# Integral definida na geometria: tarefas para o cálculo de volumes

**André Luis Trevisan**
Docente, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR, campus Londrina.
andrelt@utfpr.edu.br

**Higgor Henrique Dias Goes**
Graduando, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR, campus Londrina.
higgorhenrique05@gmail.com

**Resumo**
A proposta de tarefas aqui apresentada explora uma das aplicações do cálculo integral de uma variável: o volume de sólidos gerados a partir da revolução de uma curva em relação a um eixo. Além do auxílio de recursos tecnológicos para a visualização, a tarefa intenta relacionar tópicos da geometria espacial como ponto de partida para a obtenção de uma fórmula geral do volume de um sólido gerado pela revolução de curvas quaisquer.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Tarefas matemáticas. Recursos tecnológicos.

# Definite integral in geometry: tasks for calculating the volume

**Abstract**
This tasks runs one of the applications of a variable integral calculation: volume solids generated from the revolution of a curve about an axis. Besides the aid of Technological resources for the visualization, the task tries to relate the spatial geometry topics as a starting point for obtaining a formula of the volume of the solid generated by the revolution of any bends.

**Keywords:** Mathematics Education. Teaching Differential and Integral Calculus. Mathematical tasks. Technological resources.

## Introdução

Nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, os estudantes precisam ter um papel ativo trabalhando, sempre que possível, em grupos e em tarefas não precedidas pela apresentação de uma definição ou exemplo similar. O papel do professor é incentivá-los a apresentar e discutir suas ideias durante as realizações das tarefas, e conduzir a sistematização dos conceitos subjacentes. Assim, antes de introduzir um conceito mediante sua definição formal, o estudante é convidado a explorá-lo intuitivamente. Tais elementos constituem o que estamos denominando *ambientes de ensino e aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas*. Ao pensar o desenho das tarefas, destacamos a importância da incorporação de recursos tecnológicos. Concordamos com Borba, Silva e Gadanidis (2015, p. 48) quando propõem a noção de *experimentação com tecnologias* como "o uso de tecnologias informáticas no estudo de conceitos ou na exploração de problemas matemáticos".

Neste contexto, apresentamos uma proposta para aulas de Cálculo Diferencial e Integral 1 (CDI-1), inspirada nas ideias de Freudenthal (1973, 1991). Para ele, o ensino dessa disciplina deveria ser precedido pela exploração qualitativa, intuitiva e informal de ideias como taxa de variação e áreas sob curvas, por meio de abordagens gráficas e numéricas, gradativamente refinadas. Volumes e áreas, densidades, velocidades e outros conceitos físicos e cinemáticos podem ser calculados de forma intuitiva sem que definições mais gerais tenham sido apresentadas.

## Proposta de tarefa

São propostas duas tarefas (Figuras 1 e 2) que têm como público-alvo estudantes de CDI-1 já "apresentados" ao conceito de integral definida de uma função potência por meio, por exemplo, do método da exaustão (TREVISAN; GOES, 2016).

Sua organização por meio de questões do tipo "aberto controladas" leva os estudantes a transporem conceitos aprendidos em um contexto (área do segmento parabólico) para outro (volume de sólidos de revolução). A mediação pelas potencialidades de recursos tecnológicos faz com que assuma um caráter de descoberta/reinvenção (FREUDENTHAL, 1973, 1991).

**Figura 1 – Tarefa 1**

Um **sólido de revolução** é gerado pela rotação de uma região plana em torno de uma reta no mesmo plano da região. A reta é denominada eixo de rotação.

1. Em cada caso, esboce o sólido obtido pela rotação, em torno do eixo $x$, da região delimitada pela função dada no intervalo $[0, b]$.

i) $f(x) = x^0$ ii) $f(x) = x$ iii) $f(x) = x^2$ iv) $f(x) = \sqrt{x}$

2. Utilizando conhecimentos de Geometria Espacial, determine em termo de $b$, fórmulas para o volume dos dois primeiros sólidos. Levante alguma hipótese sobre o volume dos demais.

Fonte: Elaborada pelos autores.

**Figura 2 – Tarefa 2**

Execute o aplicativo [figura abaixo]. Movimente o seletor **n** e observe o que acontece nas duas telas. **Seja** $f(x) = x^2$ **e o intervalo** $[1,3]$.

**a)** O que está sendo representado nesse aplicativo? Descreva.

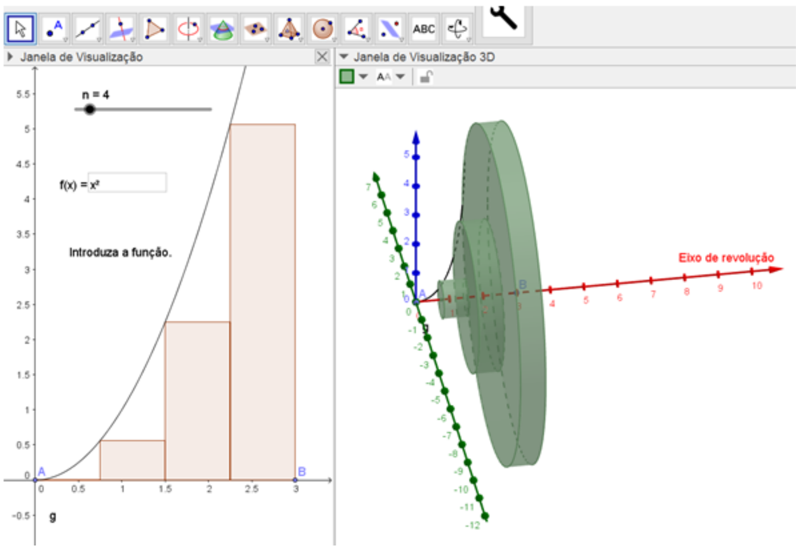
**b)** Adote $n = 4$. Represente, na forma de Soma de Riemman, a aproximação do volume do sólido. Calcule essa soma.

**c)** É possível melhorar a estimativa obtida no item anterior.

i) Explique como.

ii) Apresente uma integral resultante desse processo.

iii) Utilize sua "descoberta" para avaliar a hipótese levantada na parte 1 da tarefa.

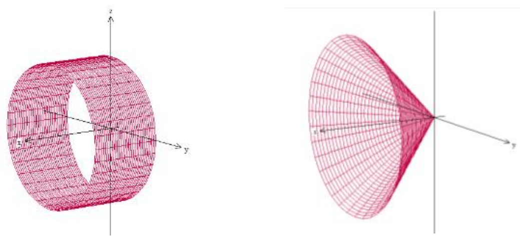



Fonte: Elaborada pelos autores.

## Discussão

Na Tarefa 1, para calcular o volume dos sólidos dos itens (i) e (ii), os estudantes podem utilizar fórmulas usualmente vistas no Ensino Médio: na primeira situação um cilindro e na segunda um cone (Figura 3), ambos retos e com altura $b$. O raio da base do cilindro será 1 e do cone será a ordenada do ponto de abscissa $b$ (no caso, $b$).

**Figura 3 – Volume dos sólidos.**

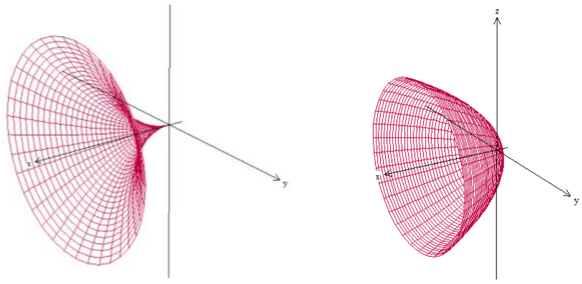


cilindro cone

Fonte: Elaborada pelos autores.

São então instigados a buscar algum padrão nas fórmulas dos volumes desses dois sólidos: ambos calculados pelo produto da área da base e altura, sendo no cone multiplicado por $\frac{1}{3}$. Então, para $f(x) = x^0$ o volume é $\pi b$ e para $f(x) = x^1$, é $\pi \dfrac{b^3}{3}$. Do esboço dos sólidos dos itens (iii) e (iv) (Figura 4), observa-se que volume é menor quando aumenta o expoente da função $f(x) = x^n$, e o padrão sugere uma expressão da forma $\pi\frac{b^p}{p}$, com $p$ desconhecido e passível de investigação (por meio da Tarefa 2).

**Figura 4 – Sólidos obtidos pela rotação de funções.**



$\mathbf{f(x) = x^2}$ $\mathbf{f(x) = \sqrt{x}}$

Fonte: Elaborada pelos autores.

Dispondo de arquivo do Geogebra, os estudantes são então convidados a confrontar seus esboços iniciais com uma construção na qual é possível alterar tanto a expressão da função quanto o intervalo em $x$ que delimita a região a ser rotacionada. O controle deslizante permite visualizar o fatiamento do sólido e contribui na elaboração de um modelo de aproximação do volume utilizando Somas de Riemann. Cada fatia "infinitesimal" é aproximada por um cilindro, com volume igual ao produto da área de sua seção transversal (um círculo de área $\pi[f(x)]^2$) pela altura "infinitesimal" $\Delta x$. O volume do sólido por ser aproximado por $\sum_{i=1}^{n} \pi[f(xi)]^2 \ \Delta x$.

Analisando o que acontece quando tomamos valores de $n$ "muito grandes" (o que pode ser feito de modo intuito, com auxílio de controle deslizante que indica o número de retângulos da subdivisão – sem necessidade de formalização do conceito de limite), inferimos que o volume converge com valor exato $\int_0^b \pi[f(x)]^2\, dx$.

Por fim, podem confrontar suas hipóteses iniciais com os resultados obtidos a partir desse processo de generalização. No caso particular em que $f(x) = x^n$, $n \in IN$, o volume será $\pi\frac{b^{2n+1}}{2n+1}$, resultado de $\pi\int_0^b (x^n)^2 dx$. Uma discussão quanto à extensão desse resultado para o caso $n \in \Re$ pode ser fomentada a partir da investigação da validade dessa fórmula para o caso em que $f(x) = \sqrt{x}$.

Como "fechamento", uma discussão sobre as condições de validade da fórmula construída (no caso, para funções quaisquer contínuas no intervalo $[0,b]$) e outras investigações considerando novas configurações (um intervalo $[a,b]$; sólidos gerados a partir da rotação de regiões delimitadas por duas curvas; sólidos que tenham "buraco"; rotação em torno de outros eixos) podem ser realizadas.

## Considerações finais

Do processo de elaboração das tarefas destacamos alguns elementos que consideramos importantes na organização de um ambiente de aprendizagem para aulas de CDI *pautado em episódios de resolução de tarefas*: i) ao invés de uma sequência de "exercícios" de aplicação de uma fórmula previamente "exposta", propõe-se aqui um trabalho com situações que, gradativamente, possibilitam a "reinvenção" de conceitos; ii) a atitude do professor, enquanto "instigador" por meio de questionamentos torna possível pensar um ambiente de aprendizagem na qual se desenvolvem competências para a resolução de problemas; iii) há possibilidade de os estudantes organizarem matematicamente fenômenos, dos quais a formalização é uma consequência do trabalho gradativo (e não uma condição inicial necessária).

Lançamos mão de recursos tecnológicos que, associados à proposição de tarefas do tipo "aberto controladas", assumem um papel fundamental na elaboração e no desenvolvimento de nossa proposta didática, oferecendo "caminhos propícios para processos como a formulação de conjecturas, realização de testes, refinamento de conjecturas, familiarização com notações" (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015, p. 55).

## Agradecimentos

Agradecemos à Fundação Araucária e ao CNPq (Processo 457765/2014-3).

## Referências

BORBA. M.C.; SILVA, R.S.R; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática, Sala de aula e internet em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

______. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

TREVISAN, A. L.; GOES, H. H. D. O método da exaustão e o cálculo de áreas: proposta de uma tarefa com auxílio do GeoGebra. **Educação Matemática em Revista** (São Paulo), v. 52, p. 79-85, 2016.

Submetido em julho de 2017
Aprovado em setembro de 2017