
A compreensão matemática de vetores adquirida por estudantes nas aulas de Física¹

Rafael Filipe Novoa Vaz

IFRJ-CPAR; Projeto Fundação-UFRJ
rafael.vaz@ifrj.edu.br

Magno Luiz Ferreira

IFRJ-CVR; Projeto Fundação-UFRJ
magno.ferreira@ifrj.edu.br

Lilian Nasser

Projeto Fundação-UFRJ
lnasser.mat@gmail.com

Resumo

Devido à fragmentação das disciplinas do Ensino Médio, em algumas situações pré-requisitos não são ofertados de modo a possibilitar uma aprendizagem significativa de algumas disciplinas. Este é o caso dos vetores, conteúdo matemático essencial para o estudo da Física Clássica, e não contemplado nas aulas de Matemática. Os prejuízos que esta ausência pode acarretar para a aprendizagem da Física não são conhecidos; no entanto, pesquisas apontam que a aprendizagem deficitária no estudo vetorial pode prejudicar o desempenho destes estudantes no curso superior de Licenciatura em Matemática. Deste modo, surgiu o seguinte questionamento: os estudantes chegam ao Ensino Superior com carência neste conteúdo porque o Ensino de Física que receberam foi deficitário ou porque a Física não consegue suprir a aprendizagem vetorial que a Matemática poderia oferecer? Para buscar algumas respostas, realizou-se uma investigação em dois campi do Instituto Federal do Rio de Janeiro sobre a aprendizagem de vetores no Ensino Médio.

Palavras-chave: Vetores. Ensino Médio. BNCC.

The mathematical understanding of vectors acquired by students in the lessons of Physics

Abstract

Due to the fragmentation of the disciplines at High School, in some situations, prerequisite are not offered, avoiding the fostering of significant learning ahead. This is the case of vectors, mathematical content essential for the study of the Classic Physics, and not contemplated in the Mathematics lessons. The damages that this absence can cause for the learning of Physics are not

¹ Este trabalho contou com a colaboração dos demais membros do grupo de pesquisa: os professores Bruno do Espírito Santo Batista, Geneci Alves de Sousa, Jeanne Barros, José Alexandre Ramos Pereira, Marcelo André Abrantes Torraca e os estagiários Alan Junior Severo e Juliana Severino Mendonça.

known, but research points that the deficit learning in the study of vectors can harm the performance of these students in a superior course to form Mathematics teachers. This way, the following questioning appeared: the students arrive at Superior Education with a gap in this content because the teaching of Physics they had received was deficient or because the Physics does not supply the vector learning that Mathematics could offer? To search some answers, an inquiry was realized in two campi of Federal Institute of Rio de Janeiro about the learning of vectors at High School.

Keywords: Vectors. High School. BNCC

Introdução

Este trabalho é parte de uma pesquisa mais ampla, com o objetivo de investigar a transição do Ensino Médio para o Superior, procurando caminhos para diminuir as dificuldades apresentadas por alunos nas primeiras disciplinas de Cálculo e Geometria Analítica. A pesquisa foi motivada pelo alto índice de evasão e repetência nessas disciplinas, em Instituições de Ensino Superior, tanto públicas quanto privadas, que tem preocupado pesquisadores de diversos países. Os primeiros olhares desta pesquisa se fixaram na aprendizagem de Cálculo, procurando observar as dificuldades encontradas em conteúdos identificados como obstáculos epistemológicos para a aprendizagem, em particular para a aquisição do conceito de função (SIERPINSKA, 1992). Várias atividades investigativas já foram realizadas (NASSER; SOUSA; TORRACA, 2012, 2015) e os resultados indicam que a maior parte das dificuldades provém de lacunas na aprendizagem de Matemática na Escola Básica. Muitas vezes, os alunos não conseguem resolver um problema de Taxas Relacionadas ou de Máximos e Mínimos, que são típicos da disciplina de Cálculo I, por não conseguirem representar a situação descrita no enunciado por meio de uma função. Nasser (2009) investigou as causas das dificuldades em traçar gráficos, confirmando alguns obstáculos epistemológicos indicados por Sierpinska (1992), como a concepção de que apenas relações representáveis por fórmulas analíticas são dignas de serem chamadas funções, ou que um gráfico é obtido marcando pontos e unindo-os por segmentos de reta.

Professores de Cálculo observam que esse conteúdo é abordado no Ensino Médio (EM) de maneira ingênua e pontual, não contribuindo para a sua retomada de modo mais amplo no Ensino Superior. Em particular, funções do tipo linear e afim poderiam remeter a outros conteúdos como proporcionalidade, progressões aritméticas, matemática financeira ou geometria analítica (estudo do plano cartesiano, vetores e retas, com suas diversas representações). Observando as dificuldades apresentadas por alunos ao chegar à universidade, o grupo começou a questionar o que se ensina de vetores e retas no EM. Para nossa surpresa, verificou-se que “vetores” é um tópico que, em geral,

não faz parte dos currículos de EM de Matemática. Em alguns casos, aparece no currículo de Física, mas, não está claro se os alunos conseguem aplicar esse conhecimento para usar vetores em Matemática.

No desenvolvimento das investigações tomamos conhecimento que o Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (CApUFRJ) adota um ensino diferenciado para a Matemática do Ensino Médio, baseado em vetores. O bom desempenho de seus alunos nas avaliações oficiais, e no vestibular de modo geral, levou à indagação de como tem sido abordado o tópico de vetores no Ensino Médio da rede pública.

Com essa motivação, o grupo passou a investigar a bagagem trazida por alunos de uma turma de primeiro período de Licenciatura em Matemática no que se refere a vetores e representação de retas no plano, por meio de equações e de seus gráficos (NASSER; VAZ; TORRACA, 2015). Os resultados desse trabalho indicam que os conhecimentos de vetores no Ensino Médio foram adquiridos na disciplina de Física. Isso nos motivou a avaliar se esses conhecimentos são usados pelos alunos ao resolver problemas de Matemática.

Referencial teórico

As dificuldades de calouros no início do curso superior foram motivo de diversos trabalhos.

Robert e Schwarzenberger (1991, p. 133) apontam mudanças quantitativas no que se refere aos desafios enfrentados ao iniciar os estudos em Matemática avançada:

mais conceitos, menos tempo, necessidade de mais reflexão, mais abstração, menos problemas significativos, mais ênfase em demonstrações, maior necessidade de aprendizagem versátil, maior necessidade de controle pessoal sobre a aprendizagem. A confusão causada pelas novas definições coincide com a necessidade de mais pensamento dedutivo abstrato. A junção dessas mudanças quantitativas gera uma mudança qualitativa que caracteriza a transição para o pensamento matemático avançado.

Tall (1991) também aponta a falta de domínio do pensamento matemático avançado como uma das causas para um resultado insatisfatório dos alunos nas primeiras disciplinas do Ensino Superior, ao afirmar que “[...] a mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: da descrição para a definição, do convencimento para a demonstração de uma maneira lógica, baseada naquelas definições.” (TALL, 1991, p. 20)

Na aprendizagem de Geometria Analítica são fundamentais a percepção da relação entre os objetos matemáticos e as diversas formas de registro de representação. Esse argumento é corroborado pela teoria de Duval (2009, p. 15), quando ele afirma que

não pode haver compreensão matemática sem se distinguir um objeto de sua representação, pois jamais deve-se confundir objetos matemáticos (números,

funções, retas) com suas representações (escritas decimais ou fracionárias, símbolos, gráficos, desenhos de figuras) que parecem apenas ser o meio, de que o indivíduo dispõe, para exteriorizar suas representações mentais, ou seja, para se tornarem visíveis ou acessíveis a outros, pois, em matemática, as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática.

Por exemplo, uma reta no plano pode ser representada como o gráfico de uma função afim, e pode ser expressa de várias maneiras diferentes, por meio de uma equação cartesiana, vetorial, reduzida ou por equações paramétricas.

Duval distingue dois tipos de transformação nas representações semióticas: o tratamento e a conversão. Damm (2002, p. 145) define o tratamento de uma representação como “a transformação dessa representação no próprio registro onde ela foi formada, é uma transformação interna a um registro”. Por outro lado,

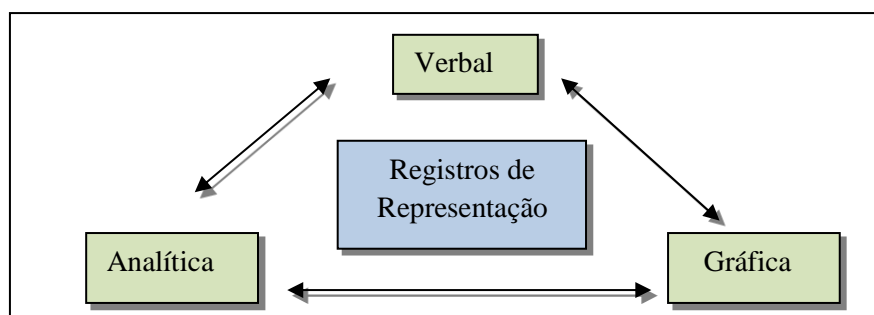
a conversão de uma representação é a transformação desta em uma representação em um outro registro conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático em questão. A conversão não pode ser confundida com o tratamento. O tratamento se estabelece “dentro” do registro, já a conversão se dá entre registros diferentes. (DAMM, 2002, p. 146)

A equação cartesiana de uma reta, por exemplo, pode ser submetida a um tratamento, ao ser transformada em uma equação reduzida. Já a passagem dessa equação para uma tabela ou uma representação gráfica caracteriza uma conversão.

De acordo com Duval (2003, p. 31), “há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato”.

No caso da aprendizagem de funções, a teoria de Duval pode ser resumida à necessidade de levar os alunos a dominar alguns tipos de representação, e a articular a transição entre esses registros, como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Registro de representação da teoria de Duval



Fonte: Elaborada pelos autores.

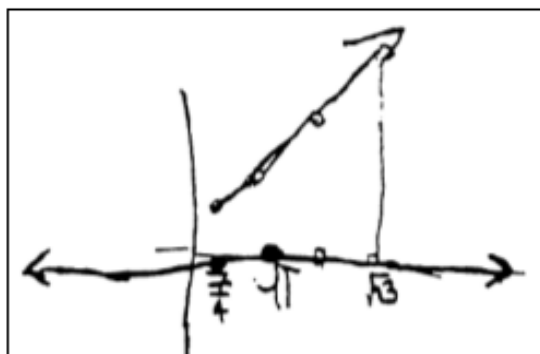
Dallemolle e Groenwald (2012) investigaram a aprendizagem de Geometria Analítica, apontando as dificuldades nas conversões entre os registros de representação semiótica, em particular em aspectos relacionados à visualização, interpretação e abstração.

Even (1990, p.528) também observou dificuldades na transposição entre registros de representação em sua pesquisa. Ela relata a dificuldade de futuros professores em lidar com a

$$\text{função } g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é um número racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ é um número irracional} \end{cases}$$

Na tentativa de traçar o gráfico dessa função, um futuro professor marcou alguns números irracionais no eixo dos x : π , $\sqrt{3}$, $\frac{7}{4}$ (considerando uma fração imprópria como um número irracional) e esboçou uma parte da reta $y = x$ com buracos, conforme ilustrado a seguir. Vale observar, na Figura 2, a associação do gráfico da reta com um vetor.

Figura 2 – Gráfico de um futuro professor para a função $g(x)$



Fonte: (EVEN, 1990, p. 529).

Investigando calouros em Licenciatura em Matemática de um campus do Instituto Federal do Rio de Janeiro, Nasser, Vaz e Torraca (2015) procuraram encontrar algumas das possíveis causas para o alto índice de reprovação em Geometria Analítica naquela instituição. De modo análogo às investigações anteriores, relacionadas às dificuldades na aprendizagem de Cálculo (NASSER; SOUSA; TORRACA, 2012, 2015), a pesquisa apontou para carências em conteúdos relacionados ao Ensino Médio e ao Ensino Fundamental. Foram diagnosticadas dificuldades na compreensão e pouca familiarização no estudo de vetores.

Em sua maioria, os alunos investigados desconhecem a noção de módulo de um vetor, e sua relação com a distância entre dois pontos. Até mesmo a localização de pares ordenados no plano cartesiano parece que não é dominada. Não ficou claro se os alunos fazem a distinção correta entre reta e segmento de reta. (NASSER; VAZ; TORRACA, 2015, p. 10)

Segundo estes pesquisadores, estas lacunas encontradas no trato vetorial acarretam consequências negativas no ensino superior. Foi observado, também, que o conhecimento de

vetores adquirido pelos estudantes foi obtido nas aulas de Física. Este fato pode ser justificado por dois aspectos: os estudantes eram, em sua maioria, oriundos da rede pública estadual de ensino e o currículo mínimo de Matemática da Secretaria Estadual de Educação do Estado do Rio de Janeiro (SEEDUC/RJ) não contempla o ensino de vetores. Em Geometria Analítica, tal documento apresenta as seguintes competências:

Resolver problemas utilizando o cálculo da distância entre dois pontos; identificar e determinar as equações geral e reduzida de uma reta; identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações; determinar a equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecidos o centro e o raio. (RIO de JANEIRO, 2012a, p. 20)

É importante salientar que estudo vetorial compõe um dos pilares da Física estudada no Ensino Médio. Talvez por isso, o conteúdo de vetores venha sendo ensinado por professores de Física, mesmo que não faça parte da própria grade curricular. O Currículo Mínimo da SEEDUC-RJ, por exemplo, aponta algumas Habilidades e Competências para o Ensino de Física no primeiro ano do EM, que possuem como pré-requisitos o estudo de vetores:

Reconhecer o caráter vetorial da velocidade e da aceleração; reconhecer o modelo das quatro forças fundamentais da natureza: força gravitacional, força eletromagnética, força nuclear forte e força nuclear fraca; reconhecer a diferença entre massa e peso e suas unidades de medida. (RIO de JANEIRO, 2012b, p. 5)

Mesmo necessitando de tais pré-requisitos, estas orientações curriculares não mencionam, em trecho algum, que disciplina irá suprir tais necessidades. O mesmo ocorre nas ementas de Matemática e Física, dos cursos do Ensino Médio Técnico Integrado em Mecânica e em Eletrotécnica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Rio de Janeiro (IFRJ).

No que diz respeito a livros texto, Ventura e Almouloud (2013) realizaram uma investigação sobre o conteúdo de Geometria Analítica em sete livros didáticos do Ensino Médio, relatando que apenas o livro “Contextos e Aplicações”, em três volumes, faz referência a vetores.

A inserção de vetores no Ensino Médio pode trazer muitos benefícios para o ensino de Matemática e o ensino de Física. Em Matemática, alguns temas poderiam ser melhor explicados, ou justificados, com uma abordagem vetorial. Consideremos, por exemplo, a condição de alinhamento entre três pontos no plano cartesiano. Sem a utilização de vetores, esta pode ser desenvolvida utilizando proporção, em uma abordagem geométrica. Entretanto, ao relacionar esta fórmula a um determinante, os autores de livros didáticos utilizam um caminho sem justificativas plausíveis para este uso. Há outros exemplos interessantes: o cálculo das coordenadas do baricentro ou da área de um triângulo no plano cartesiano a partir das coordenadas dos seus vértices. Neste último caso, a

demonstração da fórmula que associa esta área a um determinante é longa e cansativa (PAIVA, 2010, p. 122-123).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), proposta pelo MEC, ainda em fase de implementação, apresenta a inserção dos vetores na Matemática do Ensino Médio. Embora na primeira versão o conteúdo de vetores fosse mais abrangente, incluindo, por exemplo, operações com vetores, esse conteúdo é motivo de dois objetivos para o Ensino Médio na segunda versão da BNCC, ainda em discussão:

Compreender o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção de segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto do ponto de vista algébrico, caracterizado por suas coordenadas, aplicando-o em situações da Física.

Estabelecer relações entre as transformações isométricas (reflexão, translação e rotação) e vetores no contexto do plano cartesiano, incluindo o uso de softwares de geometria dinâmica. (BRASIL, 2016, p. 576)

No entanto, esta inserção, ou pelo menos a tentativa de inserção, não é nenhuma novidade. As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2006) já sugeriam a inclusão de vetores na Matemática.

É desejável, também, que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico. (BRASIL, 2006, p. 77)

Este documento mencionava ainda uma distorção no currículo do Ensino Médio, pois este importante tópico do conhecimento matemático estava presente somente nas aulas de Física (BRASIL, 2006). Mesmo após 10 anos do lançamento deste documento, a distorção continua sendo observada nas ementas curriculares de Matemática no Ensino Médio.

Investigando o conhecimento vetorial de estudantes do Ensino Médio

Após a constatação que os estudantes ingressavam no ensino superior sem os pré-requisitos necessários para um melhor desempenho no curso de Licenciatura em Matemática, no que se refere ao conhecimento vetorial, surgiu o seguinte questionamento: os estudantes chegam ao Ensino Superior com carência neste conteúdo porque o Ensino de Física que receberam foi deficitário ou por que a Física não consegue suprir a aprendizagem vetorial que a Matemática poderia oferecer?

Uma premissa importante na construção desta investigação era realizar a pesquisa em uma escola onde os alunos tivessem aulas de Física com a melhor qualidade possível; por isso, foi escolhido o Instituto Federal do Rio de Janeiro. Deste modo, foi realizada uma investigação em

duas turmas de quinto período, em dois campi, do IFRJ, totalizando 42 alunos. As turmas do quinto período já haviam estudado todos os tópicos de Física do Ensino Médio, pois o conteúdo dessa disciplina é dado no Instituto nos quatro primeiros períodos.

Realizou-se então a aplicação de cinco questões referentes a tópicos iniciais do estudo vetorial: as características de um vetor (módulo, direção e sentido), adição de vetores, projeção de um vetor e cálculo do módulo. A opção em utilizar estas questões é uma tentativa de investigar a compreensão destes conteúdos (matemáticos) nas aulas de Física, e se estes alunos poderiam utilizar na Matemática os conteúdos vetoriais estudados em Física.

A Figura 3 apresenta a primeira questão utilizada. O objetivo desta questão era investigar se os estudantes compreendiam que um vetor é definido geometricamente por três características: direção, sentido e módulo.

Figura 3 – Questão 1

Os controladores de tráfego aéreo fornecem informações para os pilotos informando em que direção e sentido eles devem voar. Estas instruções são chamadas de “vetores”. Se estas forem as únicas informações dadas aos pilotos, o nome “vetor” estará sendo usado corretamente? Justifique.

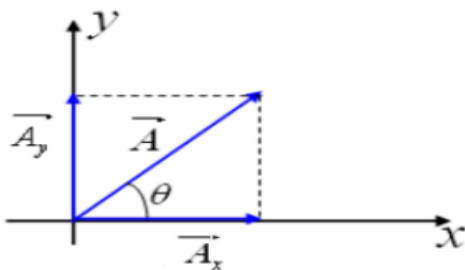


Fonte: Elaborado pelos próprios autores.

A segunda questão (Figura 4) solicitava que os alunos provassem uma relação muito utilizada na Física. O objetivo era investigar paralelamente se os estudantes diferenciam as representações dos vetores das representações de seus módulos.

Figura 3 – Questão 1

Observe as projeções do Vetor A no plano Cartesiano.



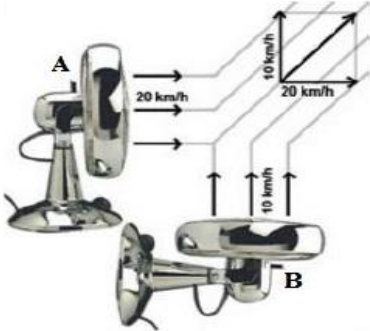
Prove que $|\vec{A}_x| = |\vec{A}| \cdot \cos\theta$

Fonte: Elaborado pelos autores.

A terceira questão (Figura 5) apresentava algumas igualdades e operações entre vetores e entre seus módulos, investigando a capacidade dos estudantes de diferenciá-las. Eles deveriam identificar se cada afirmativa era verdadeira ou falsa.

Figura 5 – Questão 3

Dois ventiladores são posicionados como descrito na figura abaixo.



Considerando os vetores \vec{V}_a (velocidade inicial do vento no ventilador A), \vec{V}_b (Velocidade inicial do vento no ventilador B) e \vec{V}_c o vetor soma de \vec{V}_a e \vec{V}_b , complete as afirmativas abaixo com V ou F

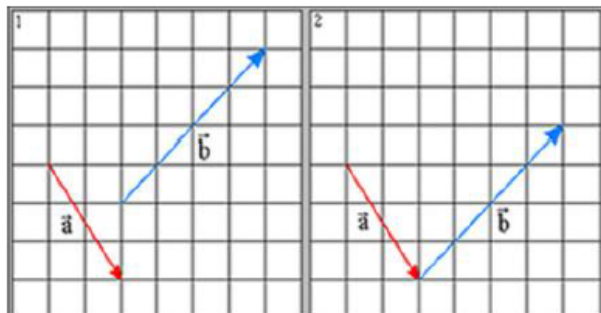
() $|\vec{V}_a| = 2|\vec{V}_b|$
 () $|\vec{V}_b| + |\vec{V}_a| = |\vec{V}_c|$
 () $\vec{V}_c = \vec{V}_a + \vec{V}_b$
 () $|\vec{V}_a| = 2|\vec{V}_b|$

Fonte: Elaborada pelos autores.

A figura 6 ilustra a quarta questão, que solicitava ao aluno a representação do vetor soma no plano cartesiano.

Figura 6 – Questão 4

A figura abaixo representa parte do procedimento para determinar o vetor $\vec{a} + \vec{b}$. Considere as malhas quadriculadas abaixo de lado igual a 1 cm. Represente o vetor resultante ($\vec{a} + \vec{b}$) na segunda malha quadriculada.



Fonte: Elaborada pelos autores.

A questão 5 (figura 7) solicitava que os estudantes calculassem o módulo do vetor \vec{a} a partir da sua representação no plano cartesiano, apresentado na questão 4 (figura 6). Esta resposta requeria a identificação do vetor e a utilização do teorema de Pitágoras.

Figura 7 – Questão 5

Em relação ao item anterior, calcule o módulo do vetor \vec{a}

Fonte: Elaborada pelos autores.

Os Resultados

As soluções obtidas foram analisadas qualitativa e quantitativamente. Apresentaremos aqui os primeiros resultados e algumas considerações sobre estes.

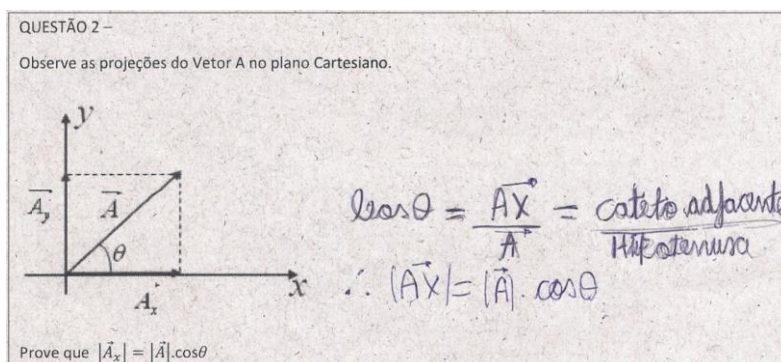
A questão 1

Por falta de atenção ou por desconhecimento, o índice de acertos da questão 1 foi abaixo do esperado, em torno de 26%. A maioria dos alunos pesquisados não foi capaz de observar que, além da direção e sentido, o módulo também é uma característica de cada vetor. Tal índice talvez seja influenciado por não ser uma questão direta, tal como “Quais são as três grandezas que caracterizam um vetor?”.

A questão 2

Essa questão apresentou um alto índice de acertos (74%). No que se refere aos aspectos qualitativos, algumas soluções permitem tecer algumas suposições a respeito do conhecimento dos estudantes: 43% dos alunos resolveram a questão de forma parcialmente correta, utilizando a relação trigonométrica necessária para a resolução da questão. Porém, utilizaram esta relação sem especificar que trabalhavam com o módulo de vetores, apresentando uma divisão vetorial, como mostra a solução que consta da figura 8. Esse comportamento permite supor que alguns alunos não fazem distinção, ou têm dificuldades em distinguir, as representações de um vetor e o do seu módulo.

Figura 8 – Divisão entre vetores



Fonte: Elaborada pelos autores.

A questão 3

A tabela 1 mostra a porcentagem de respostas corretas a cada afirmativa da questão 3. Nenhum aluno deixou opções em branco.

Tabela 1 – Percentual de acertos da questão 3

Afirmativa	Verdadeira ou Falsa	Porcentagem de acertos
$\vec{V}_a = 2\vec{V}_b$	F	43%
$ \vec{V}_b + \vec{V}_a = \vec{V}_c $	F	69%
$\vec{V}_c = \vec{V}_a + \vec{V}_b$	V	38%
$ \vec{V}_a = 2 \vec{V}_b $	V	67%

Fonte: Elaborada pelos autores.

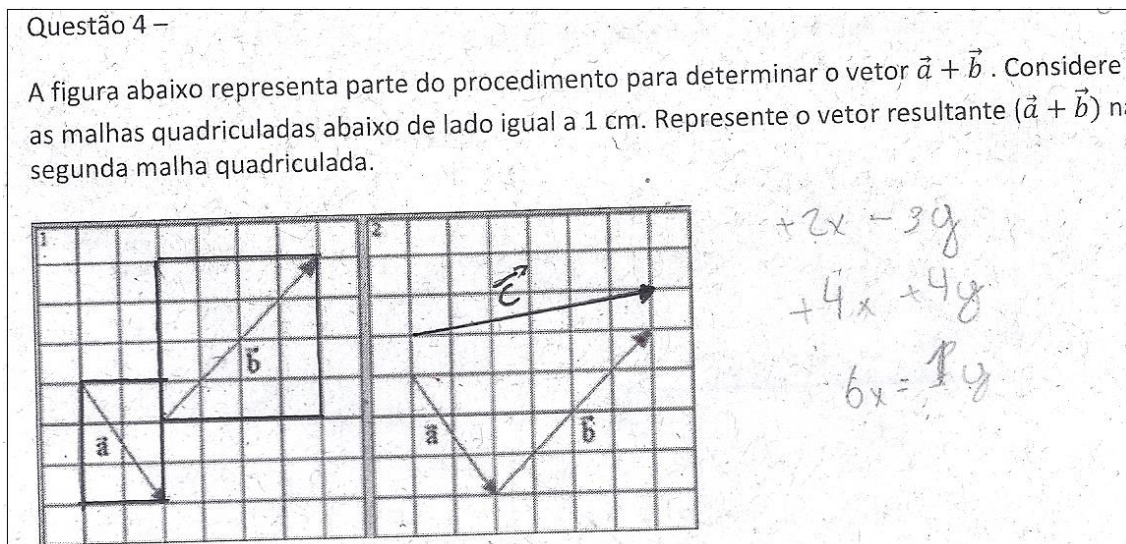
Para responder à questão 3 bastava dizer se cada afirmativa era verdadeira ou falsa, sem apresentar cálculos ou justificativas. A primeira afirmava que o vetor V_a era o dobro do vetor V_b , enquanto a quarta afirmativa indicava que o módulo de V_a era o dobro do módulo de V_b . Apenas 43% dos alunos do 5º período perceberam que a primeira afirmativa era falsa, já que os vetores tinham direções distintas, apesar de que a velocidade representada pelo primeiro vetor era de fato o dobro da velocidade representada pelo segundo vetor. Já a quarta afirmativa, que relacionava corretamente os módulos dos vetores, alcançou 67% de acertos. As outras duas afirmativas se referiam à soma dos vetores ou à soma de seus módulos. Apenas 38% dos alunos perceberam que a terceira afirmativa era verdadeira, apesar de esta repetir a informação dada no enunciado. No entanto, 56% dos alunos responderam corretamente que a segunda era falsa, percebendo que o módulo do vetor soma não corresponde, em geral, à soma dos módulos dos vetores.

Ao observar os resultados encontrados nesta tabela, podemos imediatamente associar um maior índice de acertos às igualdades que faziam referência aos módulos dos vetores. A incapacidade de reconhecer o vetor resultante como uma soma de vetores (3ª afirmação) por parte de 62% dos alunos mostra que os mesmos apresentam dificuldades na compreensão dos conceitos e características dos vetores. Estes resultados denotam uma carência de uma abordagem mais específica em relação aos vetores, e evidenciam a dificuldade, já mencionada, em diferenciar vetores de seus módulos.

A questão 4

Esta questão apresentou um baixo índice de acertos (17%) e um grande número de respostas em branco (36%), talvez porque os exercícios de Física se concentrem prioritariamente nos cálculos algébricos e os estudantes tenham pouca habilidade no manejo vetorial no plano cartesiano. Dentre os raros estudantes que acertaram a questão, uma resposta é apresentada na figura 9.

Figura 9 – Solução gráfica de adição vetorial



Fonte: Elaborada pelos autores.

Dois pontos importantes podem ser destacados nesta solução:

(i) a solução algébrica apresentada por este estudante não possui características de ter sido aprendida em aulas de Matemática, e sim, indicam uma possível transposição de um conteúdo aprendido nas aulas de Física;

(ii) o aluno não posiciona o vetor resultante “se unindo” aos vetores \vec{a} e \vec{b} , como era esperado em uma solução geométrica, podendo caracterizar um aspecto positivo e/ou um negativo. O positivo é que o aluno parece saber que um vetor não possui uma posição definida, sendo um “conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes” (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p.4). O negativo é que talvez desconheça como realizar uma soma vetorial geometricamente no plano cartesiano.

A questão 5

Para resolver a questão 5, os alunos deveriam utilizar o Teorema de Pitágoras para determinar o módulo de \vec{a} . A questão também apresentou um índice baixo de acertos (26%) e um alto de respostas em branco (33%).

Considerações Finais

O Ensino Médio no Instituto Federal do Rio de Janeiro possui disciplinas desconectadas, característica das escolas no Brasil. Os estudantes se deparam com gráficos de movimentos uniformes e movimentos uniformemente variados antes mesmo de estudarem funções afim e quadrática que, respectivamente, caracterizam estes movimentos. Os vetores são estudados em Física e não em Geometria Analítica. Mesmo se o tópico de vetores fosse estudado nesta última, seria inútil na contribuição da aprendizagem em Física, pois tal disciplina é ministrada somente no final do quinto período. É importante destacar que a BNCC pode, e provavelmente irá contribuir para a resolução ou, pelo menos, para amenizar tais discrepâncias no currículo brasileiro do Ensino Médio.

A partir dos dados coletados, identificamos que um conhecimento matemático foi bem compreendido pelos estudantes: a relação trigonométrica necessária para resolver a questão 2 (74% de acertos). De modo geral, nas demais questões ficou claro que o conceito e algumas propriedades vetoriais não foram bem compreendidas pelos alunos, dentre elas, destacam-se a diferenciação entre um vetor e seu módulo. Não foi possível perceber se os estudantes conseguem realizar alguma transposição do conhecimento aprendido nas aulas de Física para a Matemática, pois esta transposição de conhecimento foi rara nas atividades apresentadas.

Por enquanto, consideramos que o ensino vetorial deva ocorrer, pelo menos inicialmente, nas aulas de Matemática. Em relação à possível transposição de conhecimentos aprendidos na aula de Física para a Matemática, sugerimos a realização de futuras investigações, explorando melhor a complexidade e a relevância do assunto. Apontamos para a necessidade de pensarmos o currículo e o Ensino Médio de forma democrática e colaborativa.

Referências

BRASIL. **Ministério da Educação e Cultura. Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2016. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf>>. Acesso em 01 jul 2016.

_____. **Ministério da Educação e Cultura Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** Brasília: MEC/SEB, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em 01 jul 2016.

DAMM, R. F. **Registros de representação.** In: MACHADO, S.D. et al. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo, EDUC, 2002, p.135-153.

DALLEMOLE, J. J. e GROENWALD, C. L. O. **Registros de Representação Semiótica na Geometria Analítica e o Sistema SIENA.** Atas do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. SBEM: Petrópolis, RJ, Brasil, 2012.

- DUVAL, R. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática.** In: MACHADO, Silvia D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Papirus, p. 11-33, 2003.
- DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- EVEN, R. **Subject matter knowledge for teaching and the case of functions.** *Educational Studies in Mathematics*, 21, p. 521-544, 1990.
- NASSER, L. **Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos.** In: Frota, M.C.R. e Nasser, L (org.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*, SBEM, p. 43-58. 2009.
- NASSER, L., SOUSA, G. & TORRACA, M. **Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em Cálculo?** In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, V, 2012, Petrópolis, *Atas*. Rio de Janeiro, SBEMRJ, 2012.
- NASSER, L., SOUSA, G. & TORRACA, M. **Aprendizagem de cálculo: dificuldades e sugestões para a superação.** In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutierrez. *Atas do XIV CIAEM*, Tuxtla Gutierrez, México, 2015.
- NASSER, L. VAZ, R. & TORRACA, M. **Transição do Ensino Médio para o Superior: Investigando Dificuldades em Geometria Analítica.** In: VI SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2015, Pirenópolis. *Atas do VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*(em CD). SBEM: Pirenópolis, GO, 2015.
- PAIVA, M. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2010.
- RIO DE JANEIRO. Secretaria de Estado de Educação e Cultura. **Currículo Mínimo de Matemática.** 2ed. Rio de Janeiro, 2012a.
- _____. Secretaria de Estado de Educação e Cultura. **Currículo Mínimo de Física.** Rio de Janeiro, 2012b.
- ROBERT, A. e SCHWARZENBERGER, R. **Research in teaching and learning Mathematics at an advanced level.** In: David Tall (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- SIERPINSKA, A. **On understanding the notion of function.** In: DUBINSKY, E; HAREL, G (Ed.) *The Concept of Function: aspects of epistemology and Pedagogy*. MAA Notes, 1992, p.25-58.
- STEINBRUCH, A.& WINTERLE, P. **Geometria Analítica.** São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- TALL, D. (Ed.) **Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- VENTURA, K. & ALMOULOU, S. **Análise de Conteúdos de Geometria Analítica em Livros Didáticos de Ensino Médio.** In: VI CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 2013, Canoas. *Atas do VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática*. Canoas, RS, Brasil, 2013.

Submetido em janeiro de 2017
Aprovado em março de 2017