Ternas Aritméticas ou o Problema dos Três Vasos

Wilson Pereira de Jesus
Professor, UEFS
jesusw@uol.com.br

Resumo
O presente trabalho é parte de um estudo acerca do método axiomático, ou seja, o tratamento utilizado pela matemática para os seus sistemas abstratos, seus sistemas dedutivos. Um estudo sobre este método fora desenvolvido de forma completa em Jesus (1991). O ponto de partida é o problema dos três vasos e desenvolve-se modelos dedutivos aritméticos e geométricos de soluções do problema de partida, sempre que possível, visando a generalizações; o que é de bom tom quando se trata da iniciação dos nossos estudantes de graduação (bacharelado e licenciatura) ao método axiomático.

Palavras-Chaves: Problema dos três vasos. Dedução. Axiomática. Modelos axiomáticos (construção).

Arithmetic Triple or The Three Jug Problem

Abstract
The present work is part of a study about the axiomatic method, that is, the way mathematics uses to approach its abstract and deductive systems. A study on this method was developed in an extensive way by Jesus (1991). The starting point of this paper is the three jug problem, and the arithmetic and geometric deductive models of solution developed in order to solve the problem since its origin taking into account the search for generalizations, what may be useful for introducing undergraduate students to the axiomatic method.

Keywords: Three-jug problem. Deduction. Axiomatic. Axiomatic models (construction).

Introdução

O presente trabalho é um estudo, fruto de reflexões acerca do aspecto formal da matemática, e pode ser visto como uma continuação de Jesus (2001). Trata-se de um exercício de reflexão sobre dedução regido pelo saudoso professor Mario Tourasse Teixeira (1925-1993), orientador de Mestrado do autor. O que aqui se apresenta caracteriza-se pela forma intuitiva através da qual se pode dispor de uma certa liberdade inerente ao rigor próprio de uma abordagem axiomática na construção e manipulação de modelos. Destina-se a estudantes de graduação em matemática (licenciatura e bacharelado) nos seus processos de iniciação aos fundamentos da matemática.

O problema dos três vasos está ligado à seguinte lenda: conta-se que dois beduínos encontraram três vasos antigos num deserto, sendo que o maior deles contendo preciosa essência. Resolveram então dividir a preciosa essência em partes iguais. Contudo, os vasos continham informação apenas das respectivas capacidades máximas. O desafio do problema consiste em, dadas as capacidades dos vasos, solicitar que se divida a essência em duas partes iguais utilizando só os três vasos como medidas.

A utilização do problema aqui é devida ao fato de representarmos as capacidades dos vasos através de ternas de números naturais. Assim, além de mostrarmos as características de um sistema axiomático, mostraremos que um modelo desse processo de manipulação dos vasos pode proporcionar algumas analogias com um sistema formalizado.

Considerando a seguinte figura abaixo

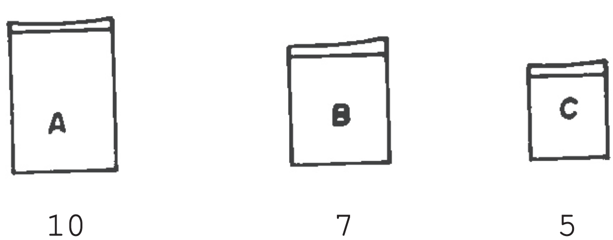

Figura 1

onde A B C representam vasos com as seguintes capacidades: 10*l*, 7*l* e 5*l* respectivamente. Admitamos as seguintes situações dadas de partida:

O vaso de maior capacidade está cheio de água, e os dois menores estão vazios.

Admitamos também a seguinte operação - transpor a água parcial ou totalmente de um para outro vaso, sempre resultando, no final da operação, um dos vasos vazio ou um dos vasos cheio. Só são consideradas válidas as situações onde pelo menos um dos vasos está vazio ou cheio.

Sejam a, b, c onde a>b>c, as capacidades dos vasos: x, y, z quantidades de água resultantes nos vasos A, B e C respectivamente no final de uma operação.

Consideremos a seguinte operação:

R_{mn} - encher o vaso n com água do vaso m de maneira que m se esvazie ou n se encha.

Simplificando:

R_{mn} - encher n com m

Seja a terna (10,0,0) o nosso axioma, isto é, o nosso único axioma - nossa situação dada de partida, e a **regra operatória** definida acima.

Axioma: (10,0,0)

Através da operação R aplicada à terna (x,y,z) inicial, obtemos as seguintes combinações cujas capacidades limite são [10,7,5]:

(10,0,0)
(9,1,0)
(9,0,1)
(8,2,0)
(8,0,2)
(7,3,0)
(7,0,3)
(6,4,0)
(6,0,4)
(5,5,0)
(5,0,5)
(4,1,5)
(4,6,0)
(3,7,0)
(3,2,5)
(2,3,5)
(2,7,1)
(1,7,2)
(1,4,5)
(0,7,3)
(0,6,4)
(0,5,5)

Partindo de qualquer uma dessas ternas é possível chegar a qualquer delas, mediante um determinado número de operações. Será possível estabelecer uma ordem em todas essas composições?

A lista acima de ternas mostra o número total de possíveis combinações dos três vasos obedecendo às regras anteriormente estabelecidas. Cada uma das ternas acima são os **teoremas** do sistema. Todos válidos, e demonstráveis. Resolveremos algumas demonstrações a título de ilustração.

Chamemos a esse sistema de T. Podemos estabelecer que um teorema de T é qualquer terna que possa ser deduzida de T ou de outras ternas deduzidas de T.

Podemos ainda dizer que T é completo pois todas as ternas válidas do sistema são demonstráveis e deduzidas do conjunto (unitário) de axiomas dado. Além disso, T é correto pois não é possível demonstrar fórmulas não-válidas, já que a regra operatória preserva a validade. E T é obviamente independente. Compõe-se de apenas um axioma!

Vejamos agora alguns exemplos de demonstrações em T.
Deduzir a terna (0,7,3) de T.
*(10,0,0)
R_{12} (3,7,0) encher o vaso 2 com o vaso 1
R_{13} (0,7,3) Encher o vaso 3 com o vaso 1

Verifique se a terna (1,7,2) é dedutível de T.
*(10,0,0)R_{12}
(3,7,0) R_{23}
(3,2,5) R_{31}
(8,2,0)R_{23}
(8,0,2) R_{12}
(1,7,2)

Todas essas deduções foram decorrendo umas das outras como se numa cadeia lógica. E todas válidas. Pois em cada passo da dedução as ternas intermediárias continham um termo zero ou um termo máximo; isso corresponde no modelo físico inicial à situação onde um dos vasos está completamente cheio ou vazio.

Há alguns fatos ligados à resolução do problema dos três vasos que despertam a nossa curiosidade. Abandonando o modelo físico, origem das nossas especulações, e detendo-nos nas ternas com toda a sua singularidade poderemos buscar algumas respostas para algumas curiosidades desse sistema. Por exemplo, o fato de o total de ternas válidas de T ter sido 22 (incluindo o axioma inicial) e a soma dos limites (10+7+5=22) será uma mera coincidência? Existirão outros sistemas de ternas não completos?

Poderíamos desenvolver todos os possíveis conjuntos de ternas, partindo da terna de forma geral [n,1,1] até a terna [n,n,n] como limite e verificarmos as regularidades em alguns sistemas desenvolvidos; e daí, tentarmos sistematizar e demonstrar de modo a podermos generalizar os resultados que porventura obtenhamos.

Se tomássemos o conjunto n={1,2,3,4,5}, teríamos pois (1,0,0); (2,0,0); (3,0,0); (4,0,0); (5,0,0) como axiomas iniciais sendo um para cada sistema. O que iria variar para cada conjunto de axioma e teoremas seria apenas os limites máximos das segunda e terceira posições nas ternas. Desse modo, percorreríamos todas as situações possíveis partindo de [n,1,1] até [n,n,n]. Apresentamos em seguida apenas as formas gerais e os limites das ternas. Os desenvolvimentos podem ser deixados como exercícios para o leitor interessado.

n,1,1

[1,1,1]	[2,11]	[3,11]	[4,11]	[5,11]
n,2,1				
	[2,2,1]	[3,2,1]	[4,2,1]	[5,2,1
n,2,2				
	[2,2,2]	[3,2,2]	[4,2,2]	[5,2,2]
n,3,1				
		[3,3,1]	[4,3,1]	[5,3,1]

n,3,2				
		[3,3,2]	[4,3,2]	[5,3,2]
n,3,3				
		[3,3,3]	[4,3,3]	[5,3,3]
n,4,1				
			[4,4,1]	[5,4,1]

n,4,2				
			[4,4,2]	[5,4,2]
n,4,3				
			[4,4,3]	[5,4,3]

n,4,4				
			[4,4,4]	[5,4,4]
n,5,1				
				[5,5,1]
n,5,2				
				[5,5,2]

n,5,3				
				[5,5,3]
n,5,4				
				[5,5,4]
n,5,5				
				[5,5,5]

Consideramos algumas conjecturas que podem ser feitas acerca dos desenvolvimentos efetivados pelo nosso suposto leitor interessado.

Dadas as condições iniciais, o limite superior do número de ternas é sempre menor ou igual à soma das capacidades. Isto é:

$$N(T) \leq a+b+c$$

E o limite inferior é sempre igual a três,

$$N(T) = 3.$$

Por exemplo, seja a terna da forma **n,1,1** e **[1,1,1]**.

(1,0,0)
(0,1,0)
(0,0,1)

Desse exemplo podemos generalizar que o limite inferior do número de duplas é dois; o limite inferior do números de n-uplas é n, onde n é o número de vasos.

Há um resultado interessante acerca desse problema dos três vasos tratado através desse modelo modelo aritmético que estamos utilizando. Dada uma terna qualquer **(n,x,y)** onde **n > x > y**, é possível determinarmos quantos sistemas de configuração da forma [n, x, y] existem. Para isso é o bastante somarmos os números de **configurações de capacidades** dentro dos limites [n,1,1], [n,n,n]. A análise de alguns exemplos tornará mais claro o nosso pensamento. Temos apenas um sistema de configuração em [n,1,1] para n=1.

[1,1,1]

Já para n=2 teremos três sistemas com as seguintes configurações para os limites de capacidades:

[2,1,1]; [2,2,1]; [2,2,2]

No caso de n=3, teremos seis sistemas:

[3,1,1]; [3,2,1]; [3,2,2]; [3,3,1]; [3,3,2]; [3,3,3]

isto é, seis configurações de capacidades onde o axioma dado é (3,0,0) a partir do qual seis sistemas serão desenvolvidos obedecendo cada um a um dos limites acima. É fácil verificarmos que dada uma terna (n,x,y) podemos perceber que sendo n fixo x e y devem variar de 1 a n, o que significa que:

para x=1 teremos uma configuração
para x=2 teremos duas configurações
para x=3 teremos três configurações
.
.
.
para x=n teremos n configurações

logo, o número total de configurações da forma [n,x,y] é 1+2+3+...+n

Portanto, o número de configurações da forma [n,x,y] é dado pela fórmula da soma dos n-primeiros números naturais:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n \quad \frac{(1 \quad n)n}{2} \; .$$

Desse exemplo podemos generalizar que o limite inferior do número de duplas é dois; o limite inferior do números de n-uplas é n, onde n é o número de vasos.

Há um resultado interessante acerca desse problema dos três vasos tratado através desse modelo modelo aritmético que estamos utilizando. Dada uma terna qualquer **(n,x,y)** onde **n > x > y**, é possível determinarmos quantos sistemas de configuração da forma [n, x, y] existem. Para isso é o bastante somarmos os números de **configurações de capacidades** dentro dos limites [n,1,1], [n,n,n]. A análise de alguns exemplos tornará mais claro o nosso pensamento. Temos apenas um sistema de configuração em [n,1,1] para n=1.

Mesmo sendo sistemas finitos as ternas aritméticas são pedagogicamente muito ricas para o ensino de dedução, demonstração, completude, decidibilidade e corretude.

Estudando o sistema da página 2 e os sistemas da página 4 poderemos verificar quais deles são completos, decidíveis e corretos.

Por exemplo, o sistema T da página 2 é completo. Seus 21 teoremas mais o axioma contêm todas as ternas válidas. Além de completo, é correto, pois cada um dos teoremas é uma terna válida, e é independente, pois possui um único axioma.

Nos sistemas desenvolvidos na página 4 todos aqueles onde o axioma mais os teoremas deduzidos perfazem um total de ternas igual à soma a+b+c (capacidade dos três vasos, se falarmos em termos físicos), são os sistemas completos. Por exemplo, na página 4 temos como sistemas completos aqueles regidos pelas seguintes configurações:

[1,1,1]; [2,1,1]; [2,2,1]; [3,2,1]; [3,2,2]

Já o sistema regido pela configuração [4,2,2] é incompleto, pois a terna (3,1,0) é válida no sistema mas não é dedutível neste sistema. É esta pois uma situação singular – temos o axioma e as regras; e uma terna que é válida dentro do sistema que não pode ser provada. Assim acontece com outros desses sistemas não completos. No [2,2,2] a terna (1,1,0) é do sistema mas é impossível deduzi-lo.

Há um estudo do problema dos três vasos utilizando modelos geométricos, cujo objetivo é encontrar quantidades de líquido iguais em dois vasos. Nesse estudo consideramos três versões: a de Pitombeira (1988), a de Coxeter e Greitzer (1967) e a de Fremont (1979), e buscamos comparar as três abordagens. Antes, gostaríamos de contar que, depois da resolução do problema por meio de um modelo aritmético, tomamos conhecimento da publicação de Pitombeira (*op. cit.*).

A abordagem de Pitombeira juntamente com os resultados e provas que ele apresenta corroboram o nosso estudo embora nossos objetivos sejam distintos, ao menos em princípio. Nosso objetivo é ilustrar um esquema de dedução bastante simples. O de Pitombeira (*op. cit*), ou pelo menos um deles, é apresentar e discutir um modelo de solução para o problema.

Esse trabalho remeteu-nos a duas referências. Um texto de Coxeter e Greitzer (*op. cit*) e outro de Fremont (*op. cit*). De um certo modo as três abordagens do problema dos três vasos se complementam. Porém, a melhor seqüência de abordagem dos três deveria ser Fremont, Coxeter, Pitombeira, pois embora Fremont trabalhe o problema numa malha triangular, ele lida apenas com duas coordenadas. Apesar de não provar formalmente determinados resultados, como o faz Pitombeira. Fremont apresenta esses resultados e dá as leis gerais que regem as soluções do problema. O que em Pitombeira é bem detalhado. A diferença entre o tratamento de Fremont e Coxeter é que este trabalha o problema dos três vasos num modelo geométrico - uma malha triangular formada por triângulos equiláteros cujos lados são os três eixos coordenados; ao passo que o modelo de Fremont é um paralelogramo formado por triângulos equiláteros. Já em Coxeter e Pitombeira, o modelo é um triângulo equilátero.

Vejamos pois um problema como aparece em Fremont. Em seguida veremos como o mesmo seria tratado em Coxeter e Pitombeira, já que estes dois têm o mesmo tratamento, e o acréscimo de Pitombeira à abordagem de Coxeter é, como já dissemos, a fundamentação dos resultados.

Vejamos o problema como aparece em Fremont:

Você tem um vaso de 5 litros e um vaso de 3 litros. Como você pode medir 4 litros a partir de um vaso de 8 litros? (Enquanto Coxeter e Fremont usam galão como medida, preferimos litro por ser mais adstrita ao nosso contexto).

A figura (2) representa o modelo de solução.

Vaso pequeno (3 litros)	Vaso grande (5 litros)	
0	0	partida
0	5	enche o vaso grande
3	2	entorna no vaso pequeno
0	2	esvazia o vaso pequeno
2	0	entorna do vaso grande no pequeno
2	5	enche o vaso grande
3	4	entorna do vaso grande no pequeno: o grande tem 4!

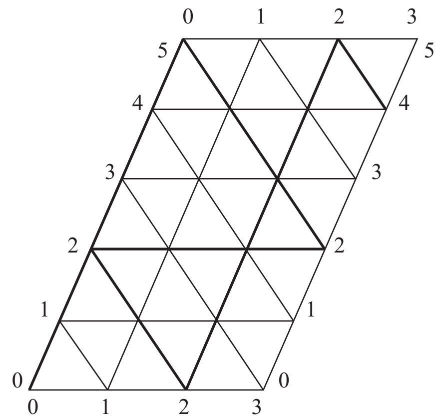

Figura 2

Aqui o vaso de 8 litros, que é a condição inicial do problema, não aparece, seja na malha de triângulos, seja na tabela. É uma manipulação implícita. Mesmo na tabela, talvez comportasse um terceiro campo, à esquerda, mostrando as situações que ocorrem com o vaso de 8 litros, que na partida está totalmente cheio, e varia de volume de água nos outros passos até chegar, no momento em que o problema é solucionado, a conter 1 litro de água apenas.

Há um fato interessante nessa malha ou rede triangular que as mudanças de direção da linha na trajetória da busca da solução do problema se comporta do mesmo modo que um raio luminoso quando incide num espelho plano, obedecendo assim à lei de reflexão da luz.

É conveniente notar que a linha em destaque parte do ponto (0,0) e só muda de direção quando encontra um dos lados do paralelogramo.

Vejamos como seria resolvido esse problema na abordagem de Coxeter (1967) e Pitombeira (1988). O modelo já não seria um paralelogramo, mas um triângulo e a tabela com os dados teria três campos, apresentando o que acontece com o vaso de maior capacidade.

A	B	C	
Vaso maior	Vaso médio	Vaso menor	
(8l.)	(5l)	(3l)	
8	0	0	Partida
3	5	0	Enche B com A
3	2	3	Enche C com B
6	2	0	Esvazia C em A
6	0	2	Esvazia B em C
1	5	2	Enche B com A
1	4	3	Enche C com B e acha a solução 4!

A figura abaixo ilustra os passos dados na busca de solução do problema:
A= 8 (capacidade máxima)
B= 5 (capacidade máxima)
C= 3 (capacidade máxima)

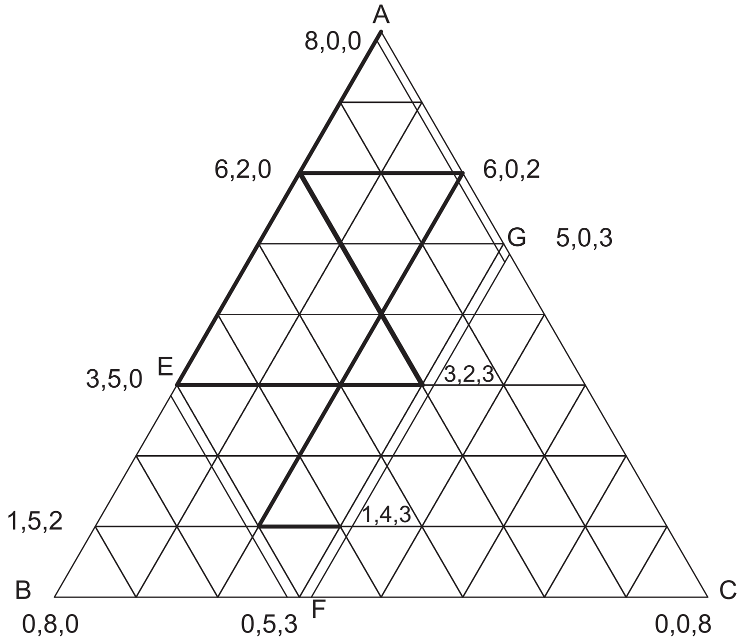

Figura 3

Na verdade o modelo de Fremont é bem mais simples; mas se encaixa perfeitamente nesse modelo de Coxeter/Pitombeira. A complexidade deste último é devido à sua maior riqueza em informações.

É interessante notar que a trajetória da linha, que representa todos os passos dados na busca da solução proposta, só muda quando ela toca nas fronteiras que são os lados do paralelogramo cujos vértices são A, E, F, G. Note que tal paralelogramo corresponde ao modelo de Fremont.

Convém acrescentar que se prosseguíssemos nos deslocamentos além do ponto (1,4,3), preencheríamos toda a malha limitada pelas quatro linhas limites do paralelogramo AEFG, que se configurou devido às condições iniciais do problema. O fato desse preenchimento da malha significa que, dentro dessas condições colocadas qualquer quantidade inteira de líquido, dentro dos limites 1 e 8 é possível de ser obtida. Transpondo para o nosso modelo dedutivo aritmético, significa que o nosso sistema é completo, pois, dada qualquer terna é possível dizer se ela pertence ou não ao sistema, isto é, se ela é deduzível.

Será isso sempre assim? Sabemos que não. Mas é interessante analisarmos um exemplo, ainda a partir de Fremont, porém sob o modelo que chamamos de Coxeter/Pitombeira (com três coordenadas):

A partir de um vaso de 10 litros, usando um vaso de 6 litros e outro de 4 litros, obter 5 litros.

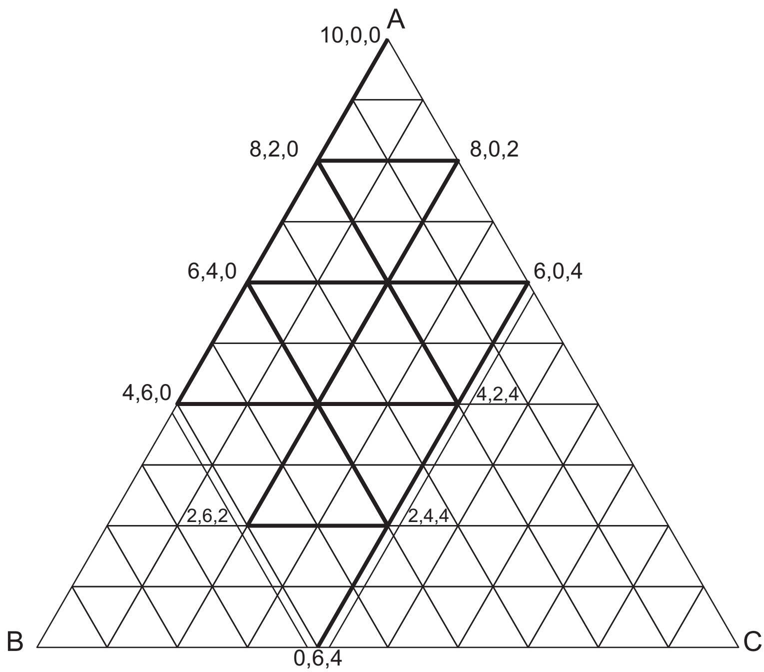

Figura 4

Os pontos assinalados na malha acima nos mostram que é impossível obtermos qualquer quantidade ímpar de litros, dadas as condições iniciais que foram estabelecidas. A tabela abaixo é mais um recurso para mostrar as operações realizadas apresentadas no gráfico:

Vaso maior	Vaso m édio	Vaso menor
A (10*l*)	B (8*l*)	C (4*l*)
10	0	0
4	6	0
4	2	4
8	2	0
8	0	2
2	6	2
2	4	4
6	4	0
6	0	4
0	6	4

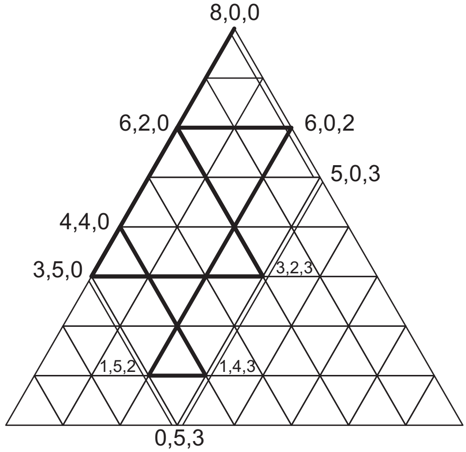

Fig. 5a

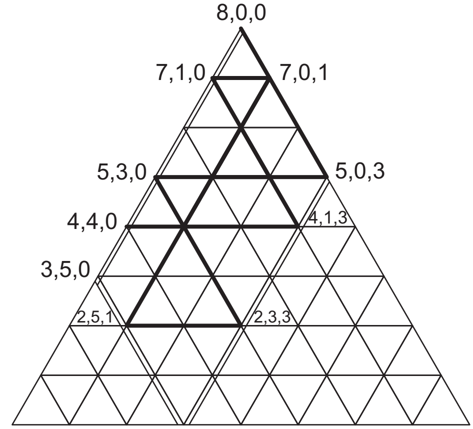

Fig. 5b

As seqüências nas figuras 5a e 5b que satisfazem ao que requer o problema são as seguintes:

Fig. (5a): (8,0,0); (3,5,0); (3,2,3); (6,2,0); (6,0,2); (1,5,2); (1,4,3); (4,4,0).

Fig. (5b): (8,0,0); (5,0,3); (5,3,0); (2,3,3); (2,5,1); (7,0,1); (7,1,0); (4,1,3); (4,4,0).

Na figura (5a) a solução foi encontrada com 7 passos, ou operações, e na figura (5b) a solução apresentada foi obtida com 8 passos ou operações.

Já sabemos que, se dados três vasos a,b,c; $a > b > c$ e $b+c= a$ e mdc(b,c)=1, então quaisquer ternas dentro das condições limite de a, b, c, isto é, [a,b,c] válidas, são obtidas a partir de qualquer uma delas. Fatos como esse, Pitombeira também demonstra a partir da teoria das congrüências.

O tratamento que demos ao problema das ternas foi realmente pouco rigoroso. Estivemos primando mais pela clareza. Mas aqui vai um tratamento mais dentro do espírito conciso da matemática.

Seja S_n um *sistema de ternas* para cada n 3 e (n um número natural).

Uma *sentença de* S_n é uma terna (a,b,c) de números naturais, onde $1 \leq a,b,c \leq n$.

S_n tem apenas um axioma que é:

$$(n\text{-}2,1,1) \qquad \text{(que é uma sentença)}$$

As *regras de inferência* de S_n são:

R_1: passar de uma sentença (a,b,c) com a+b+c=n para uma sentença (k, l, b+c), onde k+l=a; e $k,l \geq 1$.

R_2: passar de uma sentença (a_1, a_2, a_3) para uma sentença $(a_{S(1)}; a_{S(2)}; a_{S(3)})$, onde s é uma permutação de {1,2,3}.

Uma *demonstração* em S_n é uma seqüência de sentenças T_1, T_2, ..., T_{n-1}, T_n tal que cada T_i ou é o axioma ou é obtido de T_j (com j< i) por uma das regras.
T é um *teorema* ou uma *sentença demonstrável* se existe uma demonstração T_1 ... T_n tal que T_n = T.

Para ilustrar, vejamos uma demonstração de (3,3,4) em S_{10}. Começamos com o axioma **(8,1,1)**.

Usando R_1, (8=7+1), vem

((7, 1, 1+1) = (7, 1, 2)

Outra vez usando R_1, (7=4+3), obtemos

(4, 3, 1+2) = (4, 3, 3)

Finalmente, por R_2, concluímos

(3, 3, 4).

Descrita a parte sintática de S_n passemos para a parte semântica.

Diremos que uma sentença (a,b,c) é *válida* se a+b+c=n. O Sistema S_n é **correto** se todo teorema é válido, e **completo** se toda sentença válida é teorema. Mostremos primeiro que é correto. O axioma (n-2,1,1) é válido pois (n-2)+1+1=n. Mostremos que as regras preservam a validade. Suponhamos que (a,b,c) seja válida e que k+1=a com k,11. Então a+b+c=n e a conseqüência pela regra 1 (k,1,b+c) é tal que k+1+(b+c)= a+b+c=n; portanto, válida. A outra regra envolve apenas uma permutação que não altera a soma.

Mostremos agora que S_n é completo.

Seja (a,b,c) válida (portanto a+b+c=n) e dividamos o argumento em três casos:

a) c > 2. Começamos com o axioma

(n-2,1,1) = (a+b+c-2,1,1)

Regra 1	$k \quad a \quad b$ $l \quad c \quad 2$	$(a \quad b, c \quad 2{,}1 \quad 1)$	
Regra 2	$k \quad a$ $l \quad b$	$(a \quad b, c \quad 2{,}2)$ $(a, b, c \quad 2 \quad 2)$ (a, b, c)	

b) c=2. Axioma (n-2,1,1) = (a+b+c-2,1,1) = (a+b,1,1)

Regra 1 → (a,b,1+1) = (a,b,2) = (a,b,c)

c) c=1. Vamos subdividir em três sub-casos
$a \quad 1$
$a \quad 2$
$a \quad 2$

Os pontos assinalados na malha acima nos mostram que é impossível obtermos qualquer quantidade ímpar de litros, dadas as condições iniciais que foram estabelecidas. A tabela abaixo é mais um recurso para mostrar as operações realizadas apresentadas no gráfico:

Se c=1 e a=1 e (a,b,c) é válida, então b=n-2.
Começamos com (n-2,1,1)
Usando a regra 2 (1, n-2, 1)= (a,b,c)
Se c=1 e a=2

(n-2,1,1) = (a+b+c-2,1,1) = (b+c,1,1)
Regra 1 $\rightarrow$ (b,c,2)
Regra 2 $\rightarrow$ (2,b,c) = (a,b,c)

Se c=1 e a>2, (n-2,1,1) = (a+b+c-2,1,1) = ((b+c)+(a-2),1,1)
Regra 1 $\rightarrow$ (b+c,a-2,1+1) = (b+1,a-2,2)
Regra 1 $\rightarrow$ (b,1,a-2+2) = (b,1,a)
Regra 2 $\rightarrow$ (a,b,1) = (a,b,c)
S_n é pois completo.

O que poderia ter sugerido esses sistemas? Consideremos formas triangulares, ou seja, triângulos relativamente só às suas formas (dadas por seus ângulos) e não pelo comprimento dos lados. Tais formas são assim caracterizadas por ternas , , onde , , medem seus ângulos. Suponhamos que façamos uma divisão numa dessas formas triangulares.

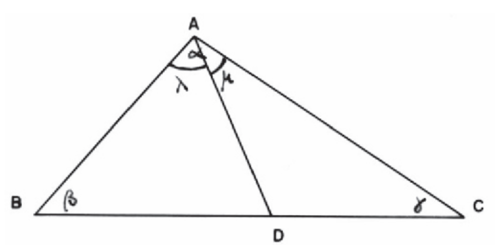

Fig. 6

A partir de D tracemos paralelas aos lados AB e AC. Ficamos assim com o triângulo original dividido em quatro outros.

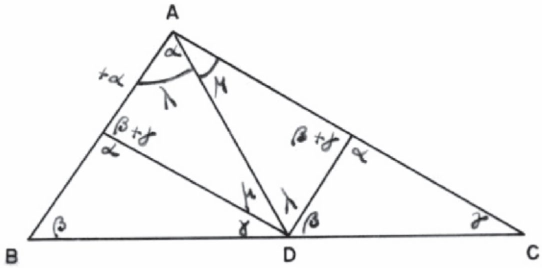

Fig. 7

Dos quatro triângulos assim obtidos, dois são semelhantes ao original e os restantes são congruentes e têm ângulos , , . Reciprocamente, a partir de, pelo mesmo processo (dividindo em e obtemos de volta (, ,) que é igual a (, , +) (a menos da ordem nas ternas), que no caso não nos interessa - daí a regra de permutação no sistema.

A seguir, consideremos n3 e F_n o conjunto das formas triangulares cujos ângulos medem k.(180/n); k= 1, 2, ..., n (na verdade, até n-2, pois o mínimo para os restantes é 180/n). E o processo de obtenção da nova forma a partir da primitiva fica:

De (a,b,c) com $1 \leq a,b,c \leq n$ passar para (k,l,b+c), onde k+l = a. Isso sugere o sistema S_n que assegura que tal processo sucessivamente aplicado vai acabar gerando todas as formas em consideração, começando com (n-2,1,1). Na verdade, pode começar com qualquer outra pois há simetria no processo, como vimos acima. Assim sendo, de (a,b,c) podemos chegar a (a', b', c') levando (a,b,c) pelo processo inverso a (n-2,1,1) e, deste, a (a,b,c).

Em Vianna (1988) há uma interpretação das ternas apresentando um conceito de forma **companheira**, isto é, quando dividimos uma forma triangular de tal modo que uma das duas formas resultantes seja semelhante à forma inicial, a forma (não semelhante) é chamada de companheira. A ilustração a seguir mostra isso.

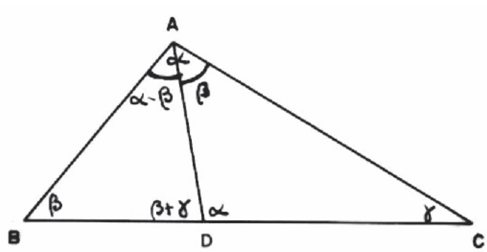

Fig. 8

A forma triangular ADC é semelhante à original e sua companheira é determinada pelos ângulos -, e +. Simbolicamente a obtenção da companheira é do tipo

$$, \ , \longrightarrow (\ - \ , \ , \ + \ ).$$

Isso sugere um sistema S'_n para cada n3 onde a regra R_1 é substituída por: Passar de (a,b,c) (com a>b) para

(a-b, b, b+c)

e a definição de validade por (a,b,c) é válida se a+b+c=n e mdc(a,b,c)=1. Vejamos que S'_n também é correto e completo.

Primeiro que é correto. (n-2,1,1) é válido pois n-2+1+1=n e mdc(n-2,1,1)=1. Suponhamos que (a,b,c) seja válida, ou seja,

a+b+c=n e mdc(a,b,c)=1.

Então (a-b,b,b+c) também é válida, pois

(a-b)+b+(b+c) = a+b+c = n

e, se p | (a-b), p | b e p | (b+c) então p | [(a-b+b)] e p | [(b+c)-b] donde p| a e p | c. Assim, p | divide a,b e c. Logo

p=1 e mdc(a-b, b, b+c) = 1.

Assim, todo teorema é válido.

Antes de mostrarmos a completude, vejamos que há simetria também em S'_n. Suponhamos que

(a,b,c) (a-b,b,b+c) a>b

De (a-b,b,b+c) passamos, por permutação, para

(b+c, b, a-b)

donde, pela regra 1 (b+c-b,b,b+(a-b)) = (c,b,a).

Permutando outra vez (a,b,c)

Mostremos, então que S'_n é completo. Para isso vamos ver, simetricamente, que toda forma válida pode ser levada pelas regras no axioma. Seja (a,b,c) válida. Como temos a regra de permutação, podemos supor que abc. Observando que no axioma ocorre n-2, que é ocorrência máxima, vamos tentar ir aumentando o máximo de cada forma válida obtida. Se a, b ou c é n-2 então permutando se preciso já estamos no axioma. Suponhamos que não e vejamos primeiro o caso ab>c. Permutando ficamos com (b,c,a), donde, aplicando a regra 1, vem:

(b-c,c,c+a) e c+a> max(a,b,c)=a

Resta ver o caso ab=c. Se c=1 estamos no axioma. Suponhamos, pois, c>1. Isso significa a>b, pois a=b=c>1 contradiz mdc(a,b,c)=1. Temos então, a=qb+r, onde 0<r<b e q>0.

Ficamos com (qb+r,b,b). Aplicando a regra 1 vem sucessivamente,

$$((q-1)b+r,b,2b)$$
$$((q-2)b+r,b,3b)$$
$$\vdots$$
$$((q-q)b+r,b,(q+1)b)$$

e $(q+1)b=qb+b>qb+r=a$. A aplicação deste procedimento reiteradas vezes resultará no axioma (n-2, 1, 1). Pela simetria podemos obter a partir desta a forma (a, b, c). Portanto, S'_n é completo.

Agora, falando em termos de recipientes com líquidos, o primeiro caso (sistema S_n) corresponde a recipientes graduados de 1 a n, não vazios (cujo conteúdo não pode ultrapassar n) só sendo permitida a manobra:

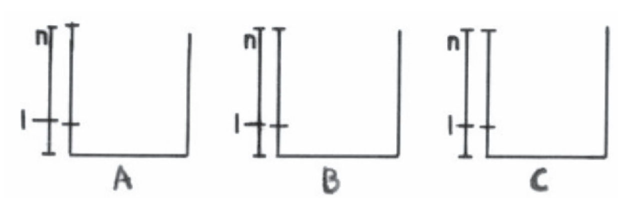

Fig. 9

derramar B em C e, em seguida, derramar uma parte graduada de A (deixando pelo menos 1 em A) em B.

No segundo caso (sistema S'_n) eliminamos a graduação, mas supomos todos de volume n; admitimos um recipiente adicional D de mesmo volume e, supondo que em A tem mais do que em B, só é permitida a manobra: derramar A em D até conseguir em D o mesmo nível que em B; a seguir derramar D em C.

Tentemos agora os sistemas $S''_{(p,q)}$ $(p \geq q)$ e mdc(p,q)=1 que correspondem aos recipientes de volume p+q,p,q e quantidade total de líquido p+q. As *sentenças* são as ternas de naturais (a,b,c), onde $0 \leq a \leq p + q$, $0 \leq b \leq p$, $0 \leq c \leq q$. O *axioma* é (p+q,0,0) e as regras são as seguintes:

R_1 se aplica a (a,b,0) dando (a,b,q)

R_2 se aplica a (a,b,q) dando:

$$(a,b+q,0) \text{ caso } b+q<p$$
$$(a,p,b+q-p) \text{ caso } p<b+q$$

R_3 se aplica a (a,p,c) dando (a+p,0,c)

(a,b,c) é válida se a+b+c=p+q e pelo menos um dos elementos da terna é 0 ou máximo.

$S''_{p,q)}$ é correto. O axioma é válido e as regras preservam a validade. Vejamos isso para R_2. Supondo a terna (a,b,c) tal que a+b+c=p+q e um deles é máximo ou zero devemos mostrar que também o mesmo acontece com (a,b+q,0).

Para (a,p,b+q-p) $a \quad b \quad q \quad p \quad q$ e o último elemento é 0
$a \quad p \quad b \quad q\text{-}p \quad p \quad q$ e o segundo elemento é p, o que é claro.

Agora devemos mostrar que $S''_{(p,q)}$ é completo. Antes vamos tornar razoável a escolha das regras. Correspondem a uma certa visualização, pouco diferente das que mostramos até agora. Vamos ilustrar tal visualização com o exemplo (p,q) = (7,4). As válidas ocorrem no bordo de um retângulo, assim:

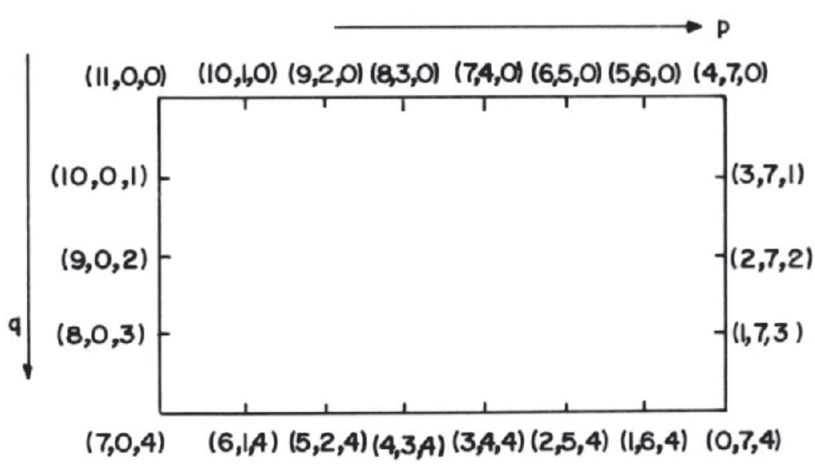

Fig. 10

Esquecendo o primeiro elemento da terna, os dois últimos correspondem a coordenadas cartesianas. Os dois últimos caracterizam o primeiro porque a soma dos elementos da terna deve ser 11. Essa disposição justifica que são 11+7+4 = 22 válidas, como já havia observado. Nesse retângulo, uma aplicação de R_1 corresponde a um deslocamento vertical para baixo; R_2 a um deslocamento na direção ascendente que forma um ângulo de 45º com a horizontal; e, finalmente R_3 corresponde a um deslocamento horizontal para a esquerda. Vejamos como essas regras seriam usadas, sucessivamente

(11,0,0) R_1 (7,0,4) R_2 (7,4,0) R_1 (3,4,4) R_2 (3,7,1) R_3 (10,0,1) R_2 (10,1,0) R_1
(6,1,4) R_2 (6,5,0) R_1 (2,5,4) R_2 2,7,2) R_3 (9,0,2) R_2 (9,2,0) R_1 (5,2,4) R_2
(5,6,1) R_1 1,6,4) R_2 (1,7,3) R_3 (8,0,3) R_2 (8,3,0) R_1 (4,3,4) R_2 (4,7,0) R_1
(0,7,4)

Com isso, todas as ternas válidas de $S''_{(7,4)}$ são teoremas e $S''_{(7,4)}$ é completo. Um esquema para a aplicação das regras pode ser o seguinte:

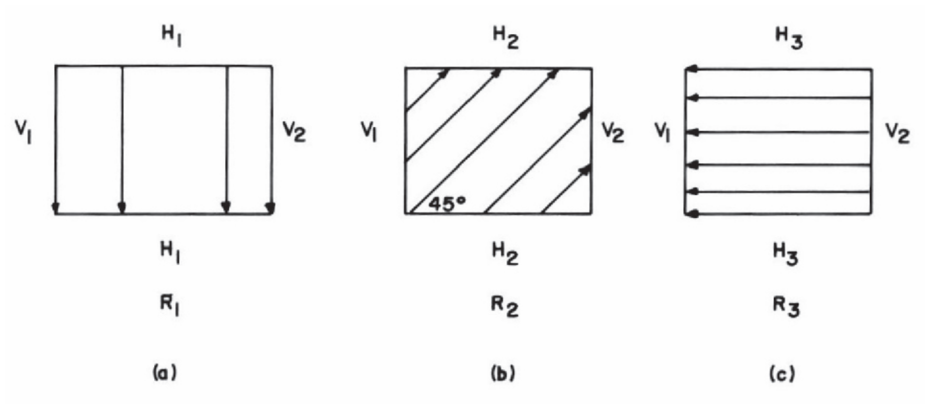

Fig. 11

Demonstremos pois que $S''_{(p,q)}$ é completo.

Antes de mais nada, se $q=1$ é bem simples a demonstração. Tomemos pois $q > 1$.

De modo geral, suponhamos

$p = kq + r;\ 0 < r < q$

r não podendo ser nulo, pois mdc(p,q) = 1. Começando com (p+q,0,0) vem, de R_1, (p,0,q) e, de R_2, (p,q,0); aplicando R_1 novamente obtemos (p-q,q,q) e de R_2 (p-q,2q,0); continuando com R_1 ficamos com (p-2q,2q,q) e, eventualmente, chegamos a (p-kq, kq, q). Daí, por uma aplicação de R_2 chegamos a V_2 em (p-kq,kq+r,q-r) sendo q-r -r (mod q). Para recomeçar aplicamos primeiro R_3 para voltar a V_1 em (p+r,0,q-r); continuando de forma análoga atingimos uma terna de V_2 congruente a -2r (mod q) e assim por diante. Como mdc(p,q)=1, -r, -2r, ..., -(q-1)r, $-qr \equiv_q 0$ são dois a dois não congruentes **mod q** e portanto todas as ternas de V_2 vão ser alcançadas, exceto a última (0,p,q) (V_2 tem q+1 ternas). Como a última alcançada é (q,p,0) por R_1 atingimos também (0,p,q). A exaustão de V_1 pelo processo implica que todas as válidas são alcançadas e $S''_{(p,q)}$ é completo.

Considerações Finais

O significado desse trabalho se assenta nas inúmeras possibilidades de, ao lidarmos com sistemas dedutivos ou, melhor dizendo, ao optarmos por um tratamento hipotético dedutivo de determinada situação devermos dar asas à nossa imaginação, não perdendo de vista que o formalismo matemático é fruto da atividade criadora da mente. Aqui se aliou rigor e intuição sem a perda da perspectiva da principal dimensão da mente, a saber, o poder criador, penso. Uma abordagem nos termos do que foi apresentado aqui, poderia ter outros desdobramentos. Por exemplo, a construção de um modelo computacional para o cálculo de ternas válidas, ou para a elaboração de soluções possíveis para os problemas envolvendo três recipientes. Isso poderia ser feito através de programas simples. Outro aspecto é a questão do formalismo e da generalização em matemática. É idiossincrática a abstração em matemática; e a abordagem aqui apresentada pode fazer sentido em aulas de matemática na graduação, no processo de iniciação dos nossos estudantes ao formalismo que possibilitou toda a tecnologia da qual quase todos somos beneficiários. Sem a matemática pura não passaríamos da Idade da Pedra. Mas antes da utilização do computador, a abordagem do tema poderia passar pelas fases de experimentação (com líquidos e vasos), representação em linguagem matemática, generalização e finalizar com simulação em computadores. Não posso aqui deixar de ressaltar a naturalidade com que o professor Mario Tourasse nos propunha problemas cuja solução dava asas ao pensamento formal. Parecia-se bastante com a naturalidade de certos músicos ao tecerem variações sobre um determinado tema.

Referências

COXETER, H. S. M./ GREITZER, S. L. **Geometry revisited.** The Mathematical Association of America, 1967.

FREMONT, H. **Teaching secondary mathematical through applications** 2nd. ed. Prindle Weber and Schimidt, 1979.

JESUS, W. P. de. **Aprendiz de Matemática:** uma iniciação ao método axiomático. Rio Claro, São Paulo: UNESP, 1991. Dissertação de Mestrado.

JESUS, W. P. de. O método axiomático: uma abordagem intuitiva**. BOLEMA**, ano 14, n.16, 63-78, 2001.

PITOMBEIRA, J. B. O Problema dos três vasos. **Revista do Professor de Matemática** n.**13.** 2º semestre 1988.

TEIXEIRA, M. T. **Comunicação pessoal.** Rio Claro, São Paulo, 1990 (correspondência dirigida a Wilson Pereira de Jesus).

VIANNA, C. C.S. **O papel do raciocínio dedutivo no ensino da matemática.** Rio Claro, São Paulo: UNESP. 1988. Dissertação de Mestrado.

Nota do autor:
Agradecemos ao Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti pelas sugestões e contribuições para a clareza e o rigor nesta versão final do texto e a Elisangela Carneiro pela digitalização das figuras.

Submetido ao Comitê Editorial em 07/11/2006
Aprovado em 26/04/2007