_2, com $b_2 > a_2/2$, segue que $a_3 < a_2$. Se continuarmos com esse processo até um *n* natural, teremos $a_n = a_{n-1} - b_{n-1}$, com $b_{n-1} < a_{n-1}/2$, e $a_n < c$. Ou seja, por menor que seja c, sempre conseguimos determinar um a_n, menor que c, por este processo.

Se pensarmos na grandeza como um segmento de reta, podemos visualizar a proposição.

Outra idéia muito utilizada pelos gregos é a prova por redução ao absurdo. Por exemplo, se temos que provar que a veracidade de uma proposição p, assumimos ~p como verdadeira (pois provando que ~p é falsa teremos que p é verdadeira) e provamos que "~p implica q e ~q", ou seja, uma mesma afirmação (~p que assumimos como verdadeira) implica em uma segunda afirmação (q) e na negação desta (~q), o que, segundo a lógica tradicional, é impossível, pois uma afirmação ou é verdadeira ou é falsa, e não os dois ao mesmo tempo. Assim temos que nossa premissa ~p é falsa que implica p verdadeira.

Demonstração de Arquimedes e outras perguntas para reflexão

Após apresentação e discussão das **Idéias presentes na matemática grega**, entregaríamos aos estudantes uma folha com a demonstração de Arquimedes e as seguintes questões:

7. Arquimedes utiliza nesta demonstração a prova por redução ao absurdo? Explique como.
8. E o método de exaustão, ele utiliza? Explique como.

Arquimedes foi o primeiro a provar rigorosamente que a área do círculo é igual ao comprimento da circunferência vezes o raio dividido por dois, no seu tratado intitulado *A Medida do Círculo*, Proposição 1:

A área de qualquer círculo é igual à área de um triângulo retângulo, no qual um dos catetos é igual ao raio, e o outro é igual à circunferência do círculo.

<u>Demonstração:</u> Seja C o círculo, e K o triângulo em questão. Se o círculo não for igual a K, então ele deve ser maior ou menor.

Suponhamos que o círculo seja maior do que K. Inscreva um quadrado ABCD, divida AB, BC, CD, DA ao meio, depois (se necessário) suas metades e assim por diante, até que os lados do polígono inscrito (cujos pontos angulares são os pontos da divisão) contenham segmentos circulares cuja soma seja menor do que o excesso da área do círculo menos K.

A figura a seguir ilustra a divisão proposta por Arquimedes.

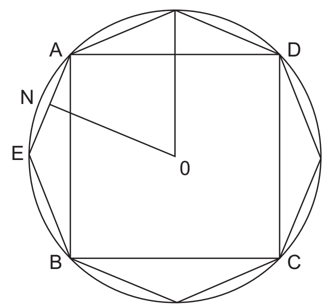


Figura 1

Assim, a área do polígono é maior do que K.

Seja AE qualquer lado dele, e ON a perpendicular baixada sobre AE do centro O. Então, ON é menor do que o raio do círculo, portanto menor do que o lado oposto ao ângulo reto de K. Também o perímetro do polígono é menor do que a circunferência do círculo, isto é, menor do que o outro lado adjacente ao ângulo reto de K. Assim, a área do polígono é menor do que K. Isto é inconsistente com a hipótese. Logo a área do círculo não pode ser maior do que K.

Se possível, seja a área do círculo menor do que a de K.

Circunscreva um quadrado, e trace dois lados adjacentes, tocando o círculo nos pontos E e H encontrando-se em T. Divida os arcos ao meio, entre os pontos adjacentes de contato, e tome as tangentes aos pontos da divisão.

Seja A o ponto médio do arco EH, e FAG a tangente em A. Então o ângulo TAG é reto. Logo TG > GA = GH. Segue que o triângulo FTG é maior do que a metade da área TEAH. Do mesmo modo, se o arco AH é dividido ao meio e a tangente do ponto da divisão é tomada, ela cortará mais da metade da área de GAH.

Continuando assim o processo, chegamos finalmente a um polígono circunscrito cujos espaços entre ele e o círculo, somados, serão menores do que o excesso entre K e a área do círculo. Logo a área do polígono será menor do que K.

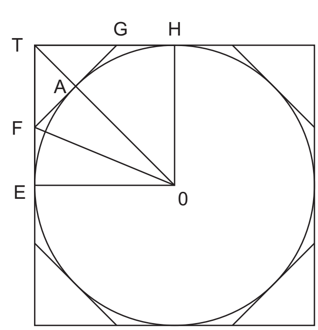


Figura 2

Como a perpendicular de O sobre qualquer lado do polígono é igual ao raio do círculo, enquanto o perímetro do polígono é maior do que a circunferência do círculo, segue-se que a área do polígono é maior do que o triângulo K, o que é impossível. Portanto, a área do círculo não é menor do que K.

Como a área do círculo não é maior nem menor do que K, só pode ser igual a K.

Em relação à primeira questão, a proposição a ser provada é $A_c = K$, ou seja, que a área do círculo é igual à área do triângulo retângulo K, em que um dos catetos é o raio do círculo e o outro é o comprimento da circunferência. Uma maneira de provar a igualdade é provando que não pode ser $A_c < K$, nem $A_c > K$.

Primeiro Arquimedes assume que $A_c > K$ e chega a duas verdades, que a área do polígono inscrito (p_n) é maior do que K, e que a área de p_n é menor do que K, ou seja, partindo de uma suposição ele chega a uma afirmação e na negação dessa mesma afirmação. Como tínhamos visto p implica q e ~q, com p sendo a afirmação $A_c > K$, e q a afirmação $A_{pn} > K$, e sua negação (~q) $A_{pn} < K$.

Em seguida Arquimedes supõe que $A_c < K$ (afirmação que chamaremos de a_0) chega a outras duas verdades, que a área do polígono circunscrito $A_{Pn} < K$ (chamaremos de a_1), e que $A_{Pn} > K$ (~a_1), isto é, outro absurdo, pois a_0 implica a_1 e ~a_1.

Para solucionar o segundo problema incentivaríamos os estudantes a desenharem a figura que Arquimedes propõe (Figura 1), qual seja, a circunferência com o quadrado ABCD inscrito, da primeira parte da demonstração, em que ele supõe que C > K. Com as divisões dos lados, como na figura a seguir.

Seja p_n cada um dos polígonos inscritos, então teremos que $p_{n+1} > p_n > ... > p_2 > p_1$. Cada polígono sucessivo é formado de seu antecessor pelo acréscimo de um conjunto de triângulos, cada um dos quais com área maior do que a metade do segmento circular no qual é inscrito.

$$\text{AHD} = \frac{1}{2}\ \text{ADPQ} > \frac{1}{2}\ \text{segmento circular AHD.}$$

Daí temos que $A_{p2} - A_{p1} > \frac{1}{2}(A_C - A_{p1})$ e em geral

$$A_{p_{r+1}} - A_{p_r} > \frac{1}{2}\ (A\ \ - A_{p_r}).$$

Logo, pelo método de exaustão, teremos que para n grande a diferença entre A_C e A_{p_n} pode ser considerada tão pequena quanto quisermos. E assim teremos que $A_C - A_{p_n} < A_C - K$ que implica $K < A_{p_n}$.

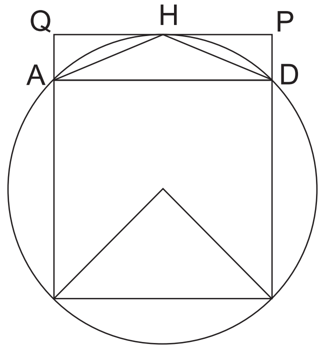


Figura 3

Como cada p_n é construído de triângulos cujas alturas (h_n) são menores do que o raio, e suas bases (b_n) são menores do que os arcos circulares sobre as quais elas se estendem, temos que $A_{p_n} = n\frac{h_n b_n}{2} \quad \frac{h_n(nb_n)}{2} \quad \frac{r2\ r}{2} \quad K$, pois $nb_n <$ (onde r é o raio do círculo).

Chegamos aqui ao absurdo, pois ao supormos que $A_C > K$ encontramos que $A_{p_n} < K$ e $A_{p_n} > K$.

Agora vamos supor que $A_C < K$. Circunscrevendo polígonos, começando pelo quadrado e prosseguindo por bisseção de arcos (como mostra a Figura 2), teremos $P_1 > P_2 > ... > P_n$. Daí teremos que, à medida que jogamos fora os triângulos sucessivos (para construirmos novos polígonos), os triângulos em questão são em cada caso maiores do que a metade da diferença entre o polígono anterior e a área do círculo.

$$A_{P_n} \quad A_{P_{n\ 1}} \quad \frac{1}{2}(A_{P_n} \quad A_C)$$

Novamente o método de exaustão entra para mostrar que podemos chegar a um polígono P_r tal que $A_{P_r} \quad A_C \quad K \quad A_C$. Logo, $A_{P_n} < K$. Mas para todos os polígonos circunscritos $A_{P_n} > K$, pois cada polígono é constituído de triângulos, com altura maior do que o raio, e o seu perímetro é maior do que o perímetro do círculo.

Segue-se que $A_C < K$ implica $A_{P_n} > K$ e $A_{P_n} < K$, o que é absurdo. Portanto não pode ser A_C menor do que K.

Por fim, como A_C não é menor do que K e nem maior do que K temos $A_C = K$.

Considerações finais

Neste artigo apresentamos alguns aspectos do desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de área e de uma proposta didática utilizando a história da matemática para o estudo deste conceito. As reflexões presentes neste artigo podem contribuir para com os professores em formação na produção de significados para os conceitos trabalhados na proposta, e no desenvolvimento de uma visão que permita a ele um entendimento do processo de constituição do conhecimento matemático, tendo um olhar específico para a "quadratura do círculo".

Na proposta didática buscamos sugerir uma estratégia que possibilite momentos nos quais os estudantes possam, a partir da apresentação de aspectos do desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de área, refletir e produzir significados para este conceito.

O contato com idéias como a da quadratura, do método da exaustão e da prova por redução ao absurdo (que é aceita, e muito utilizada, por matemáticos até os dias atuais), e a possibilidade de reflexão sobre estes conceitos por meio da história da matemática, podem possibilitar a compreensão das relações entre os diversos conceitos e idéias matemáticas, que são apresentadas por muitos professores como sendo estanques e já cristalizadas.

A aplicação dessa proposta didática, bem como, o estudo da produção de significados pelos alunos no momento desta aplicação, constituirão os próximos passos do nosso trabalho.

Bibliografia

BARON, Margaret. E. **Curso de História da Matemática**: origem e desenvolvimento do Cálculo. Brasília, UnB, v. 1/2/3/4/, 1985.

BARONI, Rosa; TEIXEIRA, Marco V.; NOBRE, Sérgio. A investigação científica em história da matemática e suas relações com o programa de pós-graduação em educação matemática. In: BICUDO, M.A..V e BORBA, M.C. (eds). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** (1.ed. 1968) Trad. Elza F. Gomide. 2. ed. Brasil: Edgard Blücher, 1998.

CYRINO, Márcia C.C.T. **As várias formas de conhecimento e o perfil do**

professor de Matemática na ótica do futuro professor. 2003. Tese (Doutorado em Educação – Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de São Paulo - Feusp, São Paulo, 2003.

________. A matemática, a Arte e a Religião na Formação do Professor de Matemática. **BOLEMA,** Ano18, n.23, p.41-56, 2005.

________. Preparação e emancipação profissional na formação inicial do professor de Matemática. In: NACARATO, Adair M. e PAIVA, Maria A. V. **A formação do professor que ensina Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**/ tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

GASPAR, Maria T.J. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores**. 2003. 318 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

LINS, Romulo C. Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática. In: **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. BICUDO, M.A.V. e BORBA, M.C. (eds). São Paulo: Cortez, 2004.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

PONTE, João P., BOAVIDA, Ana M., GRAÇA, Margarida, & ABRANTES, Paulo. **Didáctica da Matemática**. Lisboa:Departamento do Ensino Secundário, Ministério da Educação, 1997.

Submetido ao Comitê Editorial em 28/10/2006
Aprovado em 14/05/2007