http://dx.doi.org/10.4322/gepem.2015.009

Quantas pétalas tem a rosácea $r = \sin(n\theta)$?

Elisandra Bar de Figueiredo
Professora, Universidade do Estado de Santa Catarina- UDESC
elis.b.figueiredo@gmail.com

Ivanete Zuchi Siple
Professora, Universidade do Estado de Santa Catarina- UDESC
ivazuchi@gmail.com

Resumo
Nesta proposição de aula apresentamos uma abordagem para curvas polares, especificamente sobre o número de pétalas e a variação mínima do ângulo na construção de uma rosácea. Questões interessantes surgem neste contexto, tais como: será sempre necessária uma variação de 0 a 2π para construir a rosácea $r = \sin(n\theta)$? Por que se n é ímpar temos n pétalas e se n é par temos um total de $2n$ pétalas? No intuito de responder tais questões abordaremos a fundamentação teórica e a simulação prática da construção geométrica das curvas com o uso do software de geometria dinâmica GeoGebra.

Palavras-chave: Curvas polares. Rosácea. Geometria Analítica. Cálculo Diferencial e Integral. Tecnologia.

How many petals does the rose $r = \sin(n\theta)$ have?

Abstract
In this lesson proposal, we present an approach for polar curves, specifically on the number of petals and minimal variation of the angle in the construction of a polar rose. Interesting questions arise in this context, such as: is it always necessary to change from 0 to 2π to build the polar rose $r = \sin(n\theta)$? Why if n is odd do we have n petals, and if n is even and we have a total of $2n$ petals? In order to address these issues this paper will discuss the theoretical and practical simulation of geometric construction of curves using the dynamic geometry software GeoGebra.

Keywords: Polar curves. Polar rose. Analytic Geometry. Differential and Integral Calculus. Technology.

Introdução

Existem muitos tipos de sistemas de coordenadas e um dos mais utilizado é o cartesiano. Embora, em muitos casos, é mais simples usarmos o sistema polar, pelas vantagens importantes deste na representação de certas curvas e em problemas relativos a lugares geométricos. Nesse sistema, precisamos de duas informações para descrever um ponto – um ângulo, em graus ou radianos, e a distância entre o ponto e a origem, que chamamos de raio. A importância deste sistema de representação encontra-se em problemas de geometria, navegação, aviação e estudo de movimento de planetas, por exemplo. Nas aplicações de Cálculo Diferencial e Integral este sistema de coordenadas possibilita descrever uma circunferência como o gráfico de uma função, bem como calcular trivialmente, com o uso da integral definida, áreas e perímetros de regiões circulares. Além disso, algumas curvas, tais como as rosáceas, apenas são descritas como funções se usarmos coordenadas polares, e desta forma apenas neste sistema é possível explorar sua área e seu perímetro. Também na natureza muitas formas são mais bem descritas por curvas em coordenadas polares, tais como caracóis, flores e folhas, sendo assim possível explorar estes objetos em termos matemáticos.

Trabalhar com o sistema de coordenadas polares não é uma tarefa simples para os estudantes, haja vista que há uma cultura do sistema de coordenadas cartesiano. O aluno apresenta muitas dificuldades, tanto de reconhecimento da função quanto da sua representação gráfica. Uma maneira de amenizar esta dificuldade é trabalhar em paralelo com os recursos tecnológicos em sala de aula.

A utilização da tecnologia é atualmente imprescindível quando nos referimos ao ensino de matemática e, em particular ao da Geometria. As potencialidades das ferramentas de geometria dinâmica possibilitam aos alunos investigar propriedades das figuras, explorar relações formular e testar hipóteses.

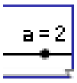
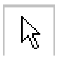
> A tecnologia é essencial no processo da visualização e essa por sua vez ocupa um papel fundamental na compreensão de conteúdos matemáticos (...). Stewart (2008) ao enfatizar a compreensão dos conceitos no ensino de cálculo, lembra que a visualização e as experiências numéricas e gráficas, entre outras ferramentas, alteram fundamentalmente a forma como ensinamos os raciocínios conceituais. A animação proporcionada pelos recursos computacionais constitui um elemento fundamental na visualização de forma que as imagens podem ser dinâmicas e interpretadas pelos alunos em outras formas de produzir o conhecimento (SILVA e FERREIRA, 2009, p. 1)

Entretanto, apenas a utilização das ferramentas tecnológicas no ambiente escolar não garante a melhoria na qualidade do ensino, é importante saber como potencializar esses recursos, de maneira que possibilitem aos alunos um aprendizado mais significativo. Com este objetivo propomos uma sequência didática, com o uso do software GeoGebra, para explorar o número de pétalas e a variação mínima do ângulo na construção de uma rosácea.

Atividade Proposta

Neste trabalho descrevemos uma atividade a ser realizada com alunos de Ensino Superior que cursam as disciplinas de Geometria Analítica ou Cálculo Diferencial e Integral e que tenham conhecimentos prévios de trigonometria e de coordenadas cartesianas e polares. O problema consiste em investigar a quantidade de pétalas das rosáceas de equações $r = \sin(2\theta)$ e $r = \sin(3\theta)$ e a variação mínima do ângulo θ para a construção destas.

Tabela 1: esboço no GeoGebra da rosácea $r = \sin(2\theta)$

Passo	Ferramenta		Descrição
	Ícone	Nome	
1			No campo de entrada digite a função: $r(x) = \sin(2x)$
2	$r(x) = \sin(2x)$ (habilitada) $r(x) = \sin(2x)$ (desabilitada)		Na Janela de Álgebra desabilite a função $r(x) = \sin(2x)$ (clicando sobre a bolinha azul)
3		Controle Deslizante	Insira na janela de visualização a ferramenta Controle Deslizante, selecione a opção Ângulo nomeando θ e delimitando o intervalo de $0°$ a $360°$. Após clique em Aplicar.
4			No campo de entrada digite: Curva $[r(t)\cos(t), r(t)\sin(t), t, 0, \theta]$
5		Mover	Selecione a ferramenta mover e em seguida movimente o “Controle Deslizante”, observando o que acontece.

Questionamentos:

1. Quantas pétalas tem a curva no intervalo de $0 \leq \theta \leq 2\pi$?
2. Qual a variação do ângulo θ para a construção de uma pétala?
3. A curva é simétrica em relação ao eixo x?
4. A curva é simétrica em relação ao eixo y?
5. A curva é simétrica em relação à origem?
6. É necessário variar o ângulo de $0 \leq \theta \leq 2\pi$ para construir a curva completa?
7. O que acontece se alteramos na curva $r(x) = \sin(2x)$ o ângulo para $4x, 6x, 8x$?
8. Qual a conjectura para $r(\theta) = \sin(n\theta)$, com $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}^*$?

Repetir o procedimento, no Geogebra, para a curva $r = \sin(3\theta)$. Na sequência responder os seguintes questionamentos.

1. Quantas pétalas tem a curva no intervalo de $0 \leq \theta \leq 2\pi$?
2. Qual a variação do ângulo θ para a construção de uma pétala?
3. A curva é simétrica em relação ao eixo x?
4. A curva é simétrica em relação ao eixo y?
5. A curva é simétrica em relação à origem?
6. É necessário variar o ângulo de $0 \leq \theta \leq 2\pi$ para construir a curva completa?

7. O que acontece se alteramos na curva $r(x) = \sin(3x)$ o ângulo para $5x, 7x, 9x$?
8. Qual a conjectura para $r(\theta) = \sin(n\theta)$, com $n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{Z}$?

Discussão

O objetivo desta atividade é explorar a variação mínima necessária do ângulo para descrever uma curva completa, bem como a quantidade de pétalas na curva. Geralmente, na Geometria Analítica, em todos os esboços das curvas o aluno faz a variação do ângulo no intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Entretanto, no Cálculo Diferencial e Integral, no que diz respeito às aplicações de integral definida, como por exemplo, no cálculo de área e comprimento em coordenadas polares, a compreensão da variação do ângulo é fundamental. Porém, é comum os alunos apresentarem muitas dificuldades na neste tema, bem como na quantidade de pétalas das rosáceas descritas acima. Explorar as potencialidades dos recursos tecnológicos na representação geométrica de tais curvas, bem como permitir a construção interativa da relação entre domínio e a imagem (variação do ângulo e número de pétalas) pode auxiliar o aluno neste processo, possibilitando ao aluno observar, analisar e conjecturar sobre as relações entre as curvas.

Generalização

Com embasamento matemático, apoiado pelas ferramentas tecnológicas o aluno poderá perceber que:

Caso 1. $r(\theta) = \sin(n\theta)$, com $n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}^*$

Em relação à simetria, considerando $A(\sin(n\theta),\ \theta)$ um ponto no primeiro quadrante, temos (como podemos observar na Figura 1) que a curva é:

- simétrica em relação ao eixo y, pois $\sin(-n\theta) = -\sin(n\theta)$;
- simétrica em relação ao eixo x, pois $\sin(n(\pi - \theta)) = -\sin(n\theta)$;
- simétrica em relação à origem, pois $\sin(n(\pi + \theta)) = \sin(n\theta)$.

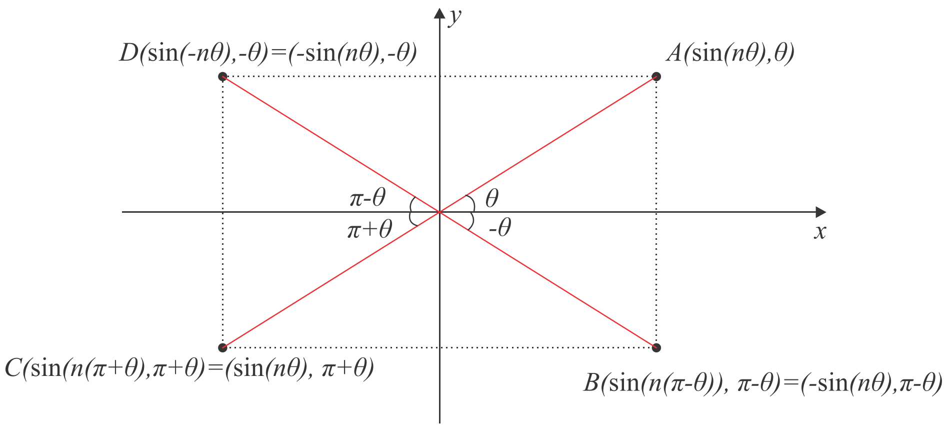


Figura 1: simetrias do ponto $A(\sin(n\theta)\,,\theta)$ com n par.

A partir das simetrias, podemos concluir que a variação mínima do ângulo para descrever toda a curva é $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Além disso, para construir uma pétala a variação do ângulo é $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}$, pois

$$\sin(n\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \; ou \; \theta = \frac{\pi}{n}$$

Portanto, a curva $r(\theta) = \sin\,(n\theta)$ tem $2n$ pétalas.

Caso 2. $r(\theta) = \sin\,(n\theta)$, com $n = 2k + 1,\; k \in \mathbb{Z}$

Em relação à simetria, considerando $A(\sin(n\theta)\,,\;\theta)$ um ponto no primeiro quadrante, temos (como podemos observar na Figura 2) que a curva é simétrica em relação ao eixo y, pois $\sin(-n\theta) = -\sin\,(n\theta)$.

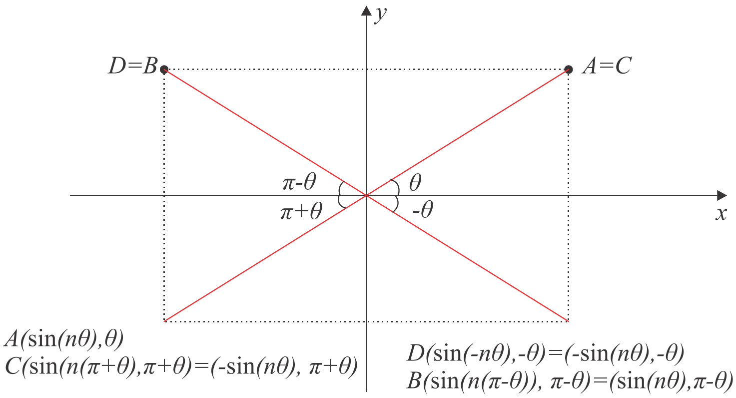


Figura 2: simetrias do ponto $A(\sin(n\theta)\,,\theta)$ com n ímpar.

Além disso, observamos que $\sin\,(-n\theta) = -\sin\,(n\theta)$ garantindo que todos os ângulos pertencentes ao IV quadrante terão sua imagem no II quadrante (na Figura 2: $B = D$) e $\sin\,(n(\pi + \theta)) = \sin\,(n\theta)$ garante que todos os ângulos do III quadrante terão sua imagem no I quadrante (na Figura 2: $A = C$). A partir destas considerações podemos concluir que a variação mínima do ângulo para descrever toda a curva é $0 \leq \theta \leq \pi$. Assim, para construir uma pétala a variação do ângulo é $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}$, pois

$$\sin(n\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \; ou \; \theta = \frac{\pi}{n}$$

Portanto, a curva $r(\theta) = \sin\,(n\theta)$ tem n pétalas.

Considerações

Na atividade proposta, observamos tanto com a utilização da ferramenta tecnológica, quanto pelo uso de propriedades algébricas da trigonometria que nem sempre é necessário variar o ângulo no intervalo de 0 a 2π para construir uma rosácea. Provamos que para uma rosácea da forma $r = \sin\,(n\theta)$ o intervalo mínimo da variação do ângulo depende de n. No caso de n ser um número par necessita-se de uma variação mínima de 0 a 2π, no entanto para n ímpar é suficiente que o ângulo varie no intervalo de 0 a π. Se para descrevermos uma pétala demonstramos que é necessário uma variação $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}$, então quando n é ímpar temos que o número de pétalas será dado pelo intervalo mínimo da variação dividido pela variação de uma pétala, ou seja, $\frac{\pi}{\frac{\pi}{n}} = n$. Da mesma forma quando n é par, obtemos $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{n}} = 2n$. Assim, podemos concluir que o número de pétalas de uma curva do tipo $r = \sin(n\theta)$ será: n pétalas se n for ímpar e $2n$ pétalas, se n for par.

Com observações análogas podemos concluir os mesmos resultados para as rosáceas do tipo $r = \cos(n\theta)$.

Referências

SILVA, J.I.G; FERREIRA, D.H.L. O uso de tecnologias na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. **Anais: XIV Encontro de Iniciação Científica da PUC-Campinas.** 2009. [online] <http://www.puc-campinas.edu.br/websist/portal/pesquisa/ic/pic2009/resumos/2009824_134141_207335402_res08C.pdf>. Acesso em: 01 de outubro de 2012.

VENTURI, J.J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. Curitiba: Editora Unificado, 2009.

STEWART, J. **Cálculo**. 2v. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

HOHENWARTER, M. **Software Livre *GeoGebra***, versão 4.0.32.0 [online]:<http://www.geogebra.org>. Acesso em: 01 de outubro de 2012.

Recebido em outubro de 2012
Aprovado em outubro de 2013