Explorando a Sequência de Padovan mediante investigação histórica e abordagem epistemológica

Renata Passos Machado Vieira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
re.passosm@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
fregis@ifce.edu.br

Resumo
No presente texto, exibimos algumas possibilidades para formalizar o conteúdo matemático e um contexto histórico, referente a uma sequência numérica de forma linear e recorrente, conhecida como Sequência de Padovan ou Cordonnier. Ao longo do texto são discutidas algumas definições, a abordagem matricial e a relação desta sequência com o número plástico. A exploração explícita dos possíveis caminhos utilizados para formalizar o assunto matemático explorado, vem com um caráter epistemológico, conservando ainda a intenção exploratória desses números e sempre cuidando do rigor matemático abordado.

Palavras-chave: Sequência de Padovan. Matriz Geradora. Fórmula de Binet.

Exploring the Padovan Sequence through Historical Research and Epistemological Approach

Abstract
In the present text, we present some possibilities to formalize the mathematical content and a historical context, referring to a numerical sequence of linear and recurrent form, known as Sequence of Padovan or Cordonnier. Throughout the text some definitions are discussed, the matrix approach and the relation of this sequence with the plastic number. The explicit exploration of the possible paths used to formalize the explored mathematical subject, comes with an epistemological character, still conserving the exploratory intention of these numbers and always taking care of the mathematical rigor approached.

Keywords: Padovan Sequence. Generating Matrix. Binet's formula.

Introdução

Visando a compreensão e o entendimento adequado acerca do processo de evolução e generalização das ideias matemáticas, algumas podendo ser registradas por intermédio da percepção de exemplos,pode-se observar este processo e realizar uma discussão em torno dos números de Padovan. De acordo com Padovan (2002), a natureza pode ser considerada como algo indescritível e insondável, e, a ciência e a arte são como uma espécie de abstrações que tentamos compreendê-las.

A Sequência de Padovan é lembrada pelos números (1,1,1,2,2,3,4,5,...), pela recorrência $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ e pela equação característica $x^3 - x - 1 = 0$, possuindo ainda origens históricas na Segunda Guerra Mundial, e sendo comparada a outra sequência recorrente conhecida como Sequência de Fibonacci, porém esta última é de 2ª ordem.

Além do mais, abordaremos sobre o número híbrido, o qual é denotado por K e contém três sistemas numéricos juntos, sejam eles os números complexos, duais e hiperbólicos, estados combinados e mistos esses tipos de três números, e apresentaremos a definição dos números híbridos, como os números híbridos se comportam quanto as operações e sua definição da forma matricial.

Definições e Contexto Histórico

Iniciando os estudos desta sequência, definiremos a sua fórmula de recorrência.

Definição 1. Para $n \in \mathbb{N}$, a Sequência da Padovan ou Cordonnier é obtida por meio da fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} P_0 = P_1 = P_2 = 1; \\ P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3; \end{cases}$$

De posse dessa recorrência, podemos descrever a solução (1,1,1,2,2,3,4,5,...) como sendo uma sequência de 3ª ordem, denominada abreviadamente como (P_n), e sendo o conjunto que o compõem, como os números de Padovan ou Cordonnier. Alguns outros valores de inicialização diferentes da definição desta sequência podem ser atribuídos. Doravante, utilizaremos a terminologia Sequência de Padovan ou Cordonnier e a notação (P_n) representando a mesma sequência ao longo do texto.

Assim, a sequência de Padovan a qual o nome foi atribuído pelo arquiteto italiano Richard Padovan (1935 - ?), nascido na cidade de Pádua (STEWART, 1996), é uma espécie de parente de uma outra mais conhecida, como Sequência de Fibonacci, aritmética e de números inteiros. Gérard Cordonnier (1907 – 1977), cuja a imagem é lembrada na Figura 1, também desenvolveu alguns estudos acerca destes números, mais especificamente sobre o número plástico (número radiante); com isso a sequência também é conhecida como Sequência de Cordonnier.

Richard Padovan nasceu em 1935 e estudou arquitetura na Architectural Association, Londres (1952-57). Ele acreditava, no entanto, que sua verdadeira educação voltada para a arquitetura começou quando encontrou o trabalho e pensamento do arquiteto holandês Dom Hans van der Laan, em 1974. Em 1999, ele publicou Proportion: Science, Philosophy, Architecture. Seu último livro, Rumo à Universalidade: Le Corbusier, Mies e De Stijl, em 2002, contrasta os grandiosos ideais filosóficos do modernismo europeu. Gérard Cordonnier nasceu em 7 de abril de 1907 em Bailleul (Norte), e morreu subitamente em Lhez, nos Altos Pirineus, por acidente de estrada, em 12 de julho de 1977.

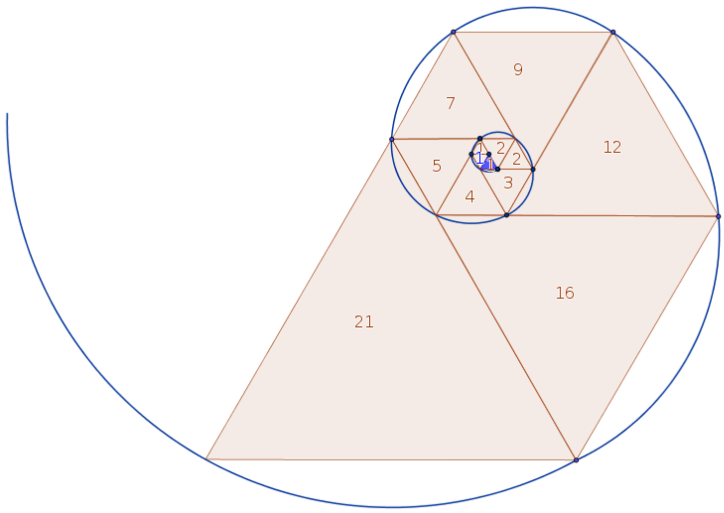
Figura 1 – Gerard Cordonnier

Fonte: Google Imagens

Pode-se destacar o holandês Hans Van Der Laan (1904 - 1991) que conduziu o curso de arquitetura na Technische Hogeschool de Delf. Utilizou a basílica cristã primitiva de abadia como exemplo para treinar arquitetos na reconstrução de igrejas após a Segunda Guerra Mundial (VOET; SCHOONJANS, 2012). Laan e seu irmão buscavam padrões para a arquitetura mediante experimentos com pedras e depois com materiais de construção, e acabaram por descobrir um novo padrão de medidas em que a construção se dava por intermédio de um número irracional, ideal para se trabalhar em escala geométrica e objetos espaciais (retângulos, trapézios, elipses, e etc). Este número é conhecido como número plástico ou número radiante, e foi estudado primeiramente por Gérard Cordonnier. Uma analogia é feita do número plástico em relação à música: na música podem-se tocar acordes, com o número radiante é possível compor paredes, salas e etc.

Uma representação geométrica em 2D de Padovan (Figura 2) foi desenvolvida no *software* Geogebra para explorar a geometria desta sequência. Esta é composta pela justaposição de triângulos equiláteros respeitando uma regra de construção característica. Considere o triângulo de lado 1 destacado em azul como o triângulo inicial. A formação da espiral se dá pela adição de um novo triângulo equilátero ao maior lado do polígono formado, inicialmente o triângulo azul. Após a adição dos demais triângulos é formado um novo polígono, conhecido como pentágono plástico. A espiral se apresenta ao conectar com um arco duas extremidades do novo triângulo adicionado.

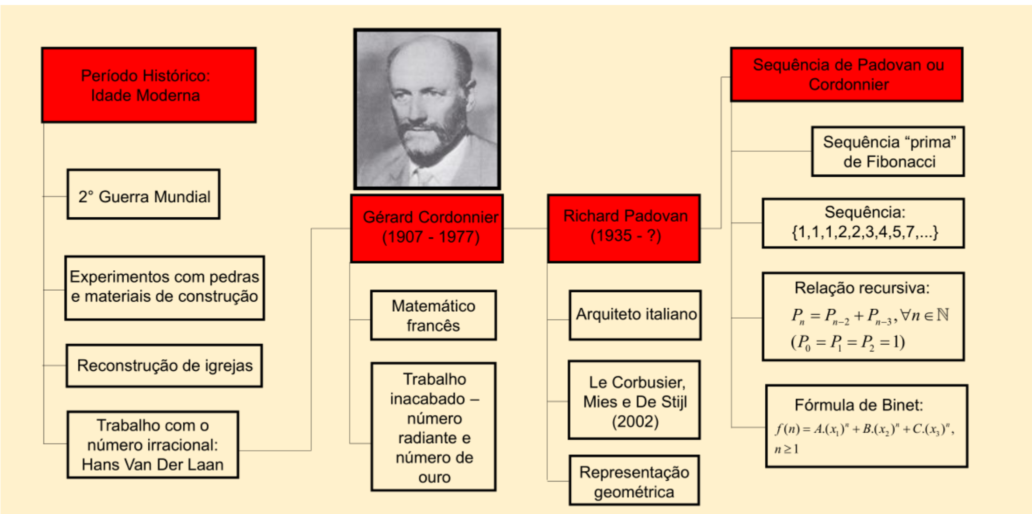
Figura 2 – Espiral de Padovan



Fonte: Elaborado pelos autores.

A seguir é feita uma abordagem do campo epistêmico-matemático referente à sequência de Padovan, permitindo assim a realização de uma investigação histórica (Figura 3).

Figura 3 – Campo Epistêmico-Matemático



Fonte: Elaborado pelos autores.

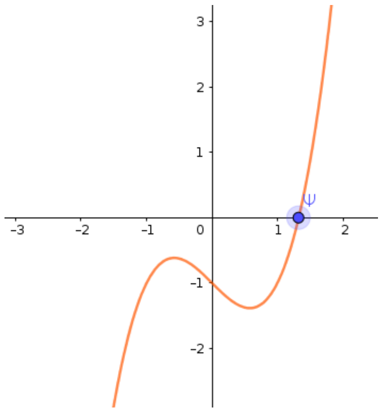
Relação com o número plástico

Assim como acontece na Sequência de Fibonacci, relacionada ao número de ouro, uma famosa constante matemática, utilizada na arquitetura devido a sua presença recorrente em estruturas simétricas, a Sequência de Padovan, também é relacionada a um número, chamado de número plástico (BELINI, 2015).

A equação característica de Padovan foi obtida considerando a relação de recorrência para o lado direito, obtendo $\frac{P_n}{P_{n-2}} = 1 + \frac{P_{n-3}}{P_{n-2}}$. Logo, $\frac{P_n}{P_{n-1}} . \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} = 1 + \frac{1}{\frac{P_{n-2}}{P_{n-3}}}$. Admitindo que o limite existe, tem-se que: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = \psi$para $n \geqslant 1$. Passando o sinal do limite na igualdade: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} . \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{\frac{P_{n-2}}{P_{n-3}}}$. Logo: $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n . \psi_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{\psi_{n-2}} = \psi$. Assim, pode-se determinar que: $\psi . \psi = 1 + \frac{1}{\psi}$ determinando a seguinte equação polinomial da Sequência de Padovan $\psi^3 - \psi - 1 = 0$, ou seja $x^3 - x - 1 = 0$ (SAHIN, 2017).

A equação polinomial, $\psi^3 - \psi - 1 = 0$, por ser de terceira ordem, possui duas raízes complexas e uma raiz real. Isso também pode ser verificado ao definirmos o lugar geométrico da função: $f(\psi) = \psi^3 - \psi - 1$ (Figura 4).

Figura 4 – Gráfico da equação característica de Padovan



Fonte: Elaborado pelos autores.

Uma vez que esta equação apresentada não é da forma cúbica completa, pode-se utilizar a fórmula de Cardano para encontrar suas raízes. Considere esta equação do tipo $\psi^3 + p\psi + q = 0$ e sua relação com a polinomial de Padovan; pode-se definir a raiz de um polinômio cúbico não completo por meioa fórmula:

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{r^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{r^3}{27}}}.$$

Assim para $p = q = -1$, obtém-se:

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{-(-1)}{2} + \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-(-1)}{2} + \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} - \frac{(-1)^3}{27}}}$$

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx 1{,}324717957244746...$$

A razão de convergência ψ é definida como $\psi = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} \approx 1{,}32$ e para Padovan, considerando os seus termos, temos que $\psi = \frac{P_{12}}{P_{11}} = \frac{49}{37} \approx 1{,}32$; pode-se, então, notar a proximidade entre a razão de convergência ψ e a raiz do polinômio de Padovan.

Abordagem Matricial

Uma forma de obter qualquer elemento de uma sequência linear e recursiva é mediante a Matriz Geradora Q. Esta técnica foi aplicada para a SF, e nesta subseção a mesma ideia será aplicada para os números de Padovan (FALCON; PLAZA, 2007).

Os números de Padovan possuem uma Matriz Q de ordem 3x3, a qual, quando elevada a n-ésima potência, pode-se obter o n-ésimo termo desta sem o cálculo da recursividade. A relação matricial pode ser representada pela matriz introduzida por Sokhuma (2013) e Seenukul (2015).

Teorema 1. Para $n \geq 1$, temos que a matriz geradora Q de Padovan com os valores iniciais $P_0 = P_1 = 0, P_2 = 1$, é dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{bmatrix}$$

Assim, temos:

$$Q^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ Q^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ Q^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita, temos que n = n+1

$$Q^{n+1} = Q^n . Q^1$$

$$Q^{n+1} = \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^{n+1} = \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1}+P_n & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_n+P_{n+1} & P_{n+2} \\ P_{n+2} & P_{n+1}+P_{n+2} & P_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \\ P_{n+2} & P_{n+4} & P_{n+3} \end{bmatrix}$$

□

Para facilitar os cálculos, foram considerados outros termos iniciais da sequência, fazendo com que esta esteja um pouco atrasada, porém não havendo prejuízo matemática e histórico em relação aos números de Padovan.

Outras cinco matrizes geradoras de Padovan foram encontradas por Seenukul (2015) permutando as linhas e colunas desta matriz representada no Teorema 1. Para a obtenção dessas matrizes é necessário realizar a permutação das linhas e colunas seguindo a mesma regra, ou seja, se permutar a linha dois com a linha três, também haverá a necessidade de permutar a coluna dois com a terceira coluna, tornando assim uma matriz geradora válida de Padovan.

A Fórmula de Binet

Agora iremos explorar a existência de uma fórmula explícita para o cálculo do n-ésimo termo da sequência, sem depender da recorrência, por meio da fórmula de Binet. Para que seja possível encontrar tal fórmula, é necessário utilizar a equação característica desta sequência.

Teorema 2. Para $n \geq 0$, a fórmula de Binet da Sequência de Padovan é:

$$P(n) = A.x_1^n + B.x_2^n + C.x_3^n$$

Onde x_1, x_2, x_3 são as raízes da equação característica de Padovan sendo uma relacionada ao número plástico e as outras duas complexas e conjugadas, e:

$$A = \frac{x_3 - x_2}{x_1x_3(x_1 - x_3) + x_2x_3(x_3 - x_2) + x_1x_2(x_2 - x_1)}$$

$$B = \frac{x_1 - x_3}{x_1x_3(x_1 - x_3) + x_2x_3(x_3 - x_2) + x_1x_2(x_2 - x_1)}$$

$$C = \frac{x_2 - x_1}{x_1x_3(x_1 - x_3) + x_2x_3(x_3 - x_2) + x_1x_2(x_2 - x_1)}$$

Demonstração. Utilizando os valores iniciais como $P_0 = P_1 = 0, P_2 = 1$, podemos substituir na fórmula de Binet original, denotando o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A.x_1 + B.x_2 + C.x_3 = 0 \\ A.x_1^2 + B.x_2^2 + C.x_3^2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, é possível obter:

$$A = \frac{x_3 - x_2}{x_1x_3(x_1 - x_3) + x_2x_3(x_3 - x_2) + x_1x_2(x_2 - x_1)}$$

$$B = \frac{x_1 - x_3}{x_1x_3(x_1 - x_3) + x_2x_3(x_3 - x_2) + x_1x_2(x_2 - x_1)}$$

$$C = \frac{x_2 - x_1}{x_1x_3(x_1 - x_3) + x_2x_3(x_3 - x_2) + x_1x_2(x_2 - x_1)}$$

Yilmaz e Taskara (2013) calcularam ainda a fórmula de Binet a partir de qualquer termo de inicialização.

Conclusão

Esta sugestão de aula descreveu a definição e propriedades da Sequência de Padovan, além do contexto histórico, sua relação com o número plástico, fórmula de Binet e sua representação matricial. Essas novas propriedades foram descobertas a partir de propriedades já conhecidas da sequência de Padovan. Para isso, foram utilizadas provas matemáticas e recursos computacionais para encontrar os novos resultados.

Contudo, buscou-se identificar que esta sequência é uma sucessão de outra conhecida (Sequência de Fibonacci), permitindo compreender a evolução do campo matemático, cujos pressupostos e propriedades tendem a evoluir a partir do estabelecimento de definições matemáticas, estando essas relacionadas com os números de Padovan.

Referências

BELINI, M. M. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci**. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

FALCON, S.; PLAZA, A. On the fibonacci k-numbers. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 32, n. 5, p. 1615 – 1624, 2007. ISSN 0960-0779. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077906008332>.

PADOVAN, R. Dom hans van der laan and the plastic number. **Nexus Network Journal**, v. 4, p. 181–193, 01 2002.

SAHIN, A. On the generalized perrin and cordonnier. **Commun**. Fac. Sci. Univ. Ank. Sèrvia. v. 68, n. 1, p. 242 – 253, 2017.

SEENUKUL, P. et al. Matrices which have similar properties to padovan q -matrix and its generalized relations. **Sakon Nakhon Rajabhat University Journal of Science and Technology**, v. 7, n. 2, p. 90–94, 2015.

SOKHUMA, K. Padovan q-matrix and the generalized relations. v. 7, p. 2777–2780, 01 2013.

STEWART, I. Tales of a neglected number. **Mathematical Recreations – Scientific American**, 1996.

YILMAZ, N.; TASKARA, N. Matrix sequences in terms oof Padovan and Perrin numbers. **Journal Applied Mathematics**. v. 13, p. 1-7, 2013.

VOET, C.; SCHOONJANS, Y. Benidictine thought as a catalist for 20tm century liturgical space: the motivation behind dom hans van der laan s aesthetic church arquitectury. Proceeding of the 2nd international conference of the Europa Architetural History of Network, p. 255–261, 2012.

Submetido em agosto de 2018
Aprovado em outubro de 2018